

S. Benenti

Lezioni di
MECCANICA RAZIONALE

a.a. 1994-95

Parte seconda

Istituto di Fisica Matematica

"J.-L. Lagrange"

Università di Torino

1995

CLU

INDICE

Capitolo IV - La meccanica di Newton e Euler.

1. Dinamica del punto libero	p. 1
2. Grandezze cinetiche fondamentali e teoremi associati	8
3. Lo spazio-tempo di Newton	12
4. Dinamica del punto vincolato	25
5. L'equazione di Weierstrass	33
6. Esempi notevoli di dinamica del punto	39
6.1 Il moto dei gravi	39
6.2 Il pendolo semplice	41
6.3 Moto di un punto in un campo centrale simmetrico	44
6.4 Moto di un punto in un campo newtoniano	50
7. Dinamica dei sistemi finiti di punti	55
8. Dinamica del corpo rigido	63
8.1. Corpo rigido con un punto fisso	67
8.2. Moti alla Poincaré	70
8.3. Corpo rigido con un asse fisso	79

Capitolo V - La meccanica di Lagrange.

1. Varietà differenziabili	p. 84
2. Fibrati tangenti	94
3. Sistemi olonomi	100
4. Sistemi olonomi a vincoli dipendenti dal tempo	106
5. Le equazioni di Lagrange	110
6. Meccanica riemanniana	123
7. Il potenziale e la lagrangiana	128
8. Sistemi lagrangiani	135
9. Integrali primi dei sistemi lagrangiani	138
10. Il principio dell'azione stazionaria	144
10.1 Cenni di calcolo delle variazioni	150
11. Equilibrio e stabilità	154
12. Piccole oscillazioni	163

Capitolo VI - La meccanica di Hamilton.

1 Fibrati cotangenti e sistemi hamiltoniani	p. 166
2 La trasformazione di Legendre	173
3 Il metodo di Jacobi	176
4 Parentesi di Poisson e integrali primi	185
5 Sottovarietà lagrangiane	189
6 Varietà simplettiche e sistemi hamiltoniani integrabili	196

Capitolo VII - La meccanica di Einstein.

1. Lo spazio-tempo di Minkowski	p. 200
2. Il tempo relativo	209
3. Le trasformazioni di Lorentz	215
4. Le trasformazioni delle velocità	223
5. Dinamica di una particella materiale	225
6. Il campo elettromagnetico	235

Hanno collaborato alla redazione di queste Lezioni i Dottori:

Manuelita Bonadies,
Paolo Cermelli,
Guido Magnano.

Torino, febbraio 1995.

INDICE ANALITICO

A

Accelerazione assoluta	17-225
Accelerazione di un sistema olonoma	125
Accelerazione gravitazionale	39
Algebra di Poisson	186
Aperto di una varietà	86
Apocentri	47
Applicazioni differenziabili	88
Asintoticamente stabile (punto critico)	155
Asse di oscillazione	81
Asse di sospensione	80
Atlante	85
Atlante massimale	86
Atlante saturato	86
Atto di moto	8-101
Atto di moto virtuale	109
Azione	145

B

Binomi lagrangiani	128-135
Bipendolo a lunghezza variabile	121
Bipendolo piano	104-120
Bipendolo sferico	105

C

Calcolo delle variazioni	150
Cambiamento di coordinate	85
Campo centrale	44
Campo centrale a simmetria sferica	45
Campo centrale simmetrico	45
Campo di forza	2
Campo elettrico	230
Campo elettromagnetico	227
Campo hamiltoniano	169
Campo lagrangiano	127-136

Campo magnetico	230
Campo quasi-periodico	199
Campo scalare	95
Campo vettoriale	98
Campo vettoriale dipendente dal tempo	7
Carta	84
Carta adattata	88
Carta naturale	87
Carte compatibili	84
Catenaria	153
Centro di oscillazione	81
Centro di sospensione	80
Classe di equivalenza di coordinate e componenti	96-167
Classe di equivalenza di curve	95
Classe di equivalenza di funzioni	166
Codifferenziale	236
Componente spaziale	212
Componente temporale	212
Componenti di un campo vettoriale	98
Componenti di un covettore	168
Componenti di un vettore	96
Componenti lagrangiane delle forze attive	111
Condizione costitutiva	26
Condizione di completezza	178
Condizione di normalizzazione	16-205
Condizione di ortocronismo	205
Configurazione	100
Configurazione di equilibrio	160
Configurazione di equilibrio instabile	160
Configurazione di equilibrio stabile	160
Configurazione di un sistema	63
Contemporanei (eventi)	212
Contrazione delle lunghezze	218
Coordinata ignorabile	140-177
Coordinate	84

Coordinate adattate	88
Coordinate canoniche	176-198
Coordinate canoniche fibrate	168
Coordinate fibrate	98
Coordinate lagrangiane	100
Coordinate naturali	98
Corpi rigidi	105
Corpo rigido con asse fisso	79
Costante dell'energia	12
Costanti di moto	7
Covettore tangente	166-167
Criterio di instabilità di Cetaiev	161
Criterio di Lyapunov	156
Cronologia assoluta	15
Cronotopo	13
Curva	95
Curva del genere tempo	205
Curva derivata	124
Curva isotropa	208
Curva tangente	124
Curve equivalenti	95
Curve tangenti	95

D

Decomposizione relativa .. 21-203-204-211	
Decomposizione relativa della forza assoluta	225
Decomposizione relativa della velocità assoluta	21
Densità di carica propria	238
Densità di carica relativa	239
Derivata di una funzione	96
Derivazione sulle funzioni	95
Diffeomorfismo	89
Differenziale di una funzione	167
Dilatazione dei tempi	217
Dimensione di una carta	84
Dominio di una carta	84

E

Ellissoidi dell'energia	74
Embedding	89

Energia	139
Energia cinetica	8-57
Energia potenziale	11
Energia propria	230
Energia relativa	230
Energia totale	11
Equazione del moto armonico	44
Equazione del pendolo	44
Equazione delle onde elettromagnetiche	241
Equazione di continuità	239
Equazione di Hamilton-Jacobi	179
Equazione di Laplace	237
Equazione di Lax	76
Equazione di Poisson	237
Equazione di Weierstrass	34
Equazione simbolica della dinamica ..	113
Equazioni canoniche	176
Equazioni cardinali	59
Equazioni di Euler-Lagrange ...	128-135
Equazioni di Euler	68
Equazioni di Hamilton	169
Equazioni di Lagrange	29-114
Equazioni di Lagrange linearizzate ..	164
Equazioni di Maxwell	134-238
Equazioni intrinseche del moto	30
Equazioni parametriche di una curva ..	95
Estremali	148
Eventi contemporanei	14
Evento	13

F

Fattore di Lorentz	203
Fibrato cotangente	168
Fibrato tangente	97
Fibrazione tangente	98
Fibrazione temporale assoluta	15
Fibrazione triviale	106
Fibre	15-98-106-169
Flusso di corrente	238
Fogliettamento	91
Forma armonica	237
Forma di Liouville	169

Forma fondamentale	170
Forma potenziale	239
Forma simplettica	197
Forma simplettica canonica	170
Forza	2
Forza assoluta	225
Forza attiva	26-111
Forza d'inerzia	112
Forza di Coriolis	3
Forza di Lorentz	5-230
Forza di massa	112
Forza di trascinamento	3
Forza esterna	55
Forza interna	55
Forza posizionale	2
Forza reattiva	26
Forza relativa	230
Forze apparenti	4
Forze lagrangiane	29-111
Forze reali	4
Fotone	204
Frequenze	199
Funzionale	144
Funzionale d'azione	145
Funzionale differenziabile	144
Funzione di Lyapunov	156
Funzione generatrice	178-195
Funzione potenziale	63
Funzione rappresentatrice	84
Funzioni di transizione	84
Futuro assoluto	212

G

Genere luce (vettore del)	202
Genere spazio (vettore del)	202
Genere tempo (vettore del)	202
Geodetica	148
Geometria riemanniana	123
Giroscopio pesante	141
Gradi di libertà	100-106
Grandezze cinetiche	8-57
Gruppi di matrici	93
Gruppi ortogonali	93

Gruppo di Lie	94
Gruppo lineare generale	93

H

Hamiltoniana	169
--------------------	-----

I

Identità di Jacobi	186
Immagine di una carta	84
Immersione	89
Immersione topologica	89
Impulso assoluto	229
Impulso relativo	229
Instabile (punto critico)	155
Integrale completo	179
Integrale primo (di un sistema lagrangiano) ...	138
Integrale primo del momento assiale ..	10
Integrale primo del momento della quantità di moto	10-62
Integrale primo dell'energia	11-63
Integrale primo della quantità di moto	9-62
Intervallo assoluto	13-21-212
Intervallo spaziale assoluto	14
Intervallo spaziale relativo	21-212
Intervallo spazio-temporale	201
Intervallo temporale assoluto	14
Intervallo temporale relativo ...	201-212
Involuzione (funzioni in)	185

L

Lagrangiana	128-135
Lagrangiana iper-regolare	174
Lagrangiana regolare	136
Laplaciano	236
Legge di forza	2-225
Lunghezza propria	219
Lunghezza ridotta	81

M

Massa inerziale	2-18
Massa propria	18-225
Massa relativa	229
Massa ridotta	57
Massimi e minimi vincolati	151
Matrice di massa	163
Matrice di rigidità	163
Matrice metrica	124
Matrice simplettica	172
Matrici jacobiane	85
Matrici ortogonali	94
Meta asintotica	35
Metodo di Jacobi	177
Modi	165
Moltiplicatore di Lagrange	27-150
Momenti cinetici	140
Momento angolare	8-57
Momento assiale	10
Momento assiale della quantità di moto	61
Momento assiale delle forze esterne	62
Momento assoluto	229
Momento della quantità di moto	8-57
Momento di una forza	9
Momento relativo	229
Moti geodetici	127
Moti rigidi spontanei	70
Moti stazionari	73
Moto alla Poincaré	70
Moto compatibile con un vincolo	25
Moto di un punto	16
Moto inerziale	3-18
Moto quasi-periodico	47
Moto radiale	46
Moto relativo	21
Moto rispetto al baricentro	58
Moto spontaneo	28-127
Norma di un vettore	202

O

Onda elettromagnetica	241
Operatore di Laplace	236
Ortocrone (velocità)	205

Osservatori	18
-------------------	----

P

Paradosso dei gemelli	206
Parentesi di Lagrange	190
Parentesi di Poisson	185
Particella materiale	18-204-225
Pendolo	41
Pendolo composto	80
Pendolo di Foucault	41
Pendolo semplice	41-104
Pendolo semplice a lunghezza variabile	106
Pendolo sferico	41-104
Pericentri	47
Piano di Laplace	62
Piccole oscillazioni	164
Polo	57
Posizione di arresto	34
Posizione di equilibrio	35
Posizione relativa	203
Postulato delle forze interne	55
Postulato delle reazioni vincolari	26
Potenza	9
Potenza virtuale delle forze attive	111
Potenza virtuale delle forze di massa	112
Potenza virtuale delle forze reattive	110
Potenziale	11-63-128-239
Potenziale scalare	134-240
Potenziale vettore	134-240
Principio di Torricelli	153
Principio d'inerzia	2-200
Principio dell'assoluto	13
Principio dell'azione stazionaria	148
Principio della minima azione	148
Principio di azione e reazione	55
Principio di causalità	214
Principio di D'Alembert-Lagrange	113
Principio di Fermat	148
Principio di relatività galileiana	12
Principio di relatività generale	13
Principio di relatività speciale	13
Principio di sovrapposizione delle forze	2

Problema degli isoperimetri	151
Problema ristretto dei due corpi	56
Proiezione stereografica	91
Pulsazioni caratteristiche	164
Pulsazioni proprie	164
Punto base	95
Punto critico (di un campo vett.)	154
Punto critico (di un funzionale)	148
Punto di riflessione	37
Punto iniziale	95
Punto isolato	3
Punto libero	2
Punto materiale	2-18-225
Punto vincolato ad una curva fissa liscia	30
Punto vincolato ad una superficie fissa liscia	26

Q

Quantità conservate	7
Quantità di moto	8-57

R

Rango di un'applicazione	88
Rappresentazione di Lax	76
Rappresentazione locale	84
Rappresentazione relativa	21
Reazione vincolare	26
Regola di Leibniz	96-186
Regolarità (delle par. di Poisson)	186
Rette isotrope	208
Riferimenti galileiani	3-12-19
Riferimenti inerziali	3-12-19
Riferimento	19
Riferimento cartesiano adattato	202
Riferimento fisico	18

S

Separazione delle variabili	180
Sezione	98
Sezione di una fibrazione	108

Sfere	92
Simboli di Christoffel	125
Sistema conservativo	63
Sistema dinamico hamiltoniano	169
Sistema hamiltoniano integrabile	198
Sistema lagrangiano t-dipendente	135
Sistema olonomo	100
Sistema olonomo conservativo	129
Sistema olonomo perfetto	110
Sistemi olonomi a vincoli dipendenti dal tempo	107
Sistemi reonomi	108
Sistemi scleronomi	108
Sistemi lagrangiani	135
Sottovarietà	88
Sottovarietà aperte	88
Sottovarietà definite da equazioni	91
Sottovarietà immersa	89
Sottovarietà lagrangiana	189
Sottovarietà lagrangiana trasversa	193
Spazi di contemporaneità	15
Spazio-tempo	13
Spazio-tempo delle configurazioni	106
Spazio-tempo di Minkowski	13
Spazio-tempo di Newton	13-200
Spazio cotangente	167-169
Spazio delle configurazioni	100
Spazio di Minkowski	202
Spazio tangente	97
Spazio vettoriale simplettico	192
Spostamento virtuale	109
Stabile (punto critico)	155
Stato dinamico	112
Stato inerziale	18
Stazionario	148
Storia di una particella	16-202
Superfici regolari	90
Superficie limite	12

T

Trasformazione di Legendre	173
Tempo assoluto	12-14
Tempo proprio di una particella	16-203

Tensore metrico	123
Teorema dei moti relativi	23-224
Teorema del momento della quantità di moto	9-60
Teorema del moto del baricentro	61
Teorema dell'energia	9-60
Teorema della quantità di moto ...	9-60
Teorema delle forze interne	55
Teorema di Arnold-Liouville	198
Teorema di Bertrand	48
Teorema di Darboux	198
Teorema di Euler (funz. omogenee) .	139
Teorema di Huygens	81
Teorema di immersione di Whitney ..	91
Teorema di Jacobi	179
Teorema di König	58
Teorema di Lagrange-Dirichlet	161
Teorema di Liouville	187
Teorema di Poincaré	71
Teorema di Poisson sugli integrali primi	187
Teorema fondamentale del calcolo delle variazioni	150
Teoremi di conservazione	9-62
Topologia di Hausdorff	87
Topologia separabile	87
Tori	93
Trasformazione canonica	178
Trasformazione di gauge	240
Trasformazioni standard di Lorentz .	220
Trivializzazione	106
Trottola di Lagrange	141

U

Universo	13
----------------	----

V

Variazione a estremi fissi	147
Variazione prima	145
Variazioni	144
Varietà con bordo	100
Varietà delle configurazioni	100-135

Varietà delle configurazioni di riferimento	106
Varietà delle velocità	102
Varietà diffeomorfe	89
Varietà differenziabile	84-86
Varietà estesa delle configurazioni ..	106
Varietà parallelizzabile	99
Varietà prodotto	90
Varietà pseudo-riemanniana	123
Varietà riemanniana	123
Varietà semi-riemanniana	123
Varietà simplettica	197
Varietà tangente	97
Velocità assoluta	16-203
Velocità di fuga	52
Velocità di trascinamento	22-215
Velocità di un sistema olonomo	124
Velocità lagrangiane	102
Velocità relativa	22-203
Verticalmente indipendenti (funzioni)	189
Vettore applicato	97
Vettore di Laplace	54
Vettore di Poisson	79
Vettore isotropo	208
Vettore spaziale	14-212
Vettore tangente	95-94
Vettore verticale	193
Vincoli perfetti	110
Vincolo (di un funzionale)	150
Vincolo bilaterale	25
Vincolo di posizione	25-103
Vincolo di velocità	25
Vincolo liscio	26-110
Vincolo unilaterale	25

CAPITOLO IV

LA MECCANICA DI NEWTON E EULER (Meccanica Classica)

Generata dall'opera di Galileo Galilei (Pisa 1564 - Arcetri 1642), consolidata da Isaac Newton (Woolsthorpe 1642 - Kensington 1727) ed eretta a sistema da Leonhard Euler (Basilea 1707 - Pietroburgo 1783), la "meccanica razionale" o "meccanica classica" fornisce i primi fondamentali modelli matematici della fisica. I corpi in movimento sono rappresentati da singoli punti o da insiemi continui di punti, mobili con o senza vincoli nello spazio affine tridimensionale euclideo oppure in un opportuno spazio affine a quattro dimensioni: lo spazio-tempo di Newton. Lo strumento matematico principale è il calcolo vettoriale negli spazi affini. Gli enti cinematici che descrivono il moto dei corpi e le sollecitazioni che lo provocano sono rappresentati da vettori o anche, specialmente nella meccanica dei continui, da tensori. Gli aspetti puramente cinematici dei due modelli fondamentali della meccanica razionale, quello del punto e del corpo rigido, sono già stati trattati nel Capitolo III. In questo capitolo ne vengono esaminati gli aspetti dinamici.

1. Dinamica del punto libero

Il modello più semplice che la meccanica newtoniana assume per i corpi in movimento è quello di **punto materiale libero**.

DEFINIZIONE 1. Dicesi **punto materiale** una coppia (P, m) costituita da un punto mobile nello spazio affine tridimensionale euclideo (rappresentante lo spazio fisico osservato da un riferimento) e da un numero positivo m detto **massa inerziale**. Un punto materiale si dice **libero** se può assumere qualunque posizione nello spazio e qualunque velocità.

La dinamica newtoniana del punto materiale è fondata su principi la cui discussione è argomento dei corsi di Fisica. Qui li formuliamo direttamente, mettendone in risalto gli aspetti matematici.

PRINCIPIO I. Ogni azione atta a provocare il moto di un punto materiale è rappresentata da un vettore $\mathbf{F}$ detto **forza**. I moti conseguenti all'azione di una forza $\mathbf{F}$ sono retti dall'equazione

$$(1) \quad \boxed{m \mathbf{a} = \mathbf{F}}$$

dove $\mathbf{a}$ è l'accelerazione del punto. Per la forza $\mathbf{F}$ si postula una **legge di forza** cioè una sua dipendenza dalla posizione del punto, dalla sua velocità ed eventualmente dal tempo:

$$(2) \quad \boxed{\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}$$

PRINCIPIO II. L'azione simultanea di due (o più) forze $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ è rappresentata dalla loro somma (**principio di sovrapposizione delle forze**) e il moto del punto è allora retto dall'equazione

$$(3) \quad m \mathbf{a} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2.$$

La meccanica newtoniana non considera leggi di forza dipendenti dall'accelerazione. Una forza attiva dipendente dalla sola posizione del punto prende il nome di **forza posizionale** o **campo di forza**.

Come si è detto, questi principi presuppongono la scelta di un riferimento rispetto al quale calcolare la posizione del punto, la sua velocità, la sua accelerazione. Anzi, la definizione di velocità e di accelerazione presuppongono anche la scelta di un parametro temporale. La meccanica newtoniana postula, con il seguente **principio d'inerzia**, l'esistenza

di una classe privilegiata di riferimenti e di un tempo universale, indipendente dalla scelta del riferimento, parametro privilegiato rispetto al quale calcolare gli enti cinematici:

PRINCIPIO III. Esistono dei riferimenti, detti **riferimenti inerziali** o **galileiani**, e un tempo, detto **tempo assoluto**, rispetto ai quali un punto libero e isolato si muove di moto rettilineo uniforme, detto **moto inerziale**.

In quest'enunciato per **punto isolato** s'intende un punto non interagente con alcun campo fisico (gravitazionale, elettromagnetico, etc.). Tra i moti inerziali, caratterizzati dalla condizione $\mathbf{a} = 0$, vi è in particolare la *quiete*. Questo principio ha due importanti conseguenze.

PROPOSIZIONE 1. Due riferimenti inerziali si muovono uno rispetto all'altro di moto traslatorio rettilineo uniforme.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{R}$ un riferimento inerziale. Sia $\mathcal{R}'$ un corpo rigido in moto rispetto a $\mathcal{R}$. Supponiamo che $\mathcal{R}'$ definisca anch'esso un riferimento inerziale. Un qualunque punto libero e non sollecitato da forze P , in quiete rispetto a $\mathcal{R}'$, si muove pure rispetto a $\mathcal{R}$ di moto rettilineo uniforme. Ma il punto P si può pensare come punto solidale a $\mathcal{R}'$ visto che è in quiete rispetto a questo. Dunque tutti i punti solidali a $\mathcal{R}'$ si muovono rispetto ad $\mathcal{R}$ di moto rettilineo uniforme. ■

PROPOSIZIONE 2. Un punto libero e isolato si muove rispetto ad un qualunque riferimento $\mathcal{R}$ come se fosse soggetto all'azione di due forze, una **forza di trascinamento** ed una **forza di Coriolis**, date rispettivamente da

$$(4) \quad \boxed{\mathbf{F}_{tr} = -m \mathbf{a}_{tr}, \quad \mathbf{F}_c = -m \mathbf{a}_c}$$

dove $\mathbf{a}_{tr}$ e $\mathbf{a}_c$ sono l'accelerazione di trascinamento e l'accelerazione di Coriolis misurate rispetto ad un qualunque riferimento inerziale.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{R}'$ un qualunque riferimento inerziale. Per il teorema di Coriolis si ha

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \mathbf{a}_{tr} + \mathbf{a}_c,$$

dove $\mathbf{a}_{tr}$ e $\mathbf{a}_c$ sono le accelerazioni di trascinamento e di Coriolis calcolate rispetto ad $\mathcal{R}'$. Se il punto si muove di moto inerziale in $\mathcal{R}'$ allora $\mathbf{a}' = 0$ e quindi

$$\mathbf{a} = -\mathbf{a}_{tr} - \mathbf{a}_c.$$

Moltiplicando per la massa m ,

$$m\mathbf{a} = -m\mathbf{a}_{tr} - m\mathbf{a}_c,$$

e dal confronto con la (1) si vede che il punto P si muove come se fosse soggetto alle forze (4). ■

OSSERVAZIONE 1. La forza di trascinamento e la forza di Coriolis si dicono **forze apparenti** per distinguerle dalle altre forze, dette **forze reali**, dovute ad interazioni con altri corpi o con campi fisici. In conclusione: se il riferimento scelto per descrivere la dinamica di un punto non è inerziale, allora a secondo membro dell'equazione fondamentale (1) alle forze reali occorre aggiungere le forze apparenti. Queste svaniscono se il riferimento scelto è inerziale.

Vediamo ora le leggi di forza più ricorrenti, cominciando dalle forze apparenti.

OSSERVAZIONE 2. *Forze apparenti.* In base a quanto visto al §5, Cap. III, le forze apparenti risultano avere le seguenti espressioni:

$$(5) \quad \boxed{\begin{aligned} \mathbf{F}_{tr} &= -m(\mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) \\ \mathbf{F}_c &= -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \end{aligned}}$$

dove $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare del riferimento scelto rispetto ad un qualunque riferimento inerziale, $\mathbf{a}_O$ è l'accelerazione di un qualunque punto O solidale al riferimento scelto rispetto ad un qualunque riferimento inerziale, $\mathbf{r}$ è il vettore posizione del punto P rispetto a O e infine $\mathbf{v}$ è la sua velocità. Si noti che $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{a}_O$ sono funzioni vettoriali del tempo t , sicché la forza di Coriolis è in generale funzione di $(\mathbf{v}, t)$ mentre la forza di trascinamento è in generale funzione di $(\mathbf{r}, t)$.

OSSERVAZIONE 3. *Forze reali.* La Fisica considera varie leggi di forza. (I) La più semplice (usata per esempio nello studio della caduta di un grave) è

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} = \text{costante.}$$

(II) La legge di forza

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r}, \quad k > 0,$$

è usata per rappresentare la forza esercitata su di un punto in posizione $\mathbf{r} = OP$ da una molla elastica perfetta a lunghezza a riposo nulla, avente estremi in O e P . (III) Una legge di forza del tipo

$$\mathbf{F} = -\frac{\gamma}{r^3}\mathbf{r} = -\frac{\gamma}{r^2}\mathbf{u},$$

definita per $\mathbf{r} \neq 0$, rappresenta l'azione esercitata da una massa gravitazionale M posta nel punto O su di un punto materiale P di massa gravitazionale m (la massa gravitazionale si identifica con la massa inerziale), posto

$$\gamma = GMm$$

con G costante di gravitazione universale. Rappresenta anche la forza esercitata da una carica elettrica e_0 posta in O su di un punto materiale P dotato di carica elettrica e , posto

$$\gamma = -e_0 e.$$

(IV) Una legge di forza del tipo

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{v})$$

rappresenta l'azione meccanica esercitata da un campo elettromagnetico, dato dai vettori $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$, sopra una particella di carica elettrica e , detta **forza di Lorentz** (§5, Cap. VI).

Abbiamo a questo punto tutti gli elementi necessari per la costruzione del modello matematico per la dinamica del punto libero. Esso è semplicemente costituito dall'equazione vettoriale

$$(6) \quad \boxed{m\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}$$

combinazione dell'equazione fondamentale (1) e della legge di forza. In conformità al principio di sovrapposizione la funzione a secondo membro della (6) può essere la somma di più leggi di forza. Se il riferimento

scelto non è inerziale tra gli addendi di $\mathbf{F}$ dobbiamo includere la forza di trascinamento e la forza di Coriolis.

La legge di forza $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ è una funzione definita in un certo dominio $D \subset \mathbb{R}^7$. Le leggi di forza con cui si rappresentano gli ordinari campi fisici (si vedano gli esempi dell'Oss. 3) sono di classe C^∞ .

Assegnata la legge di forza, l'equazione della dinamica (6) dà luogo ad un'equazione differenziale (vettoriale) del secondo ordine nell'incognita $\mathbf{r}(t)$,

$$(7) \quad m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}, t \right)$$

oppure ad un sistema di due equazioni del primo ordine nelle funzioni incognite $(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t))$,

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{m} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \end{cases}$$

Se la forza è indipendente dal tempo il sistema (8) è autonomo. Se invece la forza dipende dal tempo, lo si può rendere autonomo con un semplice artificio. Si introduce un parametro ausiliario τ equivalente al tempo t e si aggiunge al sistema un'ulteriore equazione che esprime questo legame:

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{m} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \tau) \\ \frac{d\tau}{dt} = 1 \end{cases}$$

L'ultima equazione equivale infatti a $\tau = t + \text{costante}$.

In coordinate cartesiane (x^α) l'equazione (7) forma un sistema di tre equazioni

$$(7') \quad m \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = F^\alpha \left(x^\beta, \frac{dx^\beta}{dt}, t \right) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3).$$

Il sistema del primo ordine (8) diventa

$$(8') \quad \begin{cases} \frac{dx^\alpha}{dt} = v^\alpha, \\ \frac{dv^\alpha}{dt} = \frac{1}{m} F^\alpha(x^\beta, v^\beta, t). \end{cases} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

Analogamente per il sistema ampliato (9). Entrambi i sistemi sono in forma normale e possono quindi considerarsi come sistemi corrispondenti ad un campo vettoriale $\mathbf{X}$, rappresentante la dinamica di un punto materiale libero. Se la forza dipende dal tempo si può interpretare $\mathbf{X}$ come **campo vettoriale dipendente dal tempo** (sistema (8)) sopra lo spazio $\mathbb{R}^6$ delle coppie posizione-velocità $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, oppure come campo vettoriale sopra lo spazio $\mathbb{R}^7$ delle terne posizione-velocità-tempo $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ (sistema (9)). Se la forza non dipende dal tempo $\mathbf{X}$ è un campo vettoriale ordinario sullo spazio delle $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$. La proiezione delle curve integrali di $\mathbf{X}$ sullo spazio $\mathbb{R}^3$ delle posizioni $\mathbf{r}$ fornisce tutti i possibili moti del punto (Fig. 1.1). In base al teorema di Cauchy possiamo in conclusione affermare che: *fissata la posizione $\mathbf{r}_0$ e la velocità $\mathbf{v}_0$ di un punto libero ad un istante iniziale t_0 , risulta univocamente determinato il suo moto cioè una funzione $\mathbf{r}(t)$ soddisfacente all'equazione (7) ovvero alle equazioni (8) e tale che*

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0) = \mathbf{v}_0.$$

Talvolta può essere conveniente l'utilizzo di coordinate non cartesiane (q^i) . Denotate con $F^i(q^j, v^j, t)$ le componenti della forza in queste coordinate e tenuta presente l'espressione delle componenti dell'accelerazione, al sistema vettoriale (8) corrisponde un sistema del tipo

$$(8'') \quad \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = v^i \\ \frac{dv^i}{dt} = -\Gamma_{hj}^i v^h v^j + \frac{1}{m} F^i(q^j, v^j, t). \end{cases} \quad (h, i, j = 1, 2, 3)$$

Come per ogni sistema dinamico lo studio del sistema (8) o del sistema (9) può essere facilitato dalla conoscenza di integrali primi. Un integrale primo è in questo caso una funzione, reale o vettoriale, di $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ (oppure soltanto di $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ per il sistema autonomo (9)) che si mantiene costante lungo le soluzioni, cioè lungo i moti. Per questo motivo gli integrali primi della meccanica prendono anche il nome di **costanti di moto** o di **quantità conservate**. Integrali primi *tipici* sono associati alle tre grandezze *cinetiche fondamentali* considerate nel paragrafo seguente.

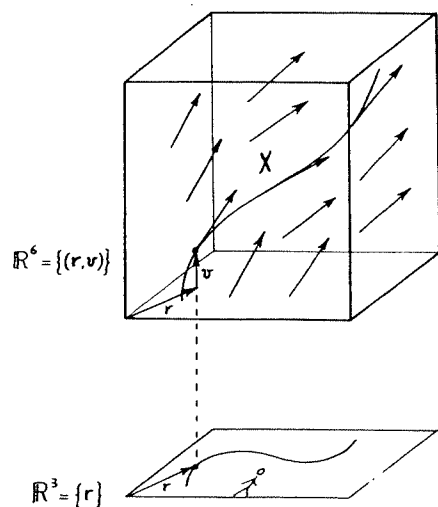


Fig. 1.1: la dinamica di un punto materiale libero.

2. Grandezze cinetiche fondamentali e teoremi associati

Chiamiamo **atto di moto** di un punto la coppia $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ costituita dal vettore posizione (rispetto ad un punto O) e dal vettore velocità. Ad ogni atto di moto vengono associate le tre **grandezze cinetiche fondamentali**: la **quantità di moto**

$$(1) \quad \boxed{\mathbf{p} = m\mathbf{v}}$$

il **momento della quantità di moto** o **momento angolare** rispetto al punto O , detto **polo**,

$$(2) \quad \boxed{\mathbf{K}_O = OP \times \mathbf{p} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v}}$$

e l'**energia cinetica**

$$(3) \quad \boxed{T = \frac{1}{2} m v^2} \quad (v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}).$$

Derivando rispetto al tempo queste tre grandezze e tenuto conto dell'equazione fondamentale della dinamica, si trovano le equazioni

$$(4) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \mathbf{F}, \\ \frac{d\mathbf{K}_O}{dt} &= \mathbf{M}_O, \\ \frac{dT}{dt} &= W, \end{aligned}}$$

dove

$$(5) \quad \boxed{\mathbf{M}_O = OP \times \mathbf{F}}$$

è il **momento della forza** $\mathbf{F}$ rispetto al polo O , che in questo caso si è supposto fisso e

$$(6) \quad \boxed{W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}$$

è la **potenza** della forza $\mathbf{F}$. Le tre equazioni (4) prendono rispettivamente il nome di **teorema della quantità di moto**, **teorema del momento angolare**, **teorema dell'energia**.

A questi teoremi fanno seguito dei corollari, detti **teoremi di conservazione**, i quali, subordinatamente a certe ipotesi sulle leggi di forza, mostrano l'esistenza di integrali primi tipici della meccanica del punto. Dalla (4)₁ segue chiaramente che

PROPOSIZIONE 1. Se $\mathbf{F} = 0$ allora $\mathbf{p} = \text{costante}$ (ovvero $\mathbf{v} = \text{costante}$).

Si ha così l'**integrale primo della quantità di moto**. In questo caso ogni moto è rettilineo e uniforme. Più in generale:

PROPOSIZIONE 2. Se esiste una direzione fissa, rappresentata da un versore fisso $\mathbf{u}$, a cui la forza $\mathbf{F}$ è sempre ortogonale (comunque sia la sua dipendenza dalla posizione del punto, dalla sua velocità e dal tempo),

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = 0,$$

allora la componente della quantità di moto, ovvero della velocità, secondo questa direzione è un integrale primo:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \text{costante}.$$

Dimostrazione. Derivando la funzione $m \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ rispetto al tempo e tenendo conto dell'equazione fondamentale $m \mathbf{a} = \mathbf{F}$, si trova:

$$\frac{d}{dt}(m \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) = m \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = 0. \quad \blacksquare$$

In maniera analoga si dimostra che

PROPOSIZIONE 3. Se esiste un punto fisso O rispetto al quale il momento della forza è nullo qualunque sia la posizione del punto, cioè se la forza $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ è sempre diretta verso O , cioè se

$$\mathbf{F} \times \mathbf{r} = 0,$$

allora il momento angolare $\mathbf{K}_O$ è un integrale primo:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{costante}.$$

Si osservi che l'integrale primo del momento della quantità di moto, a meno del fattore m , coincide con la velocità areale vettoriale. A questa conclusione si giunge direttamente osservando che se la forza è sempre parallela a OP , allora anche l'accelerazione del punto è sempre parallela a OP ; quindi tutti i moti conseguenti all'azione di tale forza sono moti centrali.

Una situazione più generale è considerata nella proposizione seguente. Occorre premettere che se a è una retta, $\mathbf{u}$ un suo versore, O un suo punto, la quantità

$$(7) \quad M^a = M_O \cdot \mathbf{u} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$$

(posto $\mathbf{r} = OP$) prende il nome di **momento assiale** della forza $\mathbf{F}$ e non dipende dalla scelta del punto O sulla retta. Esso si annulla se e solo se i tre vettori $(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \mathbf{F})$ sono dipendenti. Ciò significa che la retta di applicazione del vettore applicato $(P, \mathbf{F})$ interseca la retta a . Segue allora dalla $(4)_2$ moltiplicata scalarmente per $\mathbf{u}$ che

PROPOSIZIONE 4. Se la forza $\mathbf{F}$ è sempre diretta verso una retta fissa a di versore $\mathbf{u}$ allora la funzione $\mathbf{r} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ è un integrale primo (detto **integrale primo del momento assiale**).

Si osservi che la quantità $\mathbf{r} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ coincide con la velocità areale della proiezione del punto su di un piano ortogonale alla retta a (rispetto al centro dato dall'intersezione di a con tale piano).

Consideriamo infine un ultimo integrale primo tipico: l'**integrale primo dell'energia**.

PROPOSIZIONE 5. Se la forza $\mathbf{F}$ è conservativa, se esiste cioè un campo scalare U tale che

$$\mathbf{F} = \text{grad}(U),$$

allora la funzione

$$(8) \quad \boxed{E = T - U}$$

è un integrale primo.

Dimostrazione. Da $\mathbf{F} = \text{grad}(U)$ segue

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{dU}{dt}$$

perché, facendo intervenire coordinate cartesiane ortonormali,

$$\text{grad}(U) \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial U}{\partial x^\alpha} v^\alpha = \frac{\partial U}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{dt} = \frac{dU}{dt}.$$

Quindi dal teorema dell'energia $(4)_3$ segue che

$$\frac{d}{dt}(T - U) = 0. \quad \blacksquare$$

Ricordiamo che la funzione U prende il nome di **potenziale**. Alla funzione $V = -U$ si dà invece il nome di **energia potenziale**, cosicché la funzione $E = T + V$, somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale, prende il nome di **energia totale**.

Terminiamo con un'osservazione relativa ad una prima applicazione dell'integrale dell'energia.

OSSERVAZIONE 1. Sia h la **costante dell'energia**, cioè il valore assunto dall'energia totale E per un prefissato moto del punto. Si osservi che

$$h = T_0 - U_0$$

dove T_0 ed U_0 sono i valori iniziali dell'energia cinetica e del potenziale. Poiché è sempre $T \geq 0$ dalla condizione $T - U = h$ segue che le possibili posizioni del punto debbono soddisfare alla disuguaglianza

$$(9) \quad h + U(\mathbf{r}) \geq 0.$$

L'uguaglianza nella (9) definisce una superficie, detta **superficie limite**, regolare nei punti in cui il gradiente di U , cioè la forza, non è nulla. In genere questa superficie divide lo spazio in due regioni. Il moto avviene in una delle due regioni, quella definita dalla disuguaglianza (9), e la superficie limite costituisce una barriera invalicabile. Se raggiunta dal punto essa non può essere superata. Su di essa il punto ha velocità nulla (perché $T = 0$). Si noti bene che tale superficie limite dipende dalla costante dell'energia quindi dalle condizioni iniziali.

3. Lo spazio-tempo di Newton

Il modello di spazio affine tridimensionale euclideo assunto per lo spazio fisico è subordinato alla scelta di un riferimento. Noi concepiamo l'idea di più riferimenti, ma quando osserviamo e descriviamo movimenti di oggetti presupponiamo la scelta di un ben definito riferimento. A stretto rigore, gli spazi affini associati a due riferimenti diversi (in moto uno rispetto all'altro) sono diversi: il mondo osservato da un riferimento è *diverso* dal mondo osservato da un altro riferimento. È di conseguenza del tutto naturale concepire l'idea che anche il tempo cambi da riferimento a riferimento, cioè che ad ogni riferimento non solo sia associato uno spazio affine ma anche un *tempo*.

La meccanica newtoniana postula però l'esistenza di un tempo unico per tutti i riferimenti (il **tempo assoluto**). Non postula invece l'esistenza di un riferimento privilegiato quindi di uno *spazio assoluto* tridimensionale (riproposti in fisica più tardi sotto forma di *etere* e poi definitivamente abbandonato) bensì l'esistenza di una *classe di riferimenti privilegiati*, i **riferimenti inerziali** o **galileiani**. Inoltre, col **principio di relatività galileiana**, postula che le leggi della meccanica siano invarianti in forma rispetto ad ogni sistema inerziale. Questo

principio, esteso da Einstein a tutti i fenomeni fisici riferiti a sistemi inerziali (**principio di relatività speciale**) e successivamente anche ai non inerziali (**principio di relatività generale**), può riformularsi come **principio dell'assoluto**, nel senso seguente: tutte le leggi fisiche (in particolare quelle della meccanica) possono esprimersi in forma assoluta, cioè indipendente dalla scelta del riferimento. Siamo così condotti a ricercare un *ambiente* opportuno dove formulare tali leggi. A questo scopo osserviamo che un concetto *primitivo* assoluto elementare per la meccanica (come lo è per la geometria euclidea quello di *punto*) è il concetto di **evento**. Un evento (quale ad esempio lo scoppio di una stella, l'accendersi di una lampadina, l'urto di due particelle, etc.) ha un suo carattere assoluto, che si può però tradurre in termini "relativi" quando lo si voglia collocare nello spazio (con la scelta di un riferimento) e nel tempo (con la scelta di un calendario o di un orologio). Si possono allora descrivere in maniera assoluta le leggi dell'universo operando sull'insieme di tutti gli eventi, chiamato **spazio-tempo** o **Universo** o **cronotopo**, ed enunciando il principio dell'assoluto nella maniera seguente:

PRINCIPIO I. Tutte le leggi fisiche si esprimono in forma assoluta, cioè indipendente dalla scelta del riferimento, nello spazio-tempo.

Per rendere effettivo questo principio occorre istituire sullo spazio-tempo una struttura matematica atta a rappresentare le suddette leggi. Questa struttura può essere dedotta a partire da postulati di natura fisico-matematica oppure postulata *direttamente*. Seguiremo il secondo approccio.

Vi sono vari modelli matematici per lo spazio-tempo. Essi si distinguono sostanzialmente in due classi: **spazi-tempi affini** e **spazi-tempi non affini**. La struttura affine dello spazio-tempo è concomitante al postulato dell'esistenza dei riferimenti inerziali: i moti inerziali, connessi con tali riferimenti, sono rappresentati da rette nello spazio-tempo.

Due sono gli spazi-tempi affini fondamentali: lo **spazio-tempo di Newton**, sede della meccanica newtoniana, e lo **spazio-tempo di Minkowski**, sede della meccanica einsteiniana (teoria della Relatività Ristretta). Questo paragrafo è dedicato allo studio del primo. La sua struttura è definita nel seguente enunciato.

PRINCIPIO II. Lo **spazio-tempo di Newton** è uno spazio affine a 4 dimensioni (N, E, δ) . Per ogni coppia di eventi $P, Q \in N$ il vettore $PQ = \delta(P, Q) \in E$ prende il nome di **intervallo assoluto** dei due

eventi. Lo spazio vettoriale associato E è dotato di un covettore $\chi \in E^*$ ($\chi\rho\acute{o}\nu\omicron\varsigma$ = tempo). Per ogni coppia di eventi $P, Q \in N$ il numero reale $\langle PQ, \chi \rangle$ prende il nome di **intervallo temporale assoluto** dei due eventi. Se $\langle PQ, \chi \rangle > 0$ si dice che l'evento Q **segue** P o che P **precede** Q . Se $\langle PQ, \chi \rangle = 0$ si dice che gli eventi sono **contemporanei**. Lo spazio

$$(1) \quad E_0 = \{v \in E \mid \langle v, \chi \rangle = 0\}$$

dei vettori di E che annullano χ è dotato di un tensore metrico g_0 definito positivo per cui la coppia (E_0, g_0) è uno spazio vettoriale euclideo tridimensionale. Ogni vettore di E_0 è detto **spaziale**. A due eventi distinti contemporanei P e Q (quindi tali che $PQ \in E_0$) si associa il numero positivo $|PQ| = \sqrt{g_0(PQ, PQ)} = \sqrt{PQ \cdot PQ}$ detto **intervallo spaziale assoluto** dei due eventi.

Si osservi che in questo modello di spazio-tempo è definita la distanza spaziale assoluta solo fra eventi contemporanei. La distanza spaziale di eventi non contemporanei è un concetto relativo (si veda più avanti). Una prima conseguenza delle precedenti assunzioni è la seguente

PROPOSIZIONE 1. Esiste una funzione reale (definita a meno di una costante additiva) $t: N \rightarrow \mathbb{R}$, detta **tempo assoluto**, tale che

$$(2) \quad \boxed{\chi = dt}$$

e

$$(3) \quad \boxed{\langle PQ, \chi \rangle = t(Q) - t(P)}$$

per ogni coppia di eventi $P, Q \in N$. Per ogni numero reale s l'insieme

$$N_s = \{P \in N \mid t(P) = s\} = t^{-1}(s)$$

degli eventi *occorrenti alla data* s è un sottospazio affine tridimensionale euclideo con spazio vettoriale soggiacente (E_0, g_0) .

Dimostrazione. Si consideri su N un sistema di coordinate affini (x^α) . Al covettore $\chi \in E^*$ corrisponde su N la forma differenziale

$$\chi = \chi_\alpha dx^\alpha,$$

le cui componenti (χ_α) sono costanti. Questa 1-forma è esatta, perché se si pone

$$t = \chi_\alpha x^\alpha,$$

si vede che $dt = \chi_\alpha dx^\alpha = \chi$. Inoltre:

$$t(Q) - t(P) = \chi_\alpha (x^\alpha(Q) - x^\alpha(P)) = \langle PQ, \chi \rangle,$$

e la (3) è dimostrata. Se inoltre P è un evento di N_s , allora ogni altro evento Q contemporaneo è tale che $t(Q) - t(P) = 0$, quindi tale che $\langle PQ, \chi \rangle = 0$, vale a dire $PQ \in E_0$. Lo spazio N_s è quindi il sottospazio affine generato da un qualunque suo punto P e da tutti i vettori di E_0 . Lo spazio vettoriale corrispondente si identifica banalmente con E_0 . ■

I sottospazi N_s , che possiamo chiamare **spazi di contemporaneità**, formano un fogliettamento dello spazio-tempo e stabiliscono una **cronologia assoluta** degli eventi. Si dice inoltre che l'applicazione $t: N \rightarrow \mathbb{R}$ cosituisce la **fibrazione temporale assoluta** dello spazio-tempo di Newton: le **fibre** sono i sottospazi N_s .

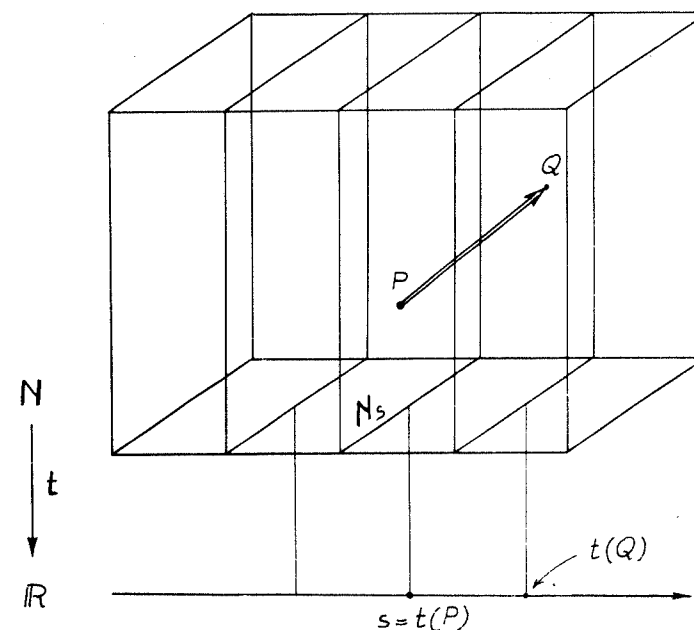


Fig. 3.1: il tempo assoluto ed i sottospazi N_s degli eventi contemporanei.

Il moto di una particella è interpretabile come una successione continua di eventi, quindi come curva.

DEFINIZIONE 1. Il **moto di un punto** (o **storia di una particella**) è una curva nello spazio-tempo di Newton $\sigma: I \rightarrow N: \tau \mapsto \sigma(\tau)$ (di classe C^1 almeno).

Il parametro τ della storia prende il nome di **tempo proprio della particella**: può pensarsi come il tempo misurato da un orologio posseduto dalla particella. Vista l'esistenza in N di un tempo assoluto, è ragionevole assumere come principio che i tempi propri delle particelle siano *sincronizzati* col tempo assoluto:

PRINCIPIO III. Lungo una storia $\sigma(\tau)$ il tempo proprio coincide con il tempo assoluto (modulo una costante):

$$(4) \quad t(\sigma(\tau)) = \tau + \text{cost.}$$

Di conseguenza:

PROPOSIZIONE 2. Il vettore tangente $V = \dot{\sigma}$ ad una storia σ , detto **velocità assoluta**, soddisfa alla condizione

$$(5) \quad \langle V, \chi \rangle = 1$$

detta **condizione di normalizzazione**. La velocità assoluta è trasversa (cioè non tangente) agli spazi di contemporaneità N_s .

Dimostrazione. La condizione (4) equivale a

$$(6) \quad D(t \circ \sigma)(\tau) = \frac{dt}{d\tau} = 1$$

e questa a sua volta, ricordata la definizione di vettore tangente, a

$$(5') \quad \langle V, dt \rangle = 1,$$

cioè alla (5). Per dimostrare la trasversalità basta ricordare che la condizione di tangenza è $\langle V, dt \rangle = 0$, perché N_s è definito dall'equazione $t = s = \text{cost.}$ ■

OSSERVAZIONE 1. Essendo N uno spazio affine, fissato un suo qualunque punto O , la storia di una particella ammette una rappresentazione vettoriale del tipo

$$(7) \quad OP = R(\tau),$$

denotato con $P(\tau)$ il punto mobile. La velocità assoluta può dunque definirsi come limite di un rapporto incrementale:

$$(8) \quad V(\tau) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (R(\tau + h) - R(\tau)).$$

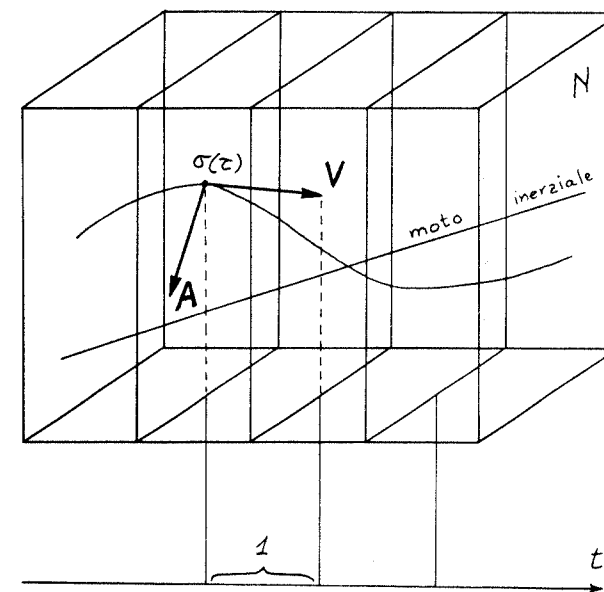


Fig. 3.2: la storia di una particella e gli enti cinematici assoluti.

DEFINIZIONE 2. Dicesi **accelerazione assoluta** di una particella il vettore

$$(9) \quad A = \frac{dV}{d\tau}$$

definito, per ogni valore del tempo proprio τ , da

$$(9') \quad A(\tau) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (V(\tau + h) - V(\tau)).$$

Si dice che una particella si muove di **moto inerziale** o che è in **stato inerziale** se la sua velocità assoluta è costante, ovvero se $A = 0$.

OSSERVAZIONE 2. Al contrario della velocità assoluta, l'accelerazione assoluta è sempre tangente ai sottospazi N_s . Infatti

$$\langle A, dt \rangle = \left\langle \frac{dV}{d\tau}, \chi \right\rangle = \frac{d}{d\tau} \langle V, \chi \rangle = 0,$$

perché χ è costante e $\langle V, \chi \rangle = 1$.

Un moto inerziale è rappresentato da una retta nello spazio-tempo, trasversale al fogliettamento degli spazi di contemporaneità. Il moto inerziale rappresenta il moto di un punto materiale libero e isolato, non soggetto cioè ad alcuna sollecitazione. I moti inerziali sono i soli ad essere rappresentati da rette nello spazio-tempo e quindi sono alla base della sua struttura affine. È dunque ragionevole formulare per la dinamica di un punto materiale *libero* il seguente principio:

PRINCIPIO IV. Un **punto o particella materiale** è una coppia (P, m) costituita da un punto mobile $P(\tau)$ nello spazio-tempo di Newton N e da un numero reale positivo m , detto **massa propria** o **massa inerziale**. Le sollecitazioni a cui esso è soggetto e che lo deviano dallo stato inerziale sono rappresentate da un vettore $F \in E$. Tutte le possibili storie di un punto materiale soddisfano all'equazione

$$(10) \quad \boxed{mA = F}$$

Come si vede, la formulazione di questo principio fa intervenire soltanto concetti assoluti, cioè definiti sullo spazio-tempo. Introduciamo ora il concetto di riferimento ed analizziamone le conseguenze.

Per **riferimento fisico** s'intende un insieme di punti distribuiti con continuità nello spazio fisico, ciascuno caratterizzato da un *nome*, costituito in genere da tre coordinate. Le particelle di un riferimento vengono anche chiamate **osservatori**. Nello spazio-tempo le storie di questi osservatori sono rappresentate da curve non intersecantisi che lo ricoprono

completamente (si dice anche che esse formano una *congruenza di curve* nello spazio-tempo), oppure solo in parte, nel caso che il riferimento fisico considerato non invada tutto lo spazio. Le velocità assolute degli osservatori, cioè i vettori tangenti alle loro storie, formano un campo vettoriale soddisfacente, per definizione, alla condizione di normalizzazione (5). Le accelerazioni assolute sono infine nulle se e solo se gli osservatori si muovono tutti di moto inerziale e costituiscono quindi un riferimento inerziale. Di qui la seguente

DEFINIZIONE 3. Un **riferimento** è un campo vettoriale X sullo spazio-tempo N soddisfacente in ogni punto alla condizione di normalizzazione

$$(11) \quad \boxed{\langle X, \chi \rangle = 1}$$

Se il campo X è costante il riferimento si dice **inerziale** o **galileiano**. Le curve integrali del campo X rappresentano le storie delle particelle del riferimento.

In queste lezioni ci limitiamo a considerare solo riferimenti inerziali. Le storie degli osservatori di un riferimento inerziale formano, nello spazio-tempo, un fascio di rette parallele (Fig. 3.3).

PROPOSIZIONE 3. Sia X un riferimento inerziale. L'insieme N_X degli osservatori (cioè delle storie delle sue particelle) è uno spazio affine euclideo tridimensionale.

Dimostrazione. Nello spazio vettoriale E soggiacente allo spazio affine N si consideri la relazione di equivalenza generata da X ,

$$u \sim v \iff u - v = kX \quad (k \in \mathbb{R}).$$

ed il corrispondente spazio vettoriale quoziente $E_X = E/\{X\}$. Si denoti con $[v]_X$ la classe di equivalenza rappresentata dal vettore $v \in E$. Si consideri inoltre l'applicazione

$$\delta_X: N_X \times N_X \rightarrow E_X$$

definita da

$$\delta_X(o_1, o_2) = [P_1 P_2]_X, \quad \forall P_1 \in o_1, \forall P_2 \in o_2.$$

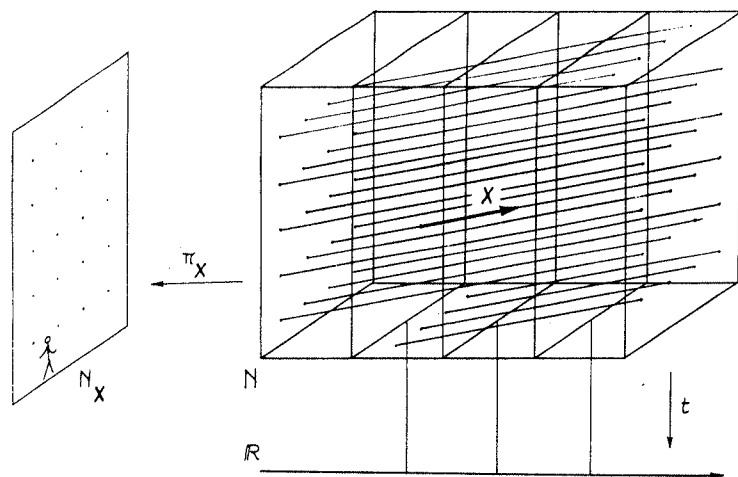


Fig. 3.3: un riferimento inerziale nello spazio-tempo.

Si verifica facilmente che questa definizione è ben data, cioè che il primo membro non dipende dalla scelta degli eventi P_1 e P_2 lungo le storie dei due osservatori o_1 e o_2 , e che inoltre l'applicazione δ_X soddisfa ai requisiti richiesti dalla definizione di spazio affine. Si ha dunque che la terna

$$(N_X, E_X, \delta_X)$$

è uno spazio affine. Inoltre sullo spazio vettoriale E_X si può definire un tensore metrico ponendo

$$|\delta_X(o_1, o_2)| = |P_1 P_2|, \quad \forall P_1 \in o_1, \forall P_2 \in o_2 \mid \langle P_1 P_2, \chi \rangle = 0.$$

Ciò significa che la distanza di due osservatori è uguale all'intervallo spaziale assoluto di due qualunque eventi contemporanei appartenenti alle loro rispettive storie. Lo spazio affine diventa allora euclideo. ■

Lo spazio affine N_X rappresenta lo spazio fisico osservato dal riferimento inerziale X . Sia $\pi_X: N \rightarrow N_X$ l'applicazione suriettiva che associa ad ogni evento $P \in N$ l'osservatore la cui storia contiene P . La

proposizione precedente mostra che con la scelta di un riferimento lo spazio-tempo si decompone, tramite l'applicazione biunivoca

$$\pi_X \times t: N \rightarrow N_X \times \mathbb{R}: P \mapsto (\pi_X(P), t(P)),$$

nel prodotto cartesiano dello spazio N_X e dell'asse reale dei tempi (Fig. 3.3).

Lo spazio vettoriale E_X è canonicamente isomorfo allo spazio E_0 perché ogni classe $[v]_X \in E_X$ ammette uno ed un solo rappresentante $v \in E_0$. Infatti, fissato un riferimento X , ogni vettore nello spazio-tempo può essere rappresentato, in maniera unica, come somma di un vettore parallelo a X e di un vettore spaziale, cioè appartenente a E_0 . Applichiamo questa rappresentazione agli enti vettoriali assoluti fin qui introdotti.

DEFINIZIONE 4. Diciamo **rappresentazione o decomposizione relativa** al riferimento X dell'intervallo assoluto PQ di due eventi la scrittura

$$(12) \quad \boxed{PQ = r + \theta X, \quad \langle r, \chi \rangle = 0}$$

Il vettore spaziale r prende il nome di **intervallo spaziale relativo** dei due eventi.

Si noti che, applicando all'uguaglianza (12) il covettore χ e tenendo conto della (3), si ottiene

$$(13) \quad t(P) - t(Q) = \theta.$$

Il numero θ che compare nella (12) è dunque l'intervallo temporale assoluto dei due eventi.

DEFINIZIONE 5. Sia $\sigma: I \rightarrow N$ la storia di una particella. Diciamo **moto relativo** al riferimento inerziale X della particella la curva $\sigma_X: I \rightarrow N_X$ proiezione della σ mediante la π_X :

$$\sigma_X = \pi_X \circ \sigma.$$

Diciamo **rappresentazione o decomposizione relativa** al riferimento X della **velocità assoluta** della particella la scrittura

$$(14) \quad \boxed{V = v + X, \quad \langle v, \chi \rangle = 0}$$

Il vettore spaziale $\mathbf{v}$ prende il nome di **velocità relativa** a $\mathbf{X}$ della particella.

Questa definizione richiede alcuni commenti. Si consideri una rappresentazione vettoriale $OP = \mathbf{R}(\tau)$ della storia σ riferita ad un punto $O \in N$. Per ogni valore del tempo proprio τ si può considerare la decomposizione relativa a $\mathbf{X}$ del vettore $\mathbf{R}(\tau)$:

$$(15) \quad \mathbf{R}(\tau) = \mathbf{r}(\tau) + \theta(\tau) \mathbf{X}, \quad \langle \mathbf{r}(\tau), \mathbf{X} \rangle = 0.$$

Il vettore $\mathbf{r}(\tau)$ fornisce la rappresentazione vettoriale relativa al riferimento $\mathbf{X}$ del moto della particella. Tenuto conto di quanto osservato in precedenza, lungo la storia della particella il tempo proprio τ si può identificare con il tempo assoluto t . Supposto che l'evento O sia tale che $t(O) = 0$ la (15) diventa allora

$$(16) \quad \mathbf{R}(t) = \mathbf{r}(t) + t \mathbf{X}, \quad \langle \mathbf{r}(t), \mathbf{X} \rangle = 0.$$

Derivando quest'uguaglianza rispetto a $t = \tau$, a primo membro si trova la velocità assoluta $\mathbf{V}$ e a secondo membro proprio l'espressione (14), posto che si abbia

$$(17) \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Quindi il vettore $\mathbf{v}$ che compare nella decomposizione (14) rappresenta proprio la velocità relativa al riferimento $\mathbf{X}$ della particella (Fig. 3.4).

Si consideri ora la presenza di due riferimenti inerziali $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}'$. Abbiamo, secondo quanto finora visto, due rappresentazioni tridimensionali dello spazio fisico, $N_{\mathbf{X}}$ e $N_{\mathbf{X}'}$. Questi due spazi affini sono del tutto *distinti*. Il collegamento tra questi due spazi avviene solo tramite lo spazio tempo N e le proiezioni $\pi_{\mathbf{X}}$ e $\pi_{\mathbf{X}'}$ (Fig. 3.5).

I vettori $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}'$ rappresentano le velocità assolute delle particelle dei due riferimenti fisici corrispondenti. Si può per esempio considerare la rappresentazione della velocità assoluta $\mathbf{X}'$ relativa al riferimento $\mathbf{X}$:

$$(18) \quad \boxed{\mathbf{X}' = \mathbf{v}_{tr} + \mathbf{X}}$$

Il vettore spaziale (costante) $\mathbf{v}_{tr}$ così determinato prende il nome di **velocità di trascinamento** del riferimento $\mathbf{X}'$ rispetto al riferimento $\mathbf{X}$: è infatti, secondo quanto affermato qui sopra, la velocità relativa a $\mathbf{X}$ delle particelle costituenti il riferimento $\mathbf{X}'$.

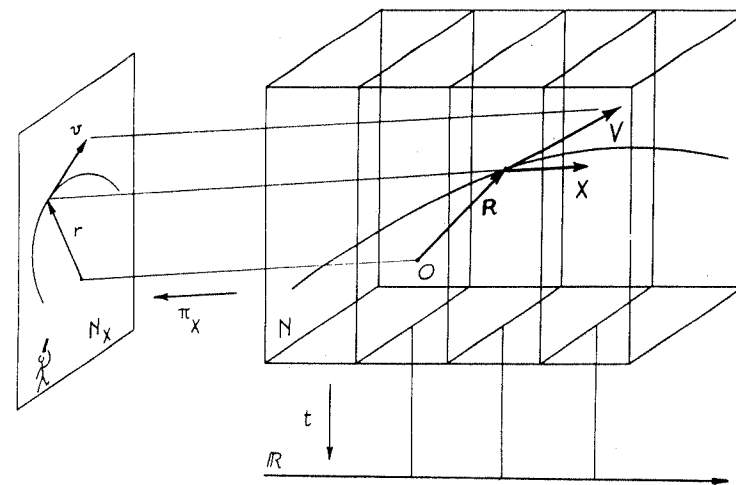


Fig. 3.4: la storia di una particella osservata da un riferimento.

Considerata allora la storia di una particella σ , la sua velocità assoluta $\mathbf{V}$ ammette due rappresentazioni relative ai due riferimenti:

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{X} = \mathbf{v}' + \mathbf{X}'.$$

Di qui, essendo per la (18)

$$\boxed{\mathbf{v}_{tr} = \mathbf{X}' - \mathbf{X}}$$

segue subito l'uguaglianza

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{tr}}$$

che esprime il **teorema dei moti relativi** (Fig. 3.5).

Si può considerare la rappresentazione relativa ad un generico riferimento inerziale $\mathbf{X}$ dell'accelerazione assoluta:

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} + \alpha \mathbf{X}, \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{X} \rangle = 0.$$

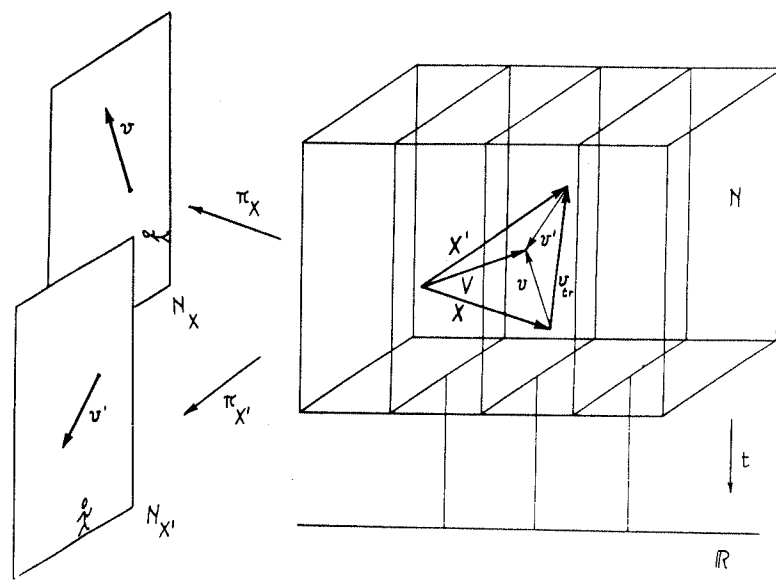


Fig. 3.5: il teorema dei moti relativi nello spazio-tempo.

Derivando la (14) si vede che essa si riduce semplicemente a

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

conformemente all'osservazione già fatta che essa è un vettore spaziale. Dunque l'accelerazione assoluta coincide con l'accelerazione relativa ad un qualunque riferimento inerziale. L'equazione dinamica assoluta (10) risulta quindi equivalente all'equazione relativa

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}.$$

Si noti che anche la forza, come l'accelerazione assoluta, è sempre un vettore spaziale.

4. Dinamica del punto vincolato

Un punto materiale, anziché essere libero di occupare qualunque posizione nello spazio e di assumere qualunque velocità, può essere soggetto a **vincoli di posizione** o a **vincoli di velocità**. Un vincolo di posizione può essere rappresentato da una superficie (fissa o mobile) oppure da una curva (fissa o mobile): al vettore posizione $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$ è imposto di soddisfare un'equazione del tipo

$$(1) \quad \varphi(\mathbf{r}, t) = 0,$$

rappresentante la superficie al tempo t , oppure una coppia di equazioni

$$(2) \quad \varphi_1(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \varphi_2(\mathbf{r}, t) = 0,$$

rappresentanti la curva al tempo t . Ogni **moto compatibile con il vincolo** deve essere rappresentato da una funzione $\mathbf{OP} = \mathbf{r}(t)$ soddisfacente identicamente la (1) o le (2). Affinché la (1) rappresenti una superficie regolare si richiede che la funzione φ abbia, per ogni istante t e per i punti soddisfacenti alla (1), gradiente non nullo. Analogamente, affinché le (2) rappresentino una curva regolare si richiede che le funzioni φ_1 e φ_2 abbiano, per ogni t e per i punti soddisfacenti alle (2), gradienti indipendenti.

Un vincolo di posizione rappresentato da un'uguaglianza del tipo (1) (superficie) è un **vincolo bilaterale**. Si possono considerare anche **vincoli unilaterali**, rappresentati da disuguaglianze del tipo $\varphi(\mathbf{r}, t) \geq 0$ (per esempio il caso del pendolo: il punto rappresentativo è vincolato a non occupare posizioni esterne ad una sfera di raggio pari alla lunghezza del filo, inestendibile ma flessibile, del pendolo).

Un vincolo di posizione implica sempre un vincolo di velocità, ma non viceversa. Per esempio per un punto vincolato ad una superficie di equazione (1) le velocità devono soddisfare alla condizione

$$(3) \quad \text{grad}(\varphi) \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

che è la scrittura sintetica dell'equazione

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

ottenuta derivando totalmente rispetto al tempo la rappresentazione in coordinate cartesiane (x^α) dell'equazione (1). Si ha conferma dalla (3)

che se il vincolo è fisso (il tempo t non compare esplicitamente nella funzione φ) allora la velocità è sempre tangente al vincolo. Si osservi che il vincolo di velocità (3) è lineare (non omogeneo) nella $\mathbf{v}$.

Dal punto di vista dinamico, conformemente al principio newtoniano secondo cui ogni azione che tende a rimuovere un punto dal suo stato naturale di moto rettilineo uniforme è una forza rappresentata da un vettore, si postula che il soddisfacimento del vincolo sia da attribuirsi alla presenza di una forza $\mathbf{F}_r$, detta **forza reattiva** o **reazione vincolare**.

In base a questo postulato, detto **postulato delle reazioni vincolari**, l'equazione della dinamica di un punto soggetto ad un vincolo diventa

$$(4) \quad \boxed{m \mathbf{a} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_r}$$

dove il vettore $\mathbf{F}_a$, detto **forza attiva**, rappresenta la somma di tutte le forze di natura non vincolare che agiscono sul punto.

Mentre della forza attiva $\mathbf{F}_a$ si postula una ben determinata dipendenza dalla posizione e velocità del punto (cioè una legge di forza, eventualmente dipendente dal tempo), la reazione vincolare è a priori un'incognita. Si sa soltanto, in base al postulato, che essa deve operare in modo tale da rendere sempre soddisfatto il vincolo. Alla reazione vincolare è tuttavia imposta una **condizione costitutiva** che traduce in un'equazione le caratteristiche fisiche del vincolo, cioè il tipo di forza reattiva che il vincolo è capace di esplicare.

La condizione costitutiva più semplice è quella di **vincolo liscio**, rappresentata dall'ortogonalità della reazione vincolare $\mathbf{F}_r$ al vincolo (curva o superficie). Si osservi che questa condizione traduce matematicamente il concetto intuitivo di assenza di attrito, ovvero di non dissipazione di potenza da parte del vincolo (almeno nel caso in cui questo è fisso). Infatti se la potenza reattiva $W_r = \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{v}$ è sempre nulla qualunque sia la velocità del punto, siccome questa è sempre tangente al vincolo (se questo è fisso), segue che $\mathbf{F}_r$ è ortogonale.

Esaminiamo in questo paragrafo la dinamica di un punto vincolato ad un vincolo liscio e fisso. Per la discussione del caso di un vincolo mobile è conveniente porsi in un contesto più generale (Cap. V).

La dinamica di un **punto vincolato ad un superficie liscia fissa**, per quanto sopra visto, è retta dal sistema di equazioni

$$(5) \quad \boxed{\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= 0, \\ m \mathbf{a} &= \mathbf{F}_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \lambda \text{grad}(\varphi) \end{aligned}}$$

composto dall'equazione della superficie (1), dall'equazione fondamentale (4) e dalla condizione costitutiva di vincolo liscio, che per il teorema del gradiente si può esprimere con l'uguaglianza

$$(6) \quad \mathbf{F}_r = \lambda \text{grad}(\varphi),$$

dove λ è un coefficiente di proporzionalità. Si tratta di un sistema differenziale del secondo ordine nell'incognita $\mathbf{r}(t)$ contenente un'incognita ausiliaria $\lambda(t)$, detta **moltiplicatore di Lagrange**. La discussione di questo sistema (riportata in appendice al paragrafo) porta alla conclusione seguente: *comunque si fissino la posizione e la velocità iniziali del punto, compatibili con il vincolo, esiste un'unica soluzione $(\mathbf{r}(t), \lambda(t))$ del sistema (5).*

Un metodo alternativo alle equazioni (5) consiste nel decomporre l'equazione fondamentale (4) nella sua parte tangente e nella sua parte ortogonale alla superficie. Ricordiamo a questo proposito (si veda il §3, Cap. III) che l'accelerazione è decomponibile nella somma

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{(i)} + \mathbf{a}_{(N)}$$

dove $\mathbf{a}_{(i)}$ è la parte tangente (l'accelerazione intrinseca) e $\mathbf{a}_{(N)}$ è la parte ortogonale. Quest'ultima risulta essere data da

$$\mathbf{a}_{(N)} = \mathbf{B}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \mathbf{N},$$

dove $\mathbf{B}$ è la seconda forma fondamentale ed $\mathbf{N}$ è un versore ortogonale alla superficie. La condizione di vincolo liscio si esprime semplicemente nell'uguaglianza

$$\mathbf{F}_r = R \mathbf{N}.$$

Decomposta anche la forza attiva nella somma

$$(7) \quad \mathbf{F}_a = \mathbf{F} + F_N \mathbf{N} \quad (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = 0)$$

della sua parte tangente $\mathbf{F}$ e della sua parte ortogonale alla superficie $F_N \mathbf{N}$, l'equazione (4) risulta allora decomposta nelle due equazioni

$$(8) \quad \boxed{\begin{aligned} m \mathbf{a}_{(i)} &= \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \\ m \mathbf{B}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= F_N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + R \end{aligned}}$$

È importante osservare che la prima delle equazioni (8) non coinvolge la reazione vincolare e permette da sola la determinazione dei moti.

La seconda invece, una volta che sia determinato il moto, consente di calcolare la funzione $R(t)$ e quindi la reazione vincolare.

Se si considerano coordinate (q^i) sulla superficie ($i = 1, 2$), ricordate le espressioni delle componenti dell'accelerazione intrinseca e posto

$$(9) \quad \mathbf{F} = F^i \mathbf{E}_i,$$

si vede che la prima delle equazioni (8) risulta equivalente al seguente sistema del primo ordine:

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = v^i \\ \frac{dv^i}{dt} = -\Gamma_{hj}^i v^h v^j + \frac{1}{m} F^i(q^j, v^j, \tau), \\ \frac{d\tau}{dt} = 1, \end{cases} \quad (h, i, j = 1, 2)$$

ovvero, se le forze attive non dipendono dal tempo, al sistema

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = v^i \\ \frac{dv^i}{dt} = -\Gamma_{hj}^i v^h v^j + \frac{1}{m} F^i(q^j, v^j). \end{cases} \quad (h, i, j = 1, 2)$$

OSSERVAZIONE 1. Il sistema (11) corrisponde ad un campo vettoriale $\mathbf{X}_L$ sopra lo spazio TQ dei vettori tangenti alla superficie Q rappresentante il vincolo, di coordinate (q^i, v^i) . Come vedremo, TQ è una *varietà differenziabile* di dimensione $2n$. Per il teorema di Cauchy esiste una ed una sola curva integrale massimale basata in un prefissato punto iniziale di TQ , vale a dire posizione e velocità iniziali del punto. Questa curva sarà localmente rappresentata da quattro equazioni parametriche, $q^i = q^i(t)$, $v^i = v^i(t)$, soluzioni del sistema (11). Le prime due, $q^i = q^i(t)$, forniscono il moto del punto.

OSSERVAZIONE 2. Se la forza attiva $\mathbf{F}_a$ è nulla si dice che il punto si muove di **moto spontaneo** sulla superficie: è soggetto alla sola reazione del vincolo. In tal caso l'equazione (8)₁ fornisce $\mathbf{a}_{(i)} = 0$. I moti spontanei su di una superficie sono quindi moti geodetici (si veda l'Oss. 2, §3, Cap. III).

OSSERVAZIONE 3. Nel caso di un punto vincolato ad una superficie l'energia cinetica è data da

$$(12) \quad T = \frac{1}{2} m A_{ij} v^i v^j,$$

dove le (A_{ij}) , funzioni delle coordinate (q^i) , sono le componenti della prima forma fondamentale. Infatti: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^i v^j \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j = v^i v^j A_{ij}$. Le equazioni di moto di un punto vincolato ad una superficie liscia possono anche costruirsi, con un procedimento diretto, partendo dalla conoscenza dell'energia cinetica e delle cosiddette **forze lagrangiane**:

$$(13) \quad \phi_i = \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{E}_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{E}_i.$$

Si dimostra infatti, in un contesto più generale (Cap. V), che le funzioni $q^i(t)$ ($i = 1, 2$) rappresentanti il moto di un punto su di una superficie liscia soddisfano alle **equazioni di Lagrange**

$$(14) \quad \boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} = \phi_i \quad (i = 1, 2)}$$

posto

$$v^i = \frac{dq^i}{dt}.$$

OSSERVAZIONE 4. Le considerazioni svolte nell'ultima parte del §2, riguardanti gli integrali primi tipici associati alle grandezze cinetiche fondamentali, possono estendersi al caso di un punto vincolato ad una superficie. Omettendo la discussione dettagliata, consideriamo solo tre esempi. (I) Se il vincolo e la forza attiva sono tali che la somma $\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_r$ è un vettore sempre diretto verso una retta fissa sussiste l'integrale primo del momento assiale. (II) Se la superficie è liscia e fissa e la forza attiva è conservativa sussiste l'integrale primo dell'energia. (III) In quest'ultimo caso la restrizione del potenziale U alla superficie si rappresenta con una funzione $U(q^i)$ delle coordinate della superficie. Le forze lagrangiane risultano allora date da

$$(15) \quad \boxed{\phi_i = \frac{\partial U}{\partial q^i}}$$

Per riconoscerlo basta calcolare la potenza della forza attiva $W_a = \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{v}$. Da un lato si ha

$$W_a = \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{v}^i \mathbf{E}_i = \phi_i v^i.$$

Dall'altro

$$W_a = \frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial q^i} v^i.$$

OSSERVAZIONE 5. La dinamica di un **punto vincolato ad una curva liscia fissa** può essere trattata proiettando l'equazione fondamentale (4) sul triedro fondamentale della curva $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ (§12, Cap. II; §1, Cap. III). Poiché l'accelerazione è suscettibile della decomposizione intrinseca

$$\mathbf{a} = \ddot{s} \mathbf{t} + c \dot{s}^2 \mathbf{n},$$

posto

$$\mathbf{F}_a = F_{at} \mathbf{t} + F_{an} \mathbf{n} + F_{ab} \mathbf{b}, \quad \mathbf{F}_r = F_{rn} \mathbf{n} + F_{rb} \mathbf{b}$$

(si noti che la condizione di vincolo liscio si esprime nell'annullarsi della componente tangente alla curva della reazione vincolare) l'equazione fondamentale (4) risulta decomposta nel sistema di equazioni

$$(16) \quad \begin{cases} m \ddot{s} = F_{at}(s, \dot{s}, t), \\ m c \dot{s}^2 = F_{an}(s, \dot{s}, t) + F_{rn}, \\ 0 = F_{ab}(s, \dot{s}, t) + F_{rb}. \end{cases}$$

dette **equazioni intrinseche del moto**. La prima non coinvolge la reazione vincolare e quindi consente di determinare completamente il moto. Essa infatti è un'equazione differenziale del secondo ordine nella funzione incognita $s(t)$. Noto il moto, la seconda consente di calcolare la reazione normale F_{rn} e la terza la reazione binormale F_{rb} , sicché tutti gli elementi incogniti risultano completamente determinati.

OSSERVAZIONE 6. Vale anche per il punto vincolato ad una curva un'osservazione analoga all'Oss. 4. In questo caso però si può affermare che nel caso di una forza attiva posizionale, qualunque essa sia, sussiste sempre l'integrale primo dell'energia. Infatti la prima equazione intrinseca diventa

$$m \ddot{s} = F_{at}(s)$$

e se si considera una qualunque primitiva $U(s)$ della funzione $F_{at}(s)$ risulta:

$$W_a = \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{v} = F_{at} \dot{s} = \frac{dU}{ds} \dot{s} = \frac{dU}{dt}.$$

Sicché dal teorema dell'energia

$$W_a + W_r = \frac{dT}{dt},$$

essendo $W_r = 0$ per l'ipotesi del vincolo liscio, segue

$$\frac{d}{dt}(T - U) = 0.$$

OSSERVAZIONE 7. Nel caso presente l'energia cinetica è data da

$$T = \frac{1}{2} m \dot{s}^2.$$

Sussistendo l'integrale primo dell'energia, si ha dunque

$$(17) \quad \frac{1}{2} m \dot{s}^2 - U(s) = h,$$

dove h è la costante dell'energia. Posto allora

$$f(s) = \frac{1}{m} F_{at}(s), \quad \Phi(s) = \frac{2}{m} (h + U(s)),$$

l'equazione di moto (16)₁ e l'integrale dell'energia (17) assumono rispettivamente la forma:

$$(18) \quad \ddot{s} = f(s), \quad \dot{s}^2 = \Phi(s).$$

Si osservi che $\Phi(s)$ è una primitiva di $2f(s)$. I legami fra queste due equazioni differenziali sono esaminati nel prossimo paragrafo.

Discussione del sistema di equazioni (5). Si consideri lo spazio $T\mathcal{A}_3 \simeq \mathbb{R}^6$ dei vettori applicati dello spazio affine euclideo tridimensionale $\mathcal{A}_3$, cioè delle coppie di vettori $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, di coordinate (x^α, v^α) . Sia $Q \subset \mathcal{A}_3$ la superficie di vincolo di equazione $\varphi(x^\alpha) = 0$. Sia $TQ \subset T\mathcal{A}_3$

l'insieme dei vettori tangenti alla superficie Q . Un vettore è tangente alla superficie se e solo se è applicato in un punto di questa ed inoltre è ortogonale a $\text{grad}(\varphi)$. Pertanto TQ è il sottoinsieme di $TA_3 \simeq \mathbb{R}^6$ definito dalle due equazioni

$$(19) \quad \varphi(\mathbf{r}) = 0, \quad \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \equiv \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\varphi) = 0.$$

Poiché la matrice 2×6 delle derivate parziali

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} & \frac{\partial \varphi}{\partial v^\alpha} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} & \frac{\partial \psi}{\partial v^\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} & 0 \\ v^\beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} & \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \end{pmatrix}$$

ha rango massimo (le derivate $\partial \varphi / \partial x^\alpha$, componenti del gradiente, non si annullano mai simultaneamente per l'ipotesi di regolarità della superficie Q) le equazioni (19) definiscono TQ come superficie regolare di codimensione 2 in $\mathbb{R}^6$. Introdotta la forma quadratica associata all'hessiano della funzione φ ,

$$\Phi(\mathbf{v}) = v^\alpha v^\beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\alpha \partial x^\beta},$$

si può affermare che

PROPOSIZIONE 1. I moti $\mathbf{r}(t)$ di un punto vincolato ad una superficie liscia fissa, cioè le soluzioni del sistema (5), sono la prima componente di tutte e sole le curve integrali $(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t))$ basate in punti di TQ del sistema dinamico $\mathbf{X}$ su TA_3 di equazioni

$$(20) \quad \begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{m} \mathbf{F}_a - \left(\frac{1}{m} \mathbf{F}_a \cdot \text{grad}(\varphi) + \Phi(\mathbf{v}) \right) \frac{\text{grad}(\varphi)}{|\text{grad}(\varphi)|^2}. \end{cases}$$

In corrispondenza a tali curve integrali il moltiplicatore di Lagrange $\lambda(t)$ è dato da

$$(21) \quad \lambda = - \frac{m \Phi(\mathbf{v}) + \mathbf{F}_a \cdot \text{grad}(\varphi)}{|\text{grad}(\varphi)|^2}.$$

Dimostrazione. Si moltiplichino scalarmente la (5)₂ per $\text{grad}(\varphi)$ in modo da risolverla rispetto a λ . Tenuto conto che per ogni moto compatibile col vincolo si ha $\mathbf{v} \cdot \text{grad}(\varphi) = 0$, quindi che

$$(22) \quad \mathbf{a} \cdot \text{grad}(\varphi) = -\mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \text{grad}(\varphi) = -\Phi(\mathbf{v}),$$

si trova la (21). Sostituendo la (21) nella stessa (5)₂ si vede che le soluzioni del sistema (5) soddisfano al sistema (20). Viceversa, osservato che per ogni curva su TA_3 si ha

$$(23) \quad \psi = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \text{grad}(\varphi) + \Phi(\mathbf{v}),$$

si consideri una curva integrale del sistema (20) basata in un punto di TQ . In virtù della (20)₂ si ha per la (23)₂ $\dot{\psi} = 0$, quindi $\psi = \text{costante}$, anzi $\psi = 0$ perché così è inizialmente. Dalla (23)₁ segue allora $\varphi = \text{costante}$, anzi $\varphi = 0$ perché così è inizialmente. Pertanto ogni curva integrale del sistema (20) basata in TQ giace tutta su TQ (vale a dire: il campo vettoriale $\mathbf{X}$ è tangente a TQ). Una tale curva, per il modo con cui si è costruita l'equazione (20)₂, è soluzione del sistema (5). ■

Si noti come questo metodo (del moltiplicatore di Lagrange) sia in linea di principio più complesso rispetto a quello della decomposizione ortogonale-tangente dell'equazione della dinamica, se non altro perché richiede l'integrazione di un sistema di sei equazioni differenziali anziché di quattro.

5. L'equazione di Weierstrass

Data un'equazione differenziale del secondo ordine del tipo

$$(1) \quad \boxed{\ddot{x} = f(x)}$$

che è equivalente al sistema del primo ordine

$$(1') \quad \begin{cases} \dot{x} = v, \\ \dot{v} = f(x), \end{cases}$$

alcune particolari proprietà delle sue soluzioni $x(t)$ sono deducibili dall'analisi dell'equazione differenziale del primo ordine

$$(2) \quad \boxed{\dot{x}^2 = \Phi(x)}$$

dove $\Phi(x)$ è una primitiva di $2f(x)$:

$$(3) \quad \Phi'(x) = 2f(x).$$

Si suppone che la funzione $f(x)$ sia definita e continua in un intervallo reale (anche illimitato). Esistono allora le primitive e vale il teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni del sistema (1').

Chiamiamo **equazione di Weierstrass** (Karl Weierstrass, 1815 - 1897) un'equazione del tipo (2). Nell'analisi dell'equazione di Weierstrass giocano un ruolo essenziale gli zeri della funzione $\Phi(x)$ a secondo membro. Infatti, interpretate le soluzioni $x(t)$ della (2) come moti di un punto su di un asse x , questi devono avvenire in intervalli dell'asse x in cui il secondo membro non è negativo: $\Phi(x) \geq 0$, intervalli che sono appunto delimitati dagli zeri della $\Phi(x)$. Questi zeri sono inoltre **posizioni di arresto** del punto, cioè posizioni in cui il punto ha necessariamente velocità nulla. Occorre anche subito osservare che, presa a se stante, l'equazione di Weierstrass (2), che è del primo ordine, può non soddisfare alle ipotesi di lipschitzianità del teorema di Cauchy, anche nel caso in cui funzione $\Phi(x)$ sia di classe C^∞ . Per esempio l'equazione $\dot{x}^2 = x$ (vale a dire il caso $\Phi(x) = x$) con la condizione iniziale $t = 0, x_0 = 0$, ammette due soluzioni: $x(t) = 0$ e $x(t) = \frac{1}{4}t^2$. L'equazione (2) va dunque considerata come equazione ausiliaria associata all'equazione fondamentale (1) o al sistema (1') per il quale, nell'ipotesi di continuità della $f(x)$ in cui ci poniamo, vale incondizionatamente il teorema di esistenza ed unicità di Cauchy. Il legame tra le due equazioni è il seguente:

PROPOSIZIONE 1. Una soluzione della (1) (ovvero del sistema (1')) associata alle condizioni iniziali (x_0, v_0) è soluzione della (2) dove Φ è quella primitiva di $2f$ tale che

$$(4) \quad v_0^2 = \Phi(x_0).$$

Dimostrazione. Si osserva che

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 - \Phi(x)) = 2\dot{x}\ddot{x} - \Phi'(x)\dot{x} = 2\dot{x}(\ddot{x} - f(x)) = 0,$$

per cui la funzione $\dot{x}^2 - \Phi(x)$ è un integrale primo dell'equazione differenziale (1), quindi costante lungo le sue soluzioni. Pertanto se vale inizialmente la (4) si ha sempre $\dot{x}^2 - \Phi(x) = 0$. ■

È importante notare che l'insieme delle soluzioni della (1) e l'insieme delle soluzioni della (2) sono invarianti rispetto a traslazioni temporali ed a inversioni temporali: se $x(t)$ è una soluzione anche $x(t+c)$ e $x(-t)$ sono soluzioni.

Si consideri dapprima il caso in cui il punto ha per $t = 0$ velocità nulla, $v_0 = 0$, cioè il caso in cui $\Phi(x_0) = 0$: la posizione iniziale è uno zero della Φ . Distinguiamo due sottocasi.

$$\Phi(x_0) = 0 \quad \begin{cases} f(x_0) \neq 0 & \text{(I)} \\ f(x_0) = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Nel primo caso (I) x_0 è uno zero semplice⁽¹⁾. Il punto lascia la posizione iniziale x_0 , perché la funzione costante $x(t) = x_0$ non può essere soluzione della (1) (si noti che però $x = x_0$ è soluzione della (2), per la quale, come si è osservato, può non valere il teorema di unicità). Il punto non può che abbandonare la posizione x_0 nella direzione in cui $\Phi(x) > 0$.

Nel secondo caso (II) x_0 è uno zero multiplo. La funzione costante $x(t) = x_0$ è questa volta soluzione della (1) ed è unica. Dunque il punto permane indefinitamente nella posizione iniziale x_0 . Uno zero multiplo della $\Phi(x)$ è pertanto una **posizione di equilibrio**.

Si consideri ora il caso in cui la velocità iniziale non è nulla, $v_0 \neq 0$, cioè $\Phi(x_0) > 0$. In questo caso $x(t)$ è monotona crescente o decrescente, per un intorno $t > 0$, a seconda che sia $v_0 > 0$ oppure $v_0 < 0$. Il punto si muoverà verso un primo zero x_1 della $\Phi(x)$ o verso un estremo x_1 del suo campo definizione, eventualmente $+\infty$ o $-\infty$.

Se x_1 è uno zero multiplo allora esso è una **meta asintotica** per il moto $x(t)$ nel senso che

$$\begin{cases} x(t) \neq x_1, & \forall t > 0, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_1. \end{cases}$$

In altre parole: il punto si avvicina indefinitamente alla posizione x_1 senza mai raggiungerla. Infatti la soluzione $x(t)$ è monotona e se raggiungesse x_1 ad un certo tempo t_1 , in x_1 avrebbe velocità nulla e violerebbe il teorema d'unicità perché, come si è visto nel caso (II), uno zero multiplo è posizione di equilibrio (si pensi di rifare il moto a ritroso nel tempo: inizialmente (cioè per $t = t_1$) il punto è in uno zero doppio x_1 ma lo abbandona: assurdo).

⁽¹⁾ Diciamo che x_0 è uno zero semplice di una funzione $\Phi(x)$ se in x_0 si annulla la funzione ma non la sua derivata prima: $\Phi(x_0) = 0$, $\Phi'(x_0) \neq 0$. È uno zero multiplo se invece si annulla anche la derivata prima: $\Phi(x_0) = \Phi'(x_0) = 0$.

tempo: inizialmente (cioè per $t = t_1$) il punto è in uno zero doppio x_1 ma lo abbandona: assurdo).

Se x_1 è uno zero semplice allora esso viene raggiunto dal punto in un tempo finito t_1 dato dall'integrale

$$(5) \quad t_1 = \pm \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}}$$

col segno + se $x_1 > x_0$ (cioè se $v_0 > 0$: $x(t)$ monotona crescente) o il segno - nel caso opposto. Infatti l'equazione (2) dà luogo all'equazione

$$dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}}$$

la cui integrazione, osservato che l'integrando ha segno costante, fornisce una funzione monotona

$$(6) \quad t(x) = \pm \int_{x_0}^x \frac{du}{\sqrt{\Phi(u)}},$$

funzione inversa della soluzione $x(t)$ considerata. Si noti che l'integrale (5) è improprio, perché l'integrando non è limitato per $x \rightarrow x_1$. Tuttavia è un integrale finito perché l'integrando è un infinito di ordine < 1 in quel punto, essendo questo uno zero semplice di Φ ⁽²⁾. Si osservi ancora

⁽²⁾ Data una funzione $F(x)$ continua in un intervallo $[x_0, x_1)$ ma non limitata in x_1 , si pone

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x) dx = \lim_{x \rightarrow x_0} \int_{x_0}^x F(u) du.$$

Dall'Analisi sappiamo che una condizione sufficiente perché questo limite sia finito è che la $F(x)$ abbia un *infinito di ordine* $r < 1$. Si dice che F ha un infinito di ordine $r > 0$ se esiste una costante positiva A tale che nell'intorno sinistro di x_1 vale la disuguaglianza

$$|F(x)| \leq A \frac{1}{(x_1 - x)^r}.$$

Nel caso presente è $F(x) = (\Phi(x))^{-\frac{1}{2}}$. Siccome $\Phi(x)$ ha uno zero semplice in x_1 , la funzione integranda $F(x)$ ha un infinito di ordine $r = \frac{1}{2}$.

che per $t > t_1$ il punto abbandona la posizione x_1 , per quanto visto nel caso (I), per ritornare a ripercorrere in senso contrario l'intorno di x_1 in cui Φ è positiva. Uno zero semplice si comporta quindi da **punto di riflessione**.

Se infine nella direzione in cui si muove inizialmente il punto non vi sono zeri della funzione $\Phi(x)$ il punto raggiunge un estremo x_1 del campo di definizione di questa funzione oppure vi tende asintoticamente a seconda che l'analogo integrale (5) sia finito oppure no.

Riassumiamo la discussione precedente nel quadro seguente:

x_1 zero della $\Phi(x)$ con cond. iniziali (x_0, v_0)	zero semplice	$\Leftrightarrow$ riflessione
	zero multiplo, $x_1 \neq x_0$	$\Leftrightarrow$ meta asintotica
	zero multiplo, $x_1 = x_0$	$\Leftrightarrow$ equilibrio

Si consideri per esempio il caso in cui la posizione iniziale x_0 è all'interno di un intervallo $I_0 = [x_1, x_2]$ delimitato da due zeri semplici successivi della funzione Φ (Fig. 5.1). Nell'intervallo aperto (x_1, x_2) la Φ non può che essere positiva (il punto non può che occupare punti in cui Φ è non negativa). Supposto $v_0 > 0$, il punto si muoverà per valori crescenti di x fino a raggiungere in un tempo finito lo zero x_2 dove si arresterà, per proseguire il moto in direzione opposta, cioè per valori decrescenti di x , fino a raggiungere in un tempo finito l'estremo sinistro x_1 dell'intervallo. Qui avrà un nuovo istante di arresto, invertirà il moto fino a ritrovarsi in x_0 con la stessa velocità iniziale v_0 , e tutto

Infatti uno zero semplice è di ordine 1, perché per il teorema di Lagrange, posto che $\Phi(x_1) = 0$, si ha per ogni x prossimo a x_1

$$\Phi(x) = \Phi'(\xi)(x - x_1)$$

con $x < \xi < x_1$. Siccome $\Phi'(x)$ è continua nell'intorno sinistro di x_1 e inoltre $\Phi'(x_1) \neq 0$, vale senz'altro una limitazione del tipo $|\Phi'(x)| \leq A$ con $A > 0$. Dunque dalla formula precedente segue che a sinistra di x_1 vale la limitazione

$$|\Phi(x)| \leq A(x_1 - x),$$

la quale mostra appunto che $\Phi(x)$ ha uno zero di ordine 1. Di conseguenza la radice $\sqrt{\Phi(x)}$ ha uno zero di ordine $\frac{1}{2}$ e quindi l'inversa un infinito di ordine $\frac{1}{2}$. Di qui la finitezza dell'integrale (5).

si ripeterà all'infinito. Pertanto il punto si muove nell'intervallo $[x_1, x_2]$ toccandone alternativamente gli estremi. Il moto è periodico e il periodo è dato dall'integrale

$$(7) \quad T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}}.$$

Infatti il tempo impiegato a percorrere l'intervallo in un verso o in quello opposto è lo stesso ed è dato dall'integrale (6) esteso a tale intervallo.

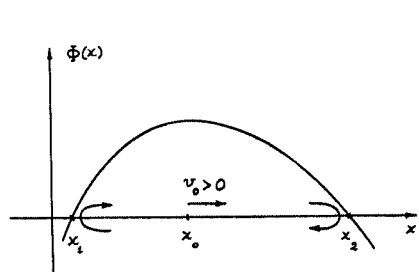


Fig. 5.1: due zeri semplici.

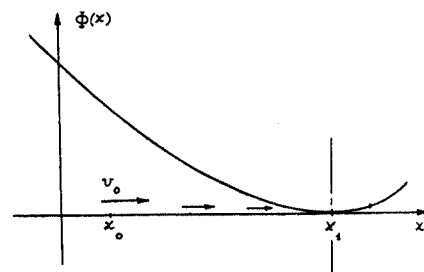


Fig. 5.2: zero multiplo.

Si consideri, altro esempio, il caso di uno zero multiplo x_1 illustrato dalla Fig. 5.2. Se il punto si muove inizialmente verso lo zero x_1 , continuerà a muoversi in quella direzione senza però mai raggiungere x_1 .

È infine importante notare che $\Phi(x)$ è una primitiva di $2F(x)$ dipendente dalle condizioni iniziali (x_0, v_0) . Quindi al variare di queste, la $\Phi(x)$ varia per una costante additiva. In altre parole il suo grafico subisce delle *traslazioni verticali* (cioè lungo l'asse y) al variare delle condizioni iniziali. Ciò consente, nota la $\Phi(x)$ per una coppia di condizioni iniziali, di avere un'idea globale di tutte le possibili distribuzioni degli zeri e quindi di tutti i tipi di moti, per *tutte* le condizioni iniziali.

6. Esempi notevoli di dinamica del punto.

Consideriamo in questo paragrafo alcuni classici esempi di applicazione della teoria svolta nei paragrafi precedenti.

6.1. Il moto dei gravi

Dalla Fisica sappiamo che la forza agente su di un punto materiale liberamente gravitante in prossimità della superficie terrestre, per tempi brevi e per piccoli spazi, preso come riferimento la Terra ma trascurate le forze apparenti (e la resistenza dell'aria), è rappresentabile da un vettore **costante** proporzionale alla massa gravitazionale del punto (che si identifica con la sua massa inerziale) e **verticale**, cioè ortogonale al piano **orizzontale** rappresentante localmente la superficie terrestre, e orientato "verso il basso". La legge di forza è cioè $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, dove $\mathbf{g}$ è un vettore costante, detto **accelerazione gravitazionale**. L'equazione differenziale del moto si riduce allora semplicemente a

$$(1) \quad \mathbf{a} = \mathbf{g} \quad (= \text{cost.}).$$

Con due integrazioni successive si ottengono i vettori velocità e posizione del punto in funzione del tempo:

$$(2) \quad \mathbf{v} = \mathbf{g}t + \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{r} = \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 + \mathbf{v}_0t + \mathbf{r}_0,$$

essendo $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ posizione e velocità iniziali. Le (2) mostrano che, com'è ben noto, il moto è piano (il piano del moto è verticale e determinato dalla posizione iniziale P_0 e dalla velocità iniziale $\mathbf{v}_0$) ed è la composizione di un moto rettilineo uniforme di velocità $\mathbf{v}_0$ e di un moto verticale uniformemente accelerato. Essendo $\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = 0$ con $\mathbf{u}$ versore orizzontale qualsiasi, sussiste l'integrale primo della quantità di moto secondo ogni direzione orizzontale: la parte orizzontale della velocità resta costante. Siccome la forza è conservativa, di potenziale

$$U = -mgz$$

(si scelgano assi cartesiani (x, y, z) con asse z verticale orientato verso l'alto), sussiste l'integrale primo dell'energia (diviso per la massa, costante)

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + gz = \text{cost.}$$

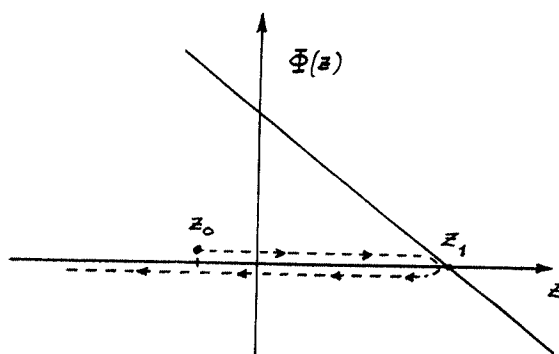


Fig. 6.1: la funzione di Weierstrass $\Phi(z)$ nel moto di un grave.

Siccome la quantità di moto orizzontale è costante, è anche costante la parte "orizzontale" dell'energia cinetica, sicché combinando i due integrali primi si ottiene un terzo integrale primo:

$$\frac{1}{2}\dot{z}^2 + gz = h, \quad h = \frac{1}{2}\dot{z}_0^2 + gz_0,$$

che può porsi nella forma di equazione di Weierstrass

$$\dot{z}^2 = \Phi(z), \quad \Phi(z) = 2(h - gz).$$

La funzione $\Phi(z)$ ha come grafico una retta (Fig. 6.1) e mette quindi in evidenza, qualunque sia la costante h , uno zero semplice z_1 rappresentante la quota massima raggiunta dal grave (se lanciato inizialmente verso l'alto)

$$z_1 = \frac{h}{g} = \frac{1}{2} \frac{\dot{z}_0^2}{g} + z_0.$$

La quota massima è raggiunta in un tempo finito

$$t_1 = \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{2(h - gz)}} = \frac{\dot{z}_0}{g}.$$

6.2. Il pendolo semplice

S'intende comunemente per **pendolo** un corpo pesante collegato con un filo inestendibile ad un punto fisso O e per il resto libero di muoversi sotto l'influenza della gravità. Si tratta di un sistema meccanico schematizzabile in prima approssimazione in un punto materiale (P, m) vincolato ad una sfera di centro O e raggio l pari alla lunghezza del filo, supposto che questo resti sempre teso, o meglio che esso sia in realtà costituito da un'asticciola rigida di massa trascurabile. Se si trascurano gli attriti dovuti alle articolazioni tra corpo, asta e punto fisso, nonché all'aria, il vincolo è da ritenersi liscio: la forza reattiva $\mathbf{F}_r$ è ortogonale alla sfera e rappresenta la forza che il filo esercita sul punto P (la sua intensità è la *tensione* del filo). Se il riferimento scelto è quello terrestre, per moti di breve durata e a bassa velocità si può trascurare la forza di Coriolis, sicché la forza attiva si riduce alla sola forza peso, la quale può ritenersi costante perché le dimensioni del pendolo sono trascurabili rispetto alla sfera terrestre. Il modello così costruito prende il nome di **pendolo sferico**. Se invece si vuol tener conto della forza di Coriolis, si ottiene il classico **pendolo di Foucault**.

Se la velocità $\mathbf{v}_0$ del punto è nulla oppure appartiene al piano verticale contenente P_0 e O , allora il moto avviene in questo piano. Per dimostrarlo si può osservare che sussiste l'integrale primo del momento assiale della quantità di moto $OP \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = \text{cost.}$, con $\mathbf{k}$ versore verticale, perché il vettore forza a secondo membro della (1) è sempre diretto verso la retta verticale passante per O (oppure, quando $\mathbf{F}_r = 0$, parallela a questa). Questa quantità rappresenta la velocità areale del punto P_* , proiezione del punto P su di un piano orizzontale (ortogonale a $\mathbf{k}$). Se è nulla all'inizio, essa è sempre nulla, quindi il moto avviene in un piano verticale.

Il caso particolare ora considerato giustifica lo studio del **pendolo semplice**, costituito da un punto pesante vincolato ad una circonferenza verticale (cioè giacente su di un piano parallelo al campo di forza costante $m\mathbf{g}$).

Si considerino assi cartesiani (x, z) aventi origine in O , con z verticale orientato verso il basso, di versori $(\mathbf{i}, \mathbf{k})$ rispettivamente. Conviene anche considerare l'angolo ϑ compreso tra OP e l'asse z (vedi Fig. 6.2). Il potenziale della forza peso è

$$U = mgz.$$

Quindi la sua restrizione alla circonferenza è

$$U = mgl \cos \vartheta.$$

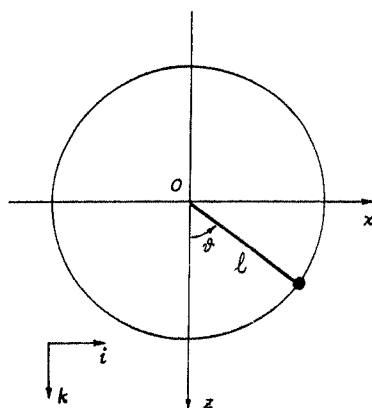


Fig. 6.2: il pendolo semplice.

L'integrale primo dell'energia

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\vartheta}^2 - mgl \cos \vartheta = h$$

produce un'equazione di Weierstrass:

$$\dot{\vartheta}^2 = \Phi(\vartheta), \quad \Phi(\vartheta) = 2 \left(\frac{h}{ml^2} + \frac{g}{l} \cos \vartheta \right).$$

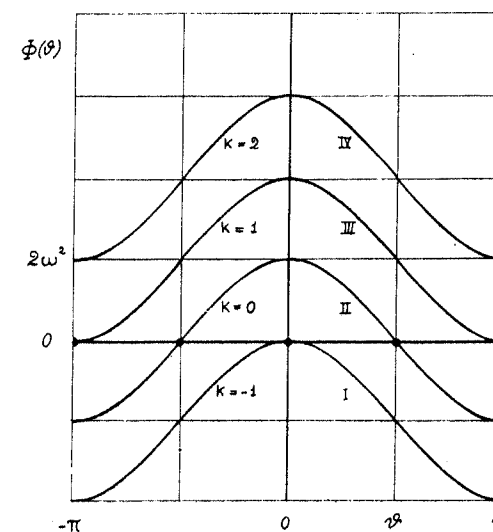
Posto

$$\omega^2 = \frac{g}{l}, \quad k = \frac{h}{mgl},$$

risulta

$$\Phi(\vartheta) = 2\omega^2(k + \cos \vartheta).$$

Si riconoscono di qui immediatamente tutti i possibili stati dinamici del pendolo semplice (si veda la Fig. 6.3, dove gli assi verticali $\vartheta = \pm\pi$ si devono pensare identificati: la funzione di Weierstrass si deve infatti, in questo caso, pensare definita non su $\mathbb{R}$ ma sulla circonferenza $\mathbb{S}_1$).

Fig. 6.3: la funzione di Weierstrass $\Phi(\vartheta)$ del pendolo semplice.

(I) Se $k = -1$, si ha uno zero doppio per $\vartheta = 0$: è uno stato di equilibrio. L'equilibrio è *stabile* (una definizione rigorosa di stabilità sarà data più avanti nel corso) perché per piccole variazioni di k (che per la sua stessa definizione non può mai essere < -1 , verificarlo) questo zero doppio si modifica in un intervallino compreso tra due zeri semplici, quindi lo stato di equilibrio si modifica in un moto periodico (piccole oscillazioni nell'intorno della posizione di equilibrio stabile).

(II) Se $-1 < k < 1$, si hanno due zeri semplici ϑ_1 e ϑ_2 simmetrici rispetto a $\vartheta = 0$: il pendolo oscilla tra questi due estremi con moto periodico.

(III) Se $k = 1$, si ha uno zero doppio $\vartheta = \pm\pi$, che corrisponde alla sommità del pendolo. Questa può essere una posizione di equilibrio, se il pendolo è inizialmente in questa posizione (l'equilibrio però non è stabile, perché piccole variazioni di k producono stati dinamici radicalmente diversi dalle piccole oscillazioni, vedi caso precedente e caso seguente) oppure una meta asintotica.

(IV) Se $k > 1$, la funzione di Weierstrass è sempre positiva, non vi sono zeri: il pendolo non si arresta mai, ruotando sempre nello stesso verso con moto periodico.

Consideriamo le equazioni intrinseche del moto. Tenuto conto di quanto già visto per il triedro fondamentale di una circonferenza e del fatto che $s = l\vartheta$, $\mathbf{g} \cdot \mathbf{t} = -g \sin \vartheta$, $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = -g \cos \vartheta$, si ottengono in definitiva le equazioni

$$\begin{cases} l\ddot{\vartheta} = -g \sin \vartheta, \\ ml\dot{\vartheta}^2 = -mg \cos \vartheta + F_{rn}, \\ 0 = F_{rb}. \end{cases}$$

La prima è l'equazione del pendolo:

$$\ddot{\vartheta} + \omega^2 \sin \vartheta = 0, \quad \omega^2 = \frac{g}{l}.$$

Nel caso di piccole oscillazioni l'approssimazione $\vartheta \simeq \sin \vartheta$ produce l'equazione del moto armonico:

$$\ddot{\vartheta} + \omega^2 \vartheta = 0.$$

La seconda equazione intrinseca consente di calcolare la reazione vincolare $\mathbf{F}_r$ che è tutta diretta secondo il versore normale $\mathbf{n}$. Se si tien conto anche dell'integrale primo dell'energia si trova a conti fatti che

$$F_{rn} = m(l\dot{\vartheta}_0^2 - 2g \cos \vartheta_0 + 3g \cos \vartheta).$$

Questa formula esprime quindi la tensione del filo, nota la sua posizione istantanea, la sua posizione iniziale e la sua velocità iniziale. Le eventuali posizioni in cui F_{rn} si annulla sono possibili punti di distacco del punto dalla circonferenza.

6.3. Moto di un punto in un campo centrale simmetrico

Un campo di forza $\mathbf{F}(P)$ è detto **campo centrale** se esiste un punto O , detto **centro del campo**, tale che $\mathbf{F}(P)$ è parallelo al vettore OP . Il campo $\mathbf{F}$ ammette in questo caso una rappresentazione del tipo

$$\mathbf{F} = F \mathbf{u},$$

dove $\mathbf{u}$ è il versore di OP ed F è un campo scalare (l'intensità della forza). Più in particolare un campo centrale è detto **simmetrico** o a **simmetria sferica** se la sua intensità F è funzione della sola distanza r dal centro O :

$$\mathbf{F} = F(r) \mathbf{u}.$$

Un tale campo è conservativo: una qualunque primitiva $U(r)$ di $F(r)$ è un potenziale (si veda il §11.2, Cap. II). Per la dinamica di un punto materiale mobile in un campo centrale simmetrico sussistono quindi due integrali primi: l'integrale primo del momento della quantità di moto (o delle aree, vedi §2) e l'integrale primo dell'energia. I moti sono centrali di centro O (perché $\mathbf{a} \times \mathbf{r} = 0$), quindi piani. Il piano del moto è individuato dal punto O e dai vettori posizione e velocità iniziali $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$. Se su questo piano si considerano coordinate polari (r, ϑ) di centro il punto O allora i due integrali primi si traducono nelle uguaglianze

$$(1) \quad \begin{cases} r^2 \dot{\vartheta} = c, \\ \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2) - U(r) = h, \end{cases}$$

dove c è la costante delle aree e h la costante dell'energia. Fissata la costante delle aree, che supponiamo non nulla (quindi è anche $r \neq 0$), dalla $(1)_1$ si ricava

$$(2) \quad \dot{\vartheta} = \frac{c}{r^2},$$

e quindi dalla $(1)_2$

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 - U(r) + \frac{1}{2} m \frac{c^2}{r^2} = h.$$

Quest'equazione, che coinvolge solo la variabile r e la sua derivata prima, assume la forma di equazione di Weierstrass

$$(3) \quad \dot{r}^2 = \Phi(r)$$

ponendo

$$(4) \quad \Phi(r) = \frac{2}{m} (U(r) + h) - \frac{c^2}{r^2}.$$

D'altra parte, ricordata l'espressione dell'accelerazione in coordinate polari, l'equazione fondamentale della dinamica $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ si riduce all'equazione scalare

$$\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{m} F(r)$$

e quindi, ancora per la (2), all'equazione

$$(5) \quad \ddot{r} = \frac{c^2}{r^3} + \frac{1}{m}F(r).$$

Questa è l'equazione differenziale del secondo ordine del tipo $\ddot{r} = f(r)$, a cui è associata l'equazione di Weierstrass (3) con $\Phi(r)$ primitiva di $2f$. Queste sono le equazioni del **moto radiale**, cioè del moto del punto lungo la retta che lo congiunge al centro del campo. Questa retta ruota con velocità angolare data dalla (2). Possiamo allora applicare al moto radiale la discussione vista al §5. Consideriamo a titolo di esempio tre casi significativi.

(I) Ad uno zero multiplo r_1 di Φ corrisponde un'orbita circolare. Questa è effettivamente percorsa se inizialmente è proprio $r_0 = r_1$. In caso contrario è un'orbita limite perché r_1 è una meta asintotica (se per esempio $r_0 < r_1$ e $\dot{r}_0 > 0$, come in Fig. 6.4).

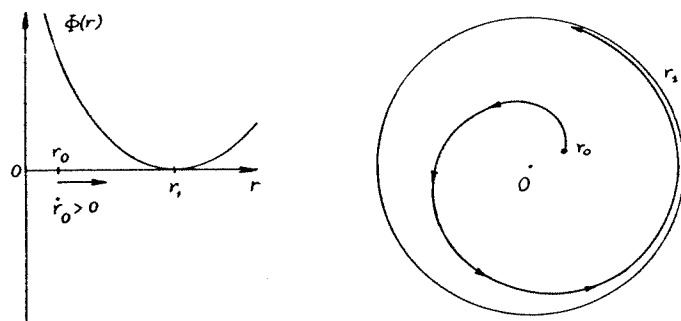


Fig. 6.4: orbita limite circolare.

(II) Se la funzione $\Phi(r)$ ha un unico zero semplice r_1 ed è positiva per $r > r_1$, allora l'orbita è illimitata, tangente alla circonferenza di raggio r_1 in un punto P_1 e simmetrica rispetto alla retta OP_1 (Fig. 6.5).

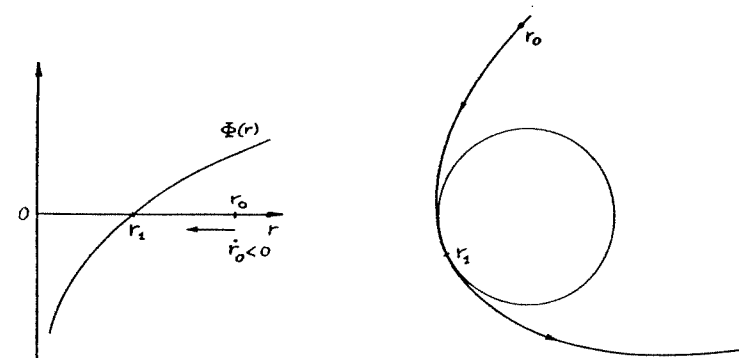


Fig. 6.5: orbita illimitata.

(III) Se $r_1 < r_2$ sono due zeri semplici successivi, estremi di un intervallo in cui Φ è positiva, allora l'orbita del punto è tutta interna alla corona circolare delimitata dalle circonferenze di raggio r_1 e r_2 e tocca alternativamente tali circonferenze in punti detti rispettivamente **apocentri** e **pericentri**, formanti due successioni, $(a_1, a_2, \dots)$ e $(p_1, p_2, \dots)$, le cui anomalie, misurate sempre nel medesimo verso, differiscono per multipli interi di un angolo ϑ_* (Fig. 6.6, 6.7). Sebbene il moto radiale sia periodico, in genere non è periodico il moto del punto. Affinché lo sia (e quindi l'orbita sia chiusa, Fig. 6.6) è necessario e sufficiente che la successione degli apocentri (o dei pericentri) sia ciclica, cioè l'angolo ϑ_* sia commensurabile con π . Se così non è (Fig. 6.7) la successione sugli apocentri è densa sulla circonferenza di raggio r_2 e di conseguenza, come si può dimostrare, l'orbita è densa nella corona circolare; in questo caso si dice che il moto è **quasi-periodico**: comunque si fissi un punto della corona circolare, un suo qualunque intorno ha intersezione non vuota con l'orbita.

A questo proposito è naturale chiedersi per quali potenziali l'angolo ϑ_* è sempre commensurabile con π e quindi le orbite al finito sono sempre chiuse. La risposta è data dal seguente classico **teorema di**

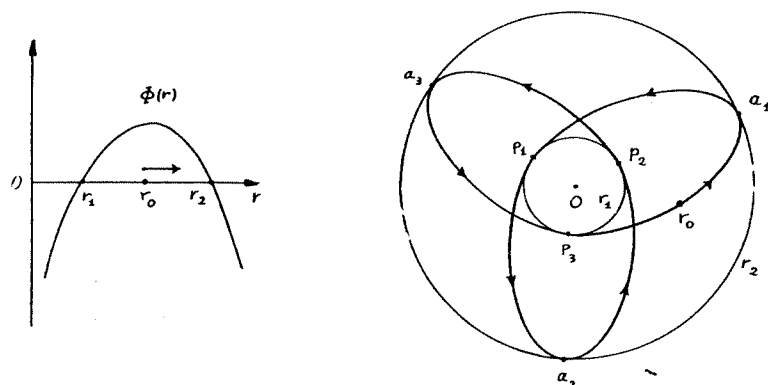


Fig. 6.6: orbita periodica.

Bertrand (Joseph Louis François Bertrand, 1822-1900), di non immediata dimostrazione.

TEOREMA. In un campo centrale simmetrico le orbite al finito sono sempre chiuse se e solo se il potenziale $U(r)$ è del tipo

$$U = -kr^2$$

oppure del tipo

$$U = \frac{k}{r}$$

con $k > 0$.

Si tratta rispettivamente del potenziale di una forza elastica di origine in O (oscillatore armonico piano) e del potenziale di un campo newtoniano. Per questi potenziali le orbite al finito sono ellittiche (per il secondo, sono tutte al finito).

Ritornando al caso generale, va osservato che dalla (3) si trae l'equazione differenziale

$$(6) \quad dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\Phi(r)}}$$

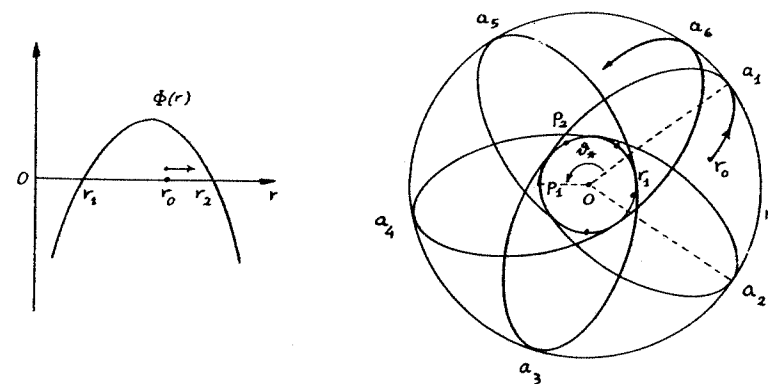


Fig. 6.7: orbita quasi-periodica.

il cui segno va scelto concorde a $\dot{r}_0$ e la cui integrazione determina la funzione

$$(7) \quad t(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}}.$$

Questa è invertibile nella funzione $r(t)$ che fornisce il moto radiale. Dalla (2) e dalla (6) (con per esempio il segno $+$) si ricava l'equazione differenziale

$$(8) \quad d\vartheta = \frac{c}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{\Phi(r)}}$$

la cui integrazione fornisce, assegnata l'anomalia iniziale ϑ_0 , una funzione $\vartheta(r)$, invertibile in una funzione $r = r(\vartheta)$ rappresentatrice dell'orbita (in coordinate polari). Ritornando al caso (III) si osserva in particolare che l'angolo ϑ_* compreso tra un pericentro e un apocentro successivi è dato dall'integrale della (8) tra i limiti r_1 ed r_2 , zeri semplici della $\Phi(r)$:

$$(9) \quad \vartheta_* = c \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{\Phi(r)}}.$$

Le orbite possono anche determinarsi attraverso la formula di Binet (§2, Cap. III) che permette di tradurre l'equazione fondamentale della dinamica $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ nell'equazione differenziale del secondo ordine

$$(10) \quad \frac{d^2}{d\vartheta^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{r^2}{mc^2} F(r) = 0$$

6.4. Moto di un punto in un campo newtoniano

Particolarizziamo lo studio precedente al caso di un campo newtoniano, cioè al caso in cui

$$(1) \quad F(r) = -\frac{k}{r^2}, \quad U(r) = \frac{k}{r}, \quad k > 0.$$

La funzione $\Phi(r)$ diventa

$$(2) \quad \Phi(r) = \frac{2}{m} \left(h + \frac{k}{r} \right) - \frac{c^2}{r^2}.$$

Oltre alle due costanti *strutturali* del sistema dinamico, la massa m del punto e la costante k (che, come sappiamo, è proporzionale alla massa), compaiono in questa funzione le due costanti di moto c e h . È importante osservare che la costante dell'energia h , a meno del fattore $\frac{2}{m}$, compare additivamente nella funzione $\Phi(r)$. Fissata la costante delle aree c , consideriamo cinque casi.

(I) Conviene considerare dapprima il caso $\boxed{h = 0}$. Il grafico della funzione $\Phi(r)$ ha come asintoto orizzontale l'asse r , uno zero semplice in

$$(3) \quad r_z = \frac{mc^2}{2k}$$

e assume il valore massimo

$$(4) \quad M = \Phi(r_*) = \frac{k^2}{m^2 c^2}$$

nel punto (Fig. 6.8)

$$(5) \quad r_* = \frac{mc^2}{k} = 2r_z.$$

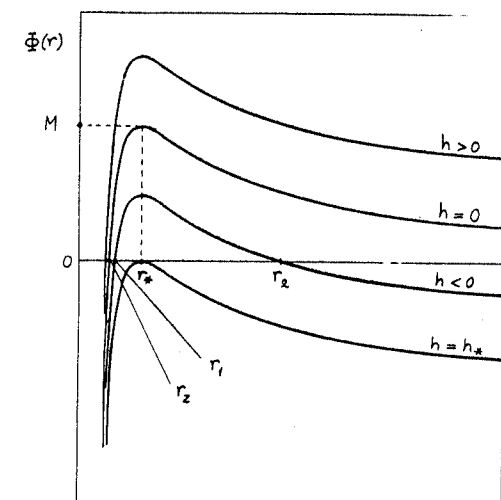


Fig. 6.8: la funzione di Weierstrass $\Phi(r)$ per il moto radiale nel campo newtoniano.

In questo caso l'orbita è illimitata e tocca la circonferenza di raggio r_1 (è, come si vedrà, una parabola).

(II) Qualunque sia $\boxed{h > 0}$ la funzione $\Phi(r)$ ha sempre un solo zero semplice $r_1 < r_z$. Anche in questo caso l'orbita è illimitata e tocca la circonferenza di raggio r_1 (è, come si vedrà, un ramo di iperbole).

(III) Se $\boxed{h = h_*}$ con

$$(6) \quad h_* = -\frac{k^2}{2mc^2},$$

allora la funzione $\Phi(r)$ ha uno zero doppio in r_* ed è ovunque negativa. L'orbita è circolare di raggio r_* .

(IV) Se $0 > h > h_*$ si hanno due zeri semplici r_1 ed r_2 tali che $r_z < r_1 < r_* < r_2$. L'orbita è allora contenuta nella corona circolare compresa dalle circonferenze di raggio r_1 ed r_2 (si tratta di una ellisse).

(V) Se $h < h_*$ la funzione $\Phi(r)$ è sempre negativa. Si tratta quindi di un caso impossibile.

Va osservato che la costante dell'energia è determinata dalle condizioni iniziali:

$$(7) \quad h = T_0 - U_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{k}{r_0}.$$

Posto

$$(8) \quad v_f^2 = \frac{2k}{mr_0},$$

risulta

$$(9) \quad h = \frac{1}{2}m(v_0^2 - v_f^2).$$

La quantità v_f prende il nome di **velocità di fuga**. Se $v_0 \geq v_f$ si ha $h \geq 0$ e l'orbita è illimitata (casi I e II).

Le orbite si ottengono integrando o l'equazione (8) o l'equazione (10) del paragrafo precedente. La prima diventa

$$(10) \quad d\vartheta = \frac{c \, dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left(h + \frac{k}{r} \right) - \frac{c^2}{r^2}}},$$

e la seconda

$$(11) \quad \frac{d^2}{d\vartheta^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{k}{c^2}.$$

Quest'ultima è un'equazione del secondo ordine a coefficienti costanti nell'incognita $\frac{1}{r}$ che fornisce immediatamente la soluzione

$$(12) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 + e \cos(\vartheta - \vartheta_0))$$

con

$$(13) \quad p = \frac{mc^2}{k}$$

ed e costante arbitraria. Le orbite sono dunque delle coniche di parametro p ed eccentricità e . È però necessario stabilire la relazione tra la costante d'integrazione e e le costanti di moto (h, c) . Per far questo si deve però ritornare all'equazione differenziale (10), che è dedotta proprio dagli integrali primi delle aree e dell'energia. Se si pone

$$x = \alpha \left(\frac{c}{r} - \beta \right) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

risulta

$$dx = -\frac{\alpha c}{r^2} dr, \quad 1 - x^2 = \alpha^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} - \beta^2 + \frac{2\beta c}{r} - \frac{c^2}{r^2} \right),$$

per cui se

$$\beta c = \frac{k}{m}, \quad \alpha^{-2} - \beta^2 = \frac{2h}{m},$$

l'equazione (10) diventa

$$d\vartheta = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Un integrale è $\vartheta = \arccos x$ da cui segue $x = \cos \vartheta$ e quindi

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{c} \left(\beta + \frac{1}{\alpha} \cos \vartheta \right).$$

Questa soluzione assume la forma (12) (con $\vartheta_0 = 0$) posto

$$p = \frac{c}{\beta} = \frac{mc^2}{k}, \quad e = \frac{p}{c\alpha} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\beta} \sqrt{\beta^2 + \frac{2h}{m}} = \sqrt{1 + \frac{2mhc^2}{k^2}}.$$

Si trova così, oltre che una conferma della (13), l'espressione dell'eccentricità in funzione delle costanti di moto. Si osservi che

$$(14) \quad p = r_*, \quad e = \sqrt{1 - \frac{h}{h_*}}.$$

I quattro casi possibili sopra considerati corrispondono allora alle situazioni seguenti:

- (I) $h = 0, \quad e = 1, \quad$ orbita parabolica,
- (II) $h > 0, \quad e > 1, \quad$ orbita iperbolica,
- (III) $h = h_*, \quad e = 0, \quad$ orbita circolare,
- (IV) $0 > h > h_*, \quad 0 < e < 1, \quad$ orbita ellittica.

ESERCIZIO. Si dimostri che nel moto di un punto in un campo centrale simmetrico il vettore

$$(15) \quad \mathbf{L} = \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) - \gamma(r) \mathbf{u} \quad \left(\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{r} \right)$$

è un integrale primo se e solo se

$$\gamma = \text{costante}, \quad F(r) = -\frac{m\gamma}{r^2},$$

cioè se e solo se il campo è newtoniano o coulombiano:

$$F = -\frac{k}{r^2}, \quad \gamma = \frac{k}{m}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

L'integrale primo vettoriale $\mathbf{L}$ è chiamato **vettore di Laplace**. Utilizzando quest'integrale primo è immediato dimostrare che le orbite sono delle coniche. Infatti, osservato che se $\mathbf{L}$ è un integrale primo anche il suo modulo L è una costante del moto, si ha da un lato

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{r} = L r \cos \vartheta,$$

con ϑ angolo compreso tra i due vettori, mentre dalla (15) risulta

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{r} = c^2 - \gamma r,$$

con c costante delle aree. Uguagliando i due risultati si trova l'equazione $r(L \cos \vartheta + \gamma) = c^2$ che può porsi nella forma (12) con

$$p = \frac{c^2}{\gamma}, \quad e = \frac{L}{\gamma}.$$

7. Dinamica dei sistemi finiti di punti.

Analizziamo in questo paragrafo il modello matematico newtoniano della dinamica dei sistemi meccanici schematizzabili in un numero finito di punti materiali. Sia $\mathcal{S} = \{(P_\nu, m_\nu); \nu = 1, \dots, N\}$ un sistema di N punti materiali. Si postula quanto segue. (I) Le sollecitazioni a cui ogni punto P_ν è soggetto sono rappresentate dalla somma di due vettori: un vettore $\mathbf{F}_{i\nu}$, detto **forza interna**, risultante di tutte le forze agenti su P_ν dovute alla presenza di tutti gli altri punti del sistema, e un vettore $\mathbf{F}_{e\nu}$, detto **forza esterna**, risultante di tutte le forze agenti su P_ν dovute ad azioni esterne al sistema. (II) **Postulato delle forze interne**: per ogni punto P_ν la forza interna $\mathbf{F}_{i\nu}$ è data dalla somma

$$(1) \quad \boxed{\mathbf{F}_{i\nu} = \sum_{\mu} \mathbf{F}_{\nu\mu}}$$

dove $\mathbf{F}_{\nu\mu}$ è la forza che il punto P_μ esercita sul punto P_ν . Per questi vettori valgono le condizioni

$$(2) \quad \boxed{\begin{aligned} \mathbf{F}_{\nu\mu} &\text{ è parallelo a } P_\nu P_\mu \\ \mathbf{F}_{\nu\mu} &= -\mathbf{F}_{\mu\nu} \end{aligned}}$$

costituenti il cosiddetto **principio di azione e reazione**. (III) Per ogni punto del sistema vale l'equazione dinamica

$$(3) \quad \boxed{m \mathbf{a}_\nu = \mathbf{F}_{i\nu} + \mathbf{F}_{e\nu}}$$

Una conseguenza immediata del postulato delle forze interne è il seguente **teorema delle forze interne**.

PROPOSIZIONE 1. Le forze interne formano un sistema equivalente a zero, cioè tale che:

$$(4) \quad \mathbf{R}_i \equiv \sum_{\nu} \mathbf{F}_{i\nu} = 0, \quad \mathbf{M}_{O_i} \equiv \sum_{\nu} \mathbf{OP}_\nu \times \mathbf{F}_{i\nu} = 0.$$

Infatti il sistema dei vettori applicati $(P_\nu, \mathbf{F}_{i\nu})$ è equivalente ad un sistema di coppie a braccio nullo.

Un sistema di punti materiali si dice **isolato** se $\mathbf{F}_{e\nu} = 0$ per ogni punto P_ν . Quindi per un sistema isolato anche il sistema delle forze esterne è equivalente a zero.

ESEMPIO 1. Il problema ristretto dei due corpi. Consideriamo due punti materiali (S, M) e (T, m) , liberi e isolati, cioè non soggetti a vincoli e ad alcuna forza esterna. Il moto dell'uno è influenzato dalla sola presenza dell'altro attraverso una reciproca sollecitazione che, per il principio di azione e reazione, è costituita da due forze opposte, di uguale intensità, dirette secondo la congiungente i due punti. Supponiamo che tali forze dipendano solo dalla distanza $r = |ST|$ dei due punti. Sia allora $\phi(r)\mathbf{u}$ la forza che S esercita su T , con $\mathbf{u}$ versore di ST . Siano $\mathbf{a}_S$ e $\mathbf{a}_T$ le accelerazioni relative ad un riferimento inerziale $\mathcal{R}$. Le equazioni del moto (3) scritte in questo riferimento diventano:

$$(5) \quad M \mathbf{a}_S = -\phi(r)\mathbf{u}, \quad m \mathbf{a}_T = \phi(r)\mathbf{u}.$$

Queste danno origine ad un sistema di sei equazioni differenziali scalari del secondo ordine, con incognite le sei coordinate dei punti in funzione del tempo. Il cosiddetto **problema ristretto dei due corpi** consiste nello studio del moto del punto T rispetto al riferimento $\mathcal{R}_*$ univocamente definito dalle seguenti due condizioni: (i) il punto S è fisso in $\mathcal{R}_*$, (ii) $\mathcal{R}_*$ è in moto traslatorio rispetto ad un qualunque riferimento inerziale (in altri termini, $\mathcal{R}_*$ è il riferimento rappresentanto da una terna di assi aventi origine in S e orientamento invariabile rispetto alle "stelle fisse"). L'equazione del moto di T relativa a questo riferimento deve pertanto tener conto delle forze apparenti:

$$(6) \quad m \mathbf{a} = \phi(r)\mathbf{u} + \mathbf{F}_{tr} + \mathbf{F}_c.$$

In quest'equazione $\mathbf{a}$ è l'accelerazione di T rispetto a $\mathcal{R}_*$ e $\phi(r)\mathbf{u}$ è la forza reale agente su T . Poiché $\mathcal{R}_*$ si muove di moto traslatorio rispetto ad $\mathcal{R}$ con accelerazione pari a quella del punto solidale S , si ha

$$\mathbf{F}_{tr} = -m \mathbf{a}_S, \quad \mathbf{F}_c = 0.$$

Dalla (5) e dalla (6) segue allora l'equazione

$$m \mathbf{a} = \left(1 + \frac{m}{M}\right) \phi(r)\mathbf{u}.$$

Posto

$$(7) \quad m_* = \frac{mM}{m+M},$$

quest'ultima diventa

$$(8) \quad m_* \mathbf{a} = \phi(r)\mathbf{u}.$$

L'equazione (8) mostra che il punto T si muove in $\mathcal{R}_*$ come un punto di massa m_* soggetto alla forza centrale simmetrica $\phi(r)$ di centro fisso S . Il numero m_* prende il nome di **massa ridotta**. Si noti infatti che $m_* < m$.

DEFINIZIONE 1. Fissato un riferimento, si dice **atto di moto** del sistema di punti $\{P_\nu; \nu = 1, \dots, N\}$ un qualunque sistema di vettori $\{(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu); \nu = 1, \dots, N\}$ dove ogni vettore $\mathbf{r}_\nu$ rappresenta la posizione del punto P_ν rispetto ad un prefissato punto O (quindi $\mathbf{r}_\nu = OP_\nu$) ed ogni vettore $\mathbf{v}_\nu$ rappresenta la velocità del punto P_ν .

Ad ogni atto di moto di un sistema di punti materiali vengono associate alcune **grandezze cinetiche** aventi carattere globale o *di media*, analoghe a quelle già definite nel caso di un solo punto. Esse sono: la **quantità di moto**

$$(9) \quad \boxed{\mathbf{p} = \sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu}}$$

il **momento della quantità di moto** rispetto ad un generico polo O , detto anche **momento angolare**,

$$(10) \quad \boxed{\mathbf{K}_O = \sum_{\nu} \mathbf{r}_{\nu} \times m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu}}$$

e l'**energia cinetica**

$$(11) \quad \boxed{T = \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} v_{\nu}^2}$$

Per la quantità di moto e l'energia cinetica valgono due notevoli proprietà coinvolgenti il baricentro G del sistema che, ricordiamo, è definito da una delle due equazioni seguenti:

$$(12) \quad \sum_{\nu} m_{\nu} G P_{\nu} = 0, \quad \Longleftrightarrow \quad OG = \frac{1}{m} \sum_{\nu} m_{\nu} r_{\nu} \quad (m = \sum_{\nu} m_{\nu}).$$

La prima proprietà, semplice ma importante per le sue implicazioni, è espressa dalla formula

$$(13) \quad \boxed{\mathbf{p} = m \mathbf{v}_G}$$

dove $\mathbf{v}_G$ è la velocità del baricentro. Essa afferma che

PROPOSIZIONE 2. La quantità di moto dell'intero sistema è pari alla quantità di moto del baricentro pensato dotato della massa totale del sistema.

Dimostrazione. Ad un generico atto di moto del sistema corrisponde un atto di moto del baricentro, vale a dire una velocità $\mathbf{v}_G$, ottenibile derivando formalmente rispetto al tempo una delle equazioni (12), per esempio la prima. Si ottiene

$$\sum_{\nu} m_{\nu} (\mathbf{v}_{\nu} - \mathbf{v}_G) = 0,$$

da cui segue la (13). ■

La seconda proprietà, nota come **teorema di König** (Samuel König, 1712 - 1757), è assai utile nel calcolo effettivo dell'energia cinetica:

PROPOSIZIONE 3. L'energia cinetica di un sistema è uguale alla somma dell'energia cinetica del suo baricentro, pensato dotato di tutta la massa del sistema, e dell'energia cinetica nel moto rispetto al baricentro.

Per **moto rispetto al baricentro** s'intende il moto rispetto a quel riferimento, che denotiamo con $\mathcal{R}'$, in moto traslatorio rispetto al riferimento $\mathcal{R}$ e nel quale il baricentro è fisso. Il teorema di König è espresso dunque dalla formula

$$(14) \quad \boxed{T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_G^2 + T'}$$

dove T' è l'energia cinetica nel moto rispetto al baricentro.

Dimostrazione. Denotiamo con $\mathbf{v}'_{\nu}$ la velocità del punto P_{ν} misurata nel riferimento $\mathcal{R}'$. Per il teorema dei moti relativi abbiamo $\mathbf{v}_{\nu} = \mathbf{v}'_{\nu} + \mathbf{v}_G$, perché la velocità di trascinamento del punto P_{ν} coincide, qualunque sia il punto P_{ν} , con la velocità del baricentro $\mathbf{v}_G$, posto che il baricentro è fisso nel riferimento $\mathcal{R}'$ e che quest'ultimo si muove di moto traslatorio rispetto al riferimento $\mathcal{R}$. Abbiamo allora successivamente:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu}^2 &= \sum_{\nu} m_{\nu} (\mathbf{v}'_{\nu} + \mathbf{v}_G)^2 \\ &= \sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu}'^2 + \sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{v}_G^2 + 2 \sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{v}'_{\nu} \cdot \mathbf{v}_G. \end{aligned}$$

D'altra parte l'ultimo termine è nullo perché la somma $\sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{v}'_{\nu}$ definisce la quantità di moto $\mathbf{p}'$ del sistema rispetto a $\mathcal{R}'$. Questa, per la proposizione precedente, è pari alla massa totale per la velocità del baricentro rispetto allo stesso $\mathcal{R}'$, che è nulla perché il baricentro è fermo in $\mathcal{R}'$. ■

Dopo aver introdotto le grandezze cinetiche fondamentali della meccanica dei sistemi finiti di punti, passiamo all'esame di alcune loro proprietà immediatamente conseguenti ai postulati.

PROPOSIZIONE 4. Per la dinamica di un sistema di punti materiali valgono le **equazioni cardinali**:

$$(16) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \mathbf{R}_e \\ \frac{d\mathbf{K}_O}{dt} &= \mathbf{p} \times \mathbf{v}_O + \mathbf{M}_{Oe} \\ \frac{dT}{dt} &= W \end{aligned}}$$

dove

$$(17) \quad \mathbf{R}_e = \sum_{\nu} \mathbf{F}_{e\nu}$$

è il risultante delle sole forze esterne,

$$(18) \quad \mathbf{M}_{Oe} = \sum_{\nu} \mathbf{r}_{\nu} \times \mathbf{F}_{Oe}$$

è il momento risultante delle sole forze esterne rispetto ad un qualunque polo O di velocità $\mathbf{v}_O$, e

$$(19) \quad W = \sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu} \cdot \mathbf{v}_{\nu}$$

è la potenza di tutte le forze, sia interne che esterne al sistema.

Dimostrazione. Dimostriamo che per un sistema finito di punti materiali le equazioni cardinali discendono dalle equazioni fondamentali (3), valide per ogni singolo punto, e dal teorema delle forze interne (sono nulli il risultante ed il momento risultante, rispetto ad un qualunque polo O , delle forze interne). Dalla definizione di $\mathbf{p}$ segue:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{a}_{\nu} = \sum_{\nu} \mathbf{F}_{e\nu} + \sum_{\nu} \mathbf{F}_{i\nu} = \mathbf{R}_e,$$

e la (16)₁ è dimostrata. Dalla definizione di $\mathbf{K}_O$ segue:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{K}_O}{dt} &= \sum_{\nu} \frac{d}{dt} (OP_{\nu} \times m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu}) \\ &= \sum_{\nu} (\mathbf{v}_{\nu} - \mathbf{v}_O) \times m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu} + \sum_{\nu} OP_{\nu} \times m_{\nu} \mathbf{a}_{\nu} \\ &= -\mathbf{v}_O \times \sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu} + \sum_{\nu} OP_{\nu} \times (\mathbf{F}_{e\nu} + \mathbf{F}_{i\nu}) \\ &= \mathbf{p} \times \mathbf{v}_O + \mathbf{M}_{Oe}, \end{aligned}$$

e la (16)₂ è dimostrata. Dalla definizione di T segue infine immediatamente la (16)₃:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu} \cdot \mathbf{a}_{\nu} = \sum_{\nu} \mathbf{v}_{\nu} \cdot (\mathbf{F}_{e\nu} + \mathbf{F}_{i\nu}) = W_e + W_i = W. \quad \blacksquare$$

Le equazioni cardinali esprimono tre proprietà dinamiche di *media* che vanno rispettivamente sotto il nome di **teorema della quantità di moto**, **teorema del momento della quantità di moto** e **teorema dell'energia**. Esse sono interpretabili come equazioni differenziali reggenti la dinamica dei sistemi, ma in generale non sono sufficienti a determinare il moto di ogni singolo punto. Si noti che nelle prime due

intervengono esplicitamente soltanto le forze esterne. Vediamone alcune notevoli conseguenze.

OSSERVAZIONE 1. Poiché $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_G$, l'equazione (18)₁ equivale a

$$(20) \quad \boxed{m \mathbf{a}_G = \mathbf{R}_e}$$

Quest'equazione esprime il seguente **teorema del moto del baricentro**:

PROPOSIZIONE 5. Il baricentro di un sistema di punti si muove come punto materiale dotato della massa totale del sistema e soggetto ad una forza pari al risultante delle forze esterne.

ESEMPIO 2. Se le forze agenti su ogni singolo punto sono proporzionali alle rispettive masse (come nel caso della forza peso) cioè del tipo $\mathbf{F}_{e\nu} = m_{\nu} \mathbf{g}$, allora si ha $\mathbf{R}_e = m\mathbf{g}$ e il baricentro si muove secondo la legge $\mathbf{a}_G = \mathbf{g}$ qualunque siano gli effetti delle sollecitazioni interne al sistema. L'esempio classico è quello di un proiettile che esplode durante il tiro; mentre non è in genere possibile prevedere i moti delle singole parti in cui viene diviso, si può affermare che il baricentro continua senza disturbi il moto che aveva prima dell'esplosione: questa infatti è prodotta da sole forze interne al sistema.

OSSERVAZIONE 2. Se il polo O è fisso oppure coincide con il baricentro, allora la seconda equazione cardinale si riduce semplicemente a

$$(21) \quad \boxed{\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_{Oe}}$$

Infatti nel primo caso si ha $\mathbf{v}_O = 0$ e nel secondo $\mathbf{p} \times \mathbf{v}_G = m \mathbf{v}_G \times \mathbf{v}_G = 0$.

OSSERVAZIONE 3. Sia a una retta, $\mathbf{u}$ un suo versore, O un suo punto. Così come per un punto materiale, per un sistema di punti definiamo il **momento assiale della quantità di moto** rispetto ad a :

$$(22) \quad K^a = \mathbf{K}_O \cdot \mathbf{u}.$$

Tale numero non dipende dalla scelta di O sulla retta e cambia ovviamente di segno cambiando $\mathbf{u}$ nel suo opposto (il momento assiale

dipende dunque dal verso della retta). In maniera analoga si definisce il **momento assiale delle forze esterne**,

$$(23) \quad M_e^a = M_{Oe} \cdot u.$$

Se la retta a è fissa nello spazio, la seconda equazione cardinale, moltiplicata scalarmente per u , fornisce l'equazione scalare

$$(24) \quad \boxed{\frac{dK^a}{dt} = M_e^a}$$

Dalle equazioni cardinali seguono infine alcuni **teoremi di conservazione**, esprimenti, sotto certe condizioni per le forze, l'esistenza di integrali primi.

(I) Se $R_e = 0$, allora $p = \text{costante}$, vale a dire $v_G = \text{costante}$. Si dice in questo caso che sussiste l'**integrale primo della quantità di moto**. Più in generale, se esiste un vettore costante u tale che sia sempre $R_e \cdot u = 0$, allora $v_G \cdot u = \text{costante}$.

ESEMPIO 3. Si consideri un sistema soggetto alla sola forza peso: il risultante è sempre ortogonale ad un qualunque prefissato vettore orizzontale.

(II) Se rispetto ad un polo O fisso oppure coincidente con il baricentro si ha $M_{Oe} = 0$, allora $K_O = \text{costante}$. Sussiste cioè l'**integrale primo del momento della quantità di moto**. Si osservi che da $M_{Oe} \cdot u = 0$, con u vettore costante, segue $K_O \cdot u = \text{costante}$.

ESEMPIO 4. Si consideri il sistema solare, con Sole e pianeti assimilabili a punti materiali. Ritenute trascurabili le forze esercitate dalle stelle su di questi, il sistema solare è un *sistema isolato*, vale a dire: $R_e = 0$ e $M_{Ge} = 0$. Pertanto il suo baricentro G si muove rispetto ad un qualunque riferimento inerziale di moto rettilineo e uniforme, mentre il momento della quantità di moto rispetto al baricentro K_G è costante. Il piano ad esso ortogonale e passante per G è fisso nel riferimento inerziale individuato da G . Esso prende il nome di **piano di Laplace** e coincide approssimativamente con il piano dell'orbita terrestre.

(III) Se esiste una funzione reale U dipendente dalla posizione di tutti i punti cioè dalla **configurazione** del sistema, tale che per ogni moto si ha

$$\frac{dU}{dt} = W,$$

si dice che il sistema è **conservativo**. La funzione U , definita a meno di una costante additiva, è detta **potenziale**. Dal teorema dell'energia segue allora l'**integrale primo dell'energia**:

$$T - U = \text{costante}.$$

ESEMPIO 5. Nel caso di un sistema le cui forze esterne sono le forze peso si ha, per ogni configurazione del sistema,

$$U_e = mg \cdot OG,$$

dove O è un qualunque punto fisso. Infatti:

$$W_e = \sum_{\nu} m_{\nu} g \cdot v_{\nu} = g \cdot m v_G = \frac{dU_e}{dt}.$$

8. Dinamica del corpo rigido.

Le considerazioni svolte nel paragrafo precedente si applicano in particolare ai sistemi rigidi costituiti da un numero finito di punti materiali $\{(P_{\nu}, m_{\nu}); \nu = 1, \dots, N\}$. I risultati che si ottengono sono comunque validi per un corpo rigido continuo.

PROPOSIZIONE 1. In un corpo rigido per il momento angolare K_O , l'energia cinetica T e la potenza W di un qualunque sistema di forze $\{(P_{\nu}, F_{\nu})\}$ valgono le espressioni seguenti:

$$(1) \quad \boxed{\begin{aligned} K_O &= m OG \times v_O + I_O(\omega) \\ T &= \frac{1}{2} K_O \cdot \omega + \frac{1}{2} p \cdot v_O \\ W &= M_O \cdot \omega + R \cdot v_O \end{aligned}}$$

dove m è la massa totale del corpo, G è il baricentro, O è un punto solidale, $\mathbf{v}_O$ la sua velocità, $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare del corpo rigido, $\mathbf{I}_O$ è il tensore d'inerzia nel punto O , $\mathbf{R}$ e $\mathbf{M}_O$ sono il risultante ed il momento risultante del sistema di forze.

Dimostrazione. Ricordata la seconda formula fondamentale di cinematica rigida, per un qualunque punto solidale O si ha

$$\mathbf{v}_\nu = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP}_\nu,$$

denotata per semplicità con $\mathbf{v}_\nu$ la velocità del punto P_ν . Ricordata inoltre la definizione di $\mathbf{I}_O$, si ha successivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_O &= \sum_{\nu} \mathbf{OP}_\nu \times m_{\nu} \mathbf{v}_\nu \\ &= \sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{OP}_\nu \times (\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP}_\nu) \\ &= m \mathbf{OG} \times \mathbf{v}_O + \sum_{\nu} m_{\nu} (\mathbf{OP}_\nu \times \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{OP}_\nu \\ &= m \mathbf{OG} \times \mathbf{v}_O + \mathbf{I}_O(\boldsymbol{\omega}). \end{aligned}$$

Di qui la (1)₁. La (1)₂ segue da:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{v}_\nu^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{v}_\nu \cdot (\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP}_\nu) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_O + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{\nu} \mathbf{OP}_\nu \times m_{\nu} \mathbf{v}_\nu. \end{aligned}$$

La (1)₃ segue da:

$$\begin{aligned} W &= \sum_{\nu} \mathbf{F}_\nu \cdot \mathbf{v}_\nu \\ &= \sum_{\nu} \mathbf{F}_\nu \cdot (\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP}_\nu) \\ &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_O + \sum_{\nu} \mathbf{F}_\nu \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP}_\nu \\ &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{\nu} \mathbf{OP}_\nu \times \mathbf{F}_\nu. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A proposito delle formule (1) si osserva quanto segue.

OSSERVAZIONE 1. Se il polo O coincide col baricentro (che è punto solidale) oppure se O è un punto solidale fisso ($\mathbf{v}_O = 0$), allora l'espressione del momento angolare si semplifica in

$$(2) \quad \boxed{\mathbf{K}_O = \mathbf{I}_O(\boldsymbol{\omega})}$$

Denotata con $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ la terna principale d'inerzia relativa al punto O e denotati con (A, B, C) i rispettivi momenti principali d'inerzia, si ha (si veda il §14, Cap. II, e il §9, Prop. 4, Cap. I)

$$(3) \quad \mathbf{I}_O = A \mathbf{i} \otimes \mathbf{i} + B \mathbf{j} \otimes \mathbf{j} + C \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}.$$

Denotate con (p, q, r) le componenti secondo questa terna della velocità angolare, posto cioè

$$(4) \quad \boldsymbol{\omega} = p \mathbf{i} + q \mathbf{j} + r \mathbf{k},$$

dalla (2) segue che

$$(5) \quad \boxed{\mathbf{K}_O = A p \mathbf{i} + B q \mathbf{j} + C r \mathbf{k}}$$

OSSERVAZIONE 2. Se O è un punto solidale fisso l'energia cinetica si riduce a

$$(6) \quad \boxed{T = \frac{1}{2} \mathbf{K}_O \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \mathbf{I}_O(\boldsymbol{\omega})}$$

dove $\mathbf{I}_O$ è la forma d'inerzia nel punto O . Siccome la velocità angolare è ad ogni istante parallela all'asse di Mozzi a , dalla (6) segue

$$(7) \quad \boxed{T = \frac{1}{2} I^a \omega^2}$$

dove I^a è il momento d'inerzia rispetto all'asse di Mozzi. Dalla (6) segue anche, secondo le notazioni classiche considerate nella precedente osservazione,

$$(8) \quad \boxed{T = \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2)}$$

OSSERVAZIONE 3. Se si considera il sistema delle forze interne, che è equivalente a zero, dalla (1)₃ segue

$$W_i = 0.$$

Dunque: *le forze interne di un corpo rigido hanno potenza nulla.*

Dopo le premesse sulle grandezze cinetiche del corpo rigido passiamo ora a considerare le equazioni della dinamica.

Come per ogni sistema di punti materiali anche per un corpo rigido valgono le equazioni cardinali della meccanica. Nel caso del corpo rigido però accade che: (I) le due prime equazioni, vale a dire il teorema della quantità di moto ed il teorema del momento della quantità di moto, che qui scriviamo rispetto ad un polo O fisso o coincidente col baricentro,

$$(9) \quad \boxed{\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{R}_e, \quad \frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M}_e}$$

descrivono completamente la dinamica, sono cioè equazioni differenziali sufficienti a determinare i moti del corpo; (II) la terza equazione cardinale, vale a dire l'equazione dell'energia

$$(10) \quad \frac{dT}{dt} = W_e,$$

è una conseguenza delle precedenti. Va inoltre osservato che le reazioni vincolari responsabili della rigidità del corpo sono forze soddisfacenti al postulato delle forze interne al sistema e non intervengono pertanto nelle equazioni cardinali, neanche nell'ultima, il teorema dell'energia, per quanto visto nell'Oss. 3.

Rinunciando alla discussione del punto (I), dimostriamo soltanto che la (10) è conseguenza delle (9). Posto come si è detto $O = G$, per la (1)₂ e la (8) si ha

$$(11) \quad T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \frac{1}{2}m \mathbf{v}_G \cdot \mathbf{v}_G.$$

D'altra parte, stante la (5), denotando brevemente con il punto sovrapposto la derivata rispetto al tempo e facendo intervenire le formule di Poisson, si ha

$$\dot{\mathbf{K}} = A\dot{p}\mathbf{i} + B\dot{q}\mathbf{j} + C\dot{r}\mathbf{k} + Ap\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} + Bq\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j} + Cr\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k},$$

quindi

$$(12) \quad \dot{\mathbf{K}} = A\dot{p}\mathbf{i} + B\dot{q}\mathbf{j} + C\dot{r}\mathbf{k} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}.$$

Di qui si osserva che

$$\dot{\mathbf{K}} \cdot \boldsymbol{\omega} = A\dot{p}\dot{p} + B\dot{q}\dot{q} + C\dot{r}\dot{r}.$$

Se allora si deriva la (11) si ha successivamente:

$$\begin{aligned} \dot{T} &= A\dot{p}\dot{p} + B\dot{q}\dot{q} + C\dot{r}\dot{r} + m\mathbf{a}_G \cdot \mathbf{v}_G \\ &= \dot{\mathbf{K}} \cdot \boldsymbol{\omega} + \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v}_G \\ &= \mathbf{M}_e \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{R}_e \cdot \mathbf{v}_G \\ &= W_e. \end{aligned}$$

8.1. Corpo rigido con un punto fisso

Consideriamo il caso di un corpo rigido con un punto fisso O . In questo caso la seconda equazione cardinale, se usiamo il punto sovrapposto per indicare la derivazione rispetto al tempo e omettiamo per semplicità i suffissi O ed e , si scrive semplicemente

$$(1) \quad \boxed{\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{M}}$$

Ma, essendo ancora valida la formula (12) precedente ed essendo inoltre

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ p & q & r \\ Ap & Bq & Cr \end{vmatrix},$$

l'equazione vettoriale (1) si traduce nelle tre equazioni scalari

$$(2) \quad \boxed{\begin{aligned} A\dot{p} - (B - C)qr &= X \\ B\dot{q} - (C - A)rp &= Y \\ C\dot{r} - (A - B)pq &= Z \end{aligned}}$$

denotate con (X, Y, Z) le componenti del momento delle forze esterne $\mathbf{M}$ rispetto alla terna principale d'inerzia. Queste sono le celebri **equazioni di Euler** della dinamica del corpo rigido.

Le equazioni di Euler sono equazioni differenziali del primo ordine nelle componenti della velocità angolare $(p(t), q(t), r(t))$ secondo la terna principale d'inerzia. I secondi membri, vale a dire le componenti del momento delle forze esterne, dipendono in generale dalla posizione del corpo e dalla velocità dei suoi punti, cioè dall'atto di moto. Essi si esprimono quindi come funzioni dei tre parametri scelti per rappresentare la posizione del corpo rigido, delle tre componenti la velocità angolare ed eventualmente del tempo (se le forze attive dipendono dal tempo). Se per esempio per rappresentare la posizione del corpo si scelgono gli angoli di Euler (θ, ϕ, ψ) (per altre possibili scelte si veda il §11.4, Cap. I), allora le componenti (X, Y, Z) risultano in definitiva funzioni delle sette variabili $(\theta, \phi, \psi, p, q, r, t)$. Alle equazioni di Euler (2) vanno poi affiancate le equazioni che esprimono le componenti della velocità angolare in funzione degli angoli di Euler e delle loro derivate rispetto al tempo. Esse sono (si veda l'Oss. 2 più avanti):

$$(3) \quad \begin{cases} p = \cos \phi \dot{\theta} + \sin \phi \sin \theta \dot{\psi}, \\ q = -\sin \phi \dot{\theta} + \cos \phi \sin \theta \dot{\psi}, \\ r = \cos \theta \dot{\psi} + \dot{\phi}. \end{cases}$$

Queste equazioni possono essere risolte rispetto alle derivate $(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$ per $\sin \theta \neq 0$ (si tratta di un sistema di equazioni lineari). Il sistema complessivo delle equazioni (2) + (3) è allora equivalente ad un sistema di sei equazioni differenziali del primo ordine in forma normale nelle sei funzioni incognite $(\theta(t), \phi(t), \psi(t), p(t), q(t), r(t))$, almeno nel caso in cui nessuno dei momenti principali d'inerzia si annulla (il caso in cui uno di questi si annulla, caso degenero, richiede una trattazione a parte). L'integrazione di questo sistema, che fornisce i moti del corpo rigido intorno al punto fisso, presenta in genere delle notevoli difficoltà, anche in casi apparentemente semplici, come per esempio nel caso in cui le componenti (X, Y, Z) sono nulle (moti alla Poincot, §8.2) oppure nel caso in cui sul corpo agisce una forza costante (come la forza peso, §9, Cap. V, Esempio 3). Si va allora alla ricerca di eventuali integrali primi tramite i quali dedurre proprietà qualitative o geometriche dei moti.

OSSERVAZIONE 1. Le forze reattive esterne al corpo, responsabili del mantenimento del punto fisso O , si sommano in una forza applicata

in O e quindi non danno alcun contributo al momento delle forze esterne $\mathbf{M}$. Esse danno però un contributo al risultante delle forze esterne che interviene nella prima equazione cardinale. Quest'equazione pertanto, noto il moto del corpo rigido e noto il risultante delle forze esterne attive, serve proprio alla determinazione del risultante delle forze reattive.

OSSERVAZIONE 2. Richiamiamo con la Fig. 8.1 la definizione degli angoli di Euler data al §11.4 del Cap. I, cambiando opportunamente le notazioni per i versori della terna fissa, ora denotati con $(\mathbf{c}_\alpha) = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$, e della terna solidale, che ora è la terna principale d'inerzia $(\mathbf{u}_\alpha) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Posto per semplicità $\mathbf{c} = \mathbf{c}_3$ si dimostra innanzitutto che (si veda l'Eserc. 1, §7, Cap. III)

$$(4) \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{c} + \dot{\phi} \mathbf{k} + \dot{\theta} \mathbf{N}.$$

Si osserva quindi che

$$(5) \quad \begin{cases} \mathbf{N} \cdot \mathbf{i} = \cos \phi, & \mathbf{N} \cdot \mathbf{j} = -\sin \phi, & \mathbf{N} \cdot \mathbf{k} = 0, \\ \mathbf{c} \cdot \mathbf{i} = \sin \theta \sin \phi, & \mathbf{c} \cdot \mathbf{j} = \sin \theta \cos \phi, & \mathbf{c} \cdot \mathbf{k} = \cos \theta. \end{cases}$$

Moltiplicando allora scalarmente la (4) per $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ si trovano le (3).

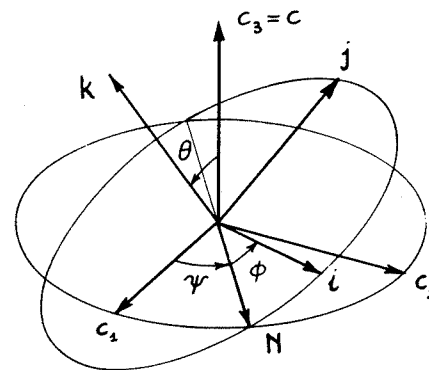


Fig. 8.1: gli angoli di Euler rispetto alla terna principale d'inerzia $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

8.2. Moti alla Poincot

Si dicono **moti alla Poincot** (Louis Poincot, 1777 - 1859), o anche **moti rigidi spontanei**, i moti di un corpo rigido con un punto fisso soggetto ad un sistema di forze il cui momento risultante, rispetto al punto fisso, è nullo.

Sono esempi notevoli di moti alla Poincot: (i) il moto di un corpo rigido fissato nel baricentro e soggetto alla gravità, (ii) il moto *rispetto al baricentro* di un corpo rigido in caduta libera. Nel primo caso infatti, essendo $\mathbf{F}_{e\nu} = m_\nu \mathbf{g}$, risulta: $\mathbf{M}_{Ge} = \sum_\nu \mathbf{GP}_\nu \times m_\nu \mathbf{g} = \sum_\nu m_\nu \mathbf{GP}_\nu \times \mathbf{g} = 0$ perché $\sum_\nu m_\nu \mathbf{GP}_\nu = 0$. Nel secondo caso, poiché ci si pone in un riferimento che si muove di moto traslatorio rispetto al riferimento in cui la forza peso è ritenuta costante, e che viene assunto come inerziale, si ha $\mathbf{F}_{e\nu} = m_\nu (\mathbf{g} - \mathbf{a}_G)$, essendo $-m_\nu \mathbf{a}_G$ la forza di trascinamento. Per cui, come sopra, si trova $\mathbf{M}_{Ge} = 0$.

Nel caso dei moti alla Poincot la seconda equazione cardinale diventa

$$(1) \quad \boxed{\dot{\mathbf{K}} = 0}$$

e le equazioni di Euler si semplificano in

$$(2) \quad \boxed{\begin{aligned} A\dot{p} - (B - C)qr &= 0 \\ B\dot{q} - (C - A)rp &= 0 \\ C\dot{r} - (A - B)pq &= 0 \end{aligned}}$$

Ora le equazioni di Euler formano un sistema del primo ordine nelle sole funzioni incognite $(p(t), q(t), r(t))$ che, nel caso in cui nessuno dei momenti principali d'inerzia (A, B, C) è nullo, può porsi in forma normale. La sua integrazione consente di determinare la velocità angolare e quindi il moto del corpo rigido a partire da un atto di moto iniziale (si veda l'Oss. 5 alla fine).

L'equazione cardinale (1) mostra che il momento angolare è un integrale primo (vettoriale):

$$(3) \quad \mathbf{K} = \text{costante.}$$

Il teorema dell'energia, annullandosi anche la potenza delle forze esterne, mostra che anche l'energia cinetica è un integrale primo:

$$(4) \quad T = \text{costante.}$$

La presenza di questi due integrali primi consente di riconoscere una notevole e significativa proprietà geometrica di questi moti espressa nel seguente classico **teorema di Poincot**:

PROPOSIZIONE 1. In ogni moto alla Poincot l'ellissoide d'inerzia relativo al punto fisso O rotola senza strisciare su di un piano fisso ortogonale al momento angolare costante $\mathbf{K}$.

Per la sua dimostrazione occorre utilizzare una proprietà generale dei moti rigidi con un punto fisso.

PROPOSIZIONE 2. In un qualunque moto rigido con un punto fisso O , in ogni istante in cui $\omega \neq 0$, il momento angolare $\mathbf{K}_O$ è ortogonale all'ellissoide d'inerzia relativo ad O nei punti di intersezione con l'asse di Mozzi e forma angolo acuto con la velocità angolare (Fig. 8.2).

Dimostrazione. Si consideri il riferimento principale d'inerzia nel punto O , di coordinate (x, y, z) . L'ellissoide d'inerzia ha equazione

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Il gradiente della funzione a primo membro, le cui componenti sono $(2Ax, 2By, 2Cz)$, è un vettore ortogonale all'ellissoide nel punto P di coordinate (x, y, z) (teorema del gradiente). Se questo punto sta sull'asse di Mozzi, che è parallelo a ω di componenti (p, q, r) , allora il gradiente è parallelo al vettore di componenti (Ap, Bq, Cr) . Ma queste sono appunto le componenti di $\mathbf{K}$: la prima parte dell'enunciato è dimostrata. Osservato poi che $\omega \cdot \mathbf{K} = 2T$ e che l'energia cinetica è sempre positiva o nulla, si conclude che l'angolo tra ω e $\mathbf{K}$ è sempre acuto o retto. Ma il caso in cui $\omega \cdot \mathbf{K} = 0$ corrisponde a $T = 0$, cioè $\omega = 0$. ■

Dimostrazione della teorema di Poincot. In virtù della Prop. 2 il piano Π tangente all'ellissoide d'inerzia in uno dei due punti d'intersezione con l'asse di Mozzi a ha giacitura costante, perché è ortogonale al vettore costante $\mathbf{K}$. Si prenda il piano tangente nel punto P per cui OP e ω sono concordi. Per il significato dell'ellissoide d'inerzia e per quanto visto sull'energia cinetica, si ha

$$(5) \quad \frac{1}{|OP|^2} = I^a = \frac{2T}{\omega^2}.$$

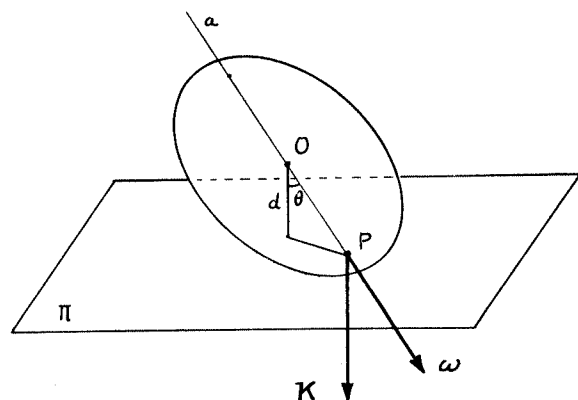


Fig. 8.2: il teorema di Poincaré.

Sia θ l'angolo formato tra ω e K . Allora

$$\cos \theta = \frac{K \cdot \omega}{|K| |\omega|} = \frac{2T}{|K| |\omega|}.$$

D'altra parte, se d è la distanza del piano Π dal punto O , risulta per la (5)

$$(6) \quad d = |OP| \cos \theta = \frac{2T |OP|}{|K| |\omega|} = \frac{\sqrt{2T}}{|K|}.$$

Poiché T e K sono costanti, d è costante: dunque il piano Π è fisso. Poiché il punto P di contatto tra ellissoide e piano sta sull'asse di Mozzi, la velocità di P , pensato solidale al corpo, è nulla, quindi l'ellissoide rotola senza strisciare su Π . ■

OSSERVAZIONE 1. La (5) mostra che in ogni istante

$$(7) \quad \omega = \sqrt{2T} OP.$$

La (6) fornisce la distanza del piano fisso dal punto fisso O :

$$(8) \quad d = \frac{\sqrt{2T}}{|K|}.$$

Conseguenze notevoli del teorema di Poincaré:

COROLLARIO 1. Tra i moti alla Poincaré esistono moti rotatori (cioè con un asse fisso). Essi sono necessariamente uniformi ($\omega = \text{costante}$) e intorno ad un asse principale d'inerzia.

Dimostrazione. I moti rotatori sono caratterizzati dall'avere l'asse di Mozzi fisso. Dal teorema di Poincaré si vede che l'asse di Mozzi è fisso se e solo se il punto P di contatto tra l'ellissoide ed il piano è fisso. D'altra parte un ellissoide con centro fisso può rotolare senza strisciare su di un piano fisso se e solo se il punto di contatto coincide con un suo vertice e quindi appartiene ad uno degli assi. Inoltre, se P è fisso, ω è costante (formula (7)). ■

I moti rigidi con punto fisso e con ω costante si dicono **moti stazionari**. Il precedente enunciato afferma allora che moti alla Poincaré stazionari sono possibili solo intorno agli assi principali d'inerzia.

COROLLARIO 2. Se l'ellissoide d'inerzia è rotondo, allora i moti alla Poincaré sono moti di precessione regolare.

Dimostrazione. Se l'ellissoide è rotondo il punto di contatto P descrive sul piano fisso (e anche sull'ellissoide) una circonferenza. Quindi la distanza $|OP|$ è costante, col che $|\omega|$ è costante. Siccome P sta sull'asse di Mozzi, i coni di Poincaré sono rotondi. Quello mobile rotola su quello fisso con velocità costante perché è costante l'energia cinetica. ■

OSSERVAZIONE 2. L'equazione cardinale (1) è equivalente all'equazione vettoriale

$$(9) \quad \dot{K} = K \times \omega$$

dove ora la derivata temporale s'intende riferita al corpo rigido. Infatti denotate con DK e con $D'K$ le derivate temporali di un vettore generico K fatte rispetto allo riferimento fisso e al riferimento solidale al corpo rigido, vale la formula (§5, Cap. III)

$$DK = D'K + \omega \times K.$$

Sicché l'equazione (1), $DK = 0$, è equivalente a $D'K + \omega \times K = 0$, cioè alla (9). La (9) è dunque la seconda equazione cardinale riferita al

corpo, scritta cioè nel riferimento solidale. Se ci si pone nel riferimento solidale (i, j, k) appare più naturale considerare le equazioni di Euler (2) come sistema dinamico nello spazio $\mathbb{R}^3$ delle componenti

$$(10) \quad x = Ap, \quad y = Bq, \quad z = Cr$$

del vettore momento angolare $\mathbf{K}$ rispetto alla terna solidale. Il sistema (2) è allora equivalente al sistema normale

$$(11) \quad \begin{cases} \dot{x} = (c - b) y z \\ \dot{y} = (a - c) z x \\ \dot{z} = (b - a) x y \end{cases}$$

posto (si suppone, al solito, che nessuno dei momenti principali d'inerzia sia nullo)

$$(12) \quad a = \frac{1}{A}, \quad b = \frac{1}{B}, \quad c = \frac{1}{C}.$$

Questo sistema possiede due integrali primi. Il primo è conseguente all'integrale dell'energia $2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{costante}$ e si scrive

$$(13) \quad ax^2 + by^2 + cz^2 = h^2.$$

Il secondo è $|\mathbf{K}| = \text{costante}$ ($\mathbf{K}$, costante nello spazio, non è costante rispetto al corpo rigido ma è costante il suo modulo) cioè

$$(14) \quad x^2 + y^2 + z^2 = k^2.$$

Le orbite del sistema dinamico sono dunque date dall'intersezione delle sfere di equazione (14) con gli ellissoidi di equazione (13) che prendono il nome di **ellissoidi dell'energia**. Si tratta di curve chiuse, che degenerano nei vertici degli ellissoidi (gli assi (x, y, z) sono luogo di punti singolari). Lo studio di queste curve consente tra l'altro di ottenere un teorema sulla stabilità dei moti di Poincaré stazionari intorno agli assi principali d'inerzia. Si consideri il caso di un corpo rigido asimmetrico rispetto ad O : l'ellissoide d'inerzia non è rotondo (nel caso simmetrico, come si è già osservato, i moti del corpo rigido sono di precessione regolare). Si supponga

$$A < B < C \quad (a > b > c).$$

A seconda dei valori delle costanti $h = \sqrt{2T}$ e $k = |\mathbf{K}|$ l'intersezione della sfera (14) di raggio k con l'ellissoide (13) di semiassi $(h\sqrt{A}, h\sqrt{B}, h\sqrt{C})$ è di vario tipo. (i) Se $k < h\sqrt{C}$, è vuota; la sfera è interna all'ellissoide e non vi è alcun moto reale; questa relazione tra le costanti è impossibile. (ii) Se $k = h\sqrt{C}$, è costituita dai due vertici dell'ellissoide sull'asse z . (iii) Se $h\sqrt{B} > k > h\sqrt{C}$, è costituita da due curve chiuse, simmetriche rispetto al piano (x, y) , intorno ai suddetti vertici. (iv) Se $k = h\sqrt{B}$, è costituita da due circonferenze passanti per i vertici dell'asse y . (v) Se $h\sqrt{A} > k > h\sqrt{B}$, è costituita da due curve chiuse simmetriche rispetto al piano (y, z) . (vi) Se $k = h\sqrt{A}$, è costituita dai due vertici sull'asse x . (vii) Se infine $k > h\sqrt{A}$, è vuota e anche questa relazione tra le costanti è impossibile. Nei casi (iii) e (v) si hanno dei moti di $\mathbf{K}$ periodici. Nei casi (ii) e (vi) il vettore $\mathbf{K}$ è costante anche nel corpo ed i moti del corpo rigido sono stazionari. Questi moti sono stabili, nel senso che una piccola perturbazione trasforma il moto stazionario in una piccola orbita chiusa di $\mathbf{K}$. Il caso singolare (iv) comprende invece due distinte situazioni: quella di un moto stazionario intorno all'asse y e quella di un moto di $\mathbf{K}$ lungo una semicirconferenza (si tratta di un moto asintotico). Di qui si osserva che il moto stazionario intorno all'asse y è instabile. Si è così dimostrato che i moti stazionari intorno agli assi di massimo e minimo momento d'inerzia sono stabili, quelli intorno all'asse intermedio sono instabili.

OSSERVAZIONE 3. Si considerino gli endomorfismi antisimmetrici aggiunti di $\mathbf{K}$ e ω :

$$(15) \quad \mathbf{L} = *\mathbf{K}, \quad \mathbf{\Omega} = *\omega.$$

Poiché vale l'uguaglianza (§11.3, Cap. I, Oss. 4)

$$*(\mathbf{K} \times \omega) = [*K, *\omega] = [\mathbf{L}, \mathbf{\Omega}],$$

dove

$$[\mathbf{L}, \mathbf{\Omega}] = \mathbf{L}\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}\mathbf{L},$$

l'equazione (9) risulta essere equivalente all'equazione

$$(16) \quad \dot{\mathbf{L}} = [\mathbf{L}, \mathbf{\Omega}]$$

Si può riconoscere direttamente l'equazione (16) considerando le matrici

$$\mathbf{L} = (L_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & Cr & -Bq \\ -Cr & 0 & Ap \\ Bq & -Ap & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Omega = (\Omega_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix},$$

le quali rappresentano proprio le forme bilineari antisimmetriche aggiunte di $\mathbf{K}$ e ω (§11.2, Cap. I; si conviene che il primo indice α sia indice di riga). Il commutatore $\mathbf{C} = [\mathbf{L}, \Omega] = \mathbf{L}\Omega - \Omega\mathbf{L}$ delle due matrici ha componenti

$$C_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha\gamma}L_{\gamma\beta} - L_{\alpha\gamma}\Omega_{\gamma\beta},$$

quindi la matrice $(C_{\alpha\beta})$ è il prodotto righe per colonne della matrice Ω per la matrice $\mathbf{L}$ meno il prodotto in ordine inverso. Risulta:

$$(C_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & (A-B)pq & (A-C)pr \\ (B-A)pq & 0 & (B-C)qr \\ (C-A)pr & (C-B)qr & 0 \end{pmatrix}.$$

Si vede allora che le equazioni di Euler (2) equivalgono proprio alle equazioni

$$\dot{L}_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta},$$

quindi all'equazione (16).

OSSERVAZIONE 4. Un'equazione differenziale del tipo (16), coinvolgente endomorfismi $\mathbf{L}$ e Ω sopra uno spazio vettoriale E reale e a dimensione finita (quindi coinvolgente matrici reali quadrate), prende il nome di **equazione di Lax** (Peter Lax, Courant Institute di New York). Si dice inoltre che un sistema dinamico, ossia un campo vettoriale $\mathbf{X}$ sopra uno spazio di coordinate (x^α) ammette una **rappresentazione di Lax** se il sistema differenziale del primo ordine ad esso associato risulta traducibile in un'equazione del tipo (16). L'utilità della rappresentazione di Lax risiede nel fatto che da essa si ricavano immediatamente integrali primi. Segue infatti dalla (16) che le tracce

$$(17) \quad F_k = \frac{1}{k} \operatorname{tr}(\mathbf{L}^k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

sono integrali primi (il fattore $\frac{1}{k}$ è conveniente per ragioni formali). Infatti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \frac{d}{dt} \operatorname{tr}(\mathbf{L}^k) &= \operatorname{tr}(\dot{\mathbf{L}} \mathbf{L}^{k-1}) \\ &= \operatorname{tr}([\mathbf{L}, \Omega] \mathbf{L}^{k-1}) \\ &= \operatorname{tr}(\mathbf{L} \Omega \mathbf{L}^{k-1} - \Omega \mathbf{L}^k) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Anzi, se vale anche la condizione

$$(18) \quad \operatorname{tr}(\dot{\mathbf{L}} \Omega) = \operatorname{tr}(\dot{\Omega} \mathbf{L}),$$

allora anche la funzione

$$(19) \quad T = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{L} \Omega)$$

è un integrale primo. La dimostrazione è analoga alla precedente.

Se gli endomorfismi $\mathbf{L}$ e Ω sono antisimmetrici, come nel caso delle equazioni di Euler-Poincot, tutti gli F_k sono nulli per k dispari. Per $k = 2$, ricordato che per qualunque vettore $\mathbf{K} = *\mathbf{L}$ si ha

$$\operatorname{tr}(\mathbf{L}^2) = -2\mathbf{K}^2,$$

si vede che è proprio

$$F_2 = -\mathbf{K}^2.$$

Per valori pari di k si hanno integrali primi dipendenti da questo. Infine, poiché per due qualunque vettori $\mathbf{K} = *\mathbf{L}$ e $\omega = *\Omega$ vale la formula

$$\operatorname{tr}(\mathbf{L} \Omega) = -2\mathbf{K} \cdot \omega,$$

si vede che l'integrale primo (19) coincide proprio con l'energia cinetica, mentre la (18) è vera perché $\dot{\mathbf{K}} \cdot \omega = \mathbf{K} \cdot \dot{\omega}$ (per verificare quest'uguaglianza basta ricordare che $\mathbf{K} = \mathbf{I}_O(\omega)$).

OSSERVAZIONE 5. Si consideri il problema, puramente cinematico, di determinare il moto di un corpo rigido con un punto fisso conoscendo la sua velocità angolare in funzione del tempo $\omega(t)$. Il moto rigido è rappresentato da una rotazione in funzione del tempo $\mathbf{Q}(t)$. Se denotiamo con $(\mathbf{c}_\alpha)$ una terna fissa e con $(\mathbf{u}_\alpha) = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ una terna solidale (entrambe ortonormali e centrate nel punto fisso O) la posizione del corpo rigido è definita dalle equazioni

$$(20) \quad \mathbf{u}_\alpha = \mathbf{Q}(\mathbf{c}_\alpha).$$

Un primo metodo consiste nell'integrare il sistema dinamico

$$(21) \quad \dot{\mathbf{Q}} = \Omega \mathbf{Q}$$

nell'incognita $\mathbf{Q}$ dove l'endomorfismo antisimmetrico $\mathbf{\Omega} = *\boldsymbol{\omega}$ è noto in funzione del tempo. L'equazione (21) si trae direttamente dalla definizione di $\mathbf{\Omega}$: $\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^{-1}$. Si tratta di un sistema a nove funzioni incognite scalari, le componenti di $\mathbf{Q}$. Si osservi però che dall'equazione (21) segue

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}) = \dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{Q}} = -\mathbf{Q}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{Q} = 0.$$

Dunque se inizialmente $\mathbf{Q}$ è una rotazione, cioè se $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{1}$, lo è necessariamente per tutti gli istanti. Quasi sempre però il vettore velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ ottenuto per esempio integrando le equazioni di Euler, è espresso in componenti non secondo la terna fissa ($\mathbf{c}_\alpha$) ma secondo la terna solidale ($\mathbf{u}_\alpha$). La questione è tuttavia immediatamente risolta perché una proprietà caratteristica delle rotazioni è proprio quella di avere uguali componenti rispetto alla terna fissa e alla terna solidale. Si ha infatti, tenuto conto della (20):

$$\mathbf{Q}(\mathbf{c}_\alpha) \cdot \mathbf{c}_\beta = \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{u}_\beta) = \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{Q}^T(\mathbf{u}_\beta) = \mathbf{Q}(\mathbf{u}_\alpha) \cdot \mathbf{u}_\beta.$$

Un secondo metodo, che in sostanza è una riduzione del precedente, prende in considerazione un vettore fisso nello spazio $\mathbf{c}$. Vale per un tale vettore l'equazione del tipo (9)

$$(22) \quad \dot{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \times \boldsymbol{\omega},$$

dove la derivata temporale è riferita al corpo rigido. Quest'equazione vettoriale si può intendere come sistema dinamico nell'incognita $\mathbf{c}$, noto il vettore $\boldsymbol{\omega}$ in funzione del tempo. Se si denotano con (α, β, γ) le componenti di $\mathbf{c}$ secondo la terna solidale principale d'inerzia, rispetto alla quale $\boldsymbol{\omega}$ ha componenti (p, q, r) , la (22) si traduce nelle tre equazioni scalari

$$(23) \quad \begin{cases} \dot{\alpha} = r\beta - q\gamma, \\ \dot{\beta} = p\gamma - r\alpha, \\ \dot{\gamma} = q\alpha - p\beta, \end{cases}$$

Un integrale primo è il modulo di $\mathbf{c}$, cioè la quantità $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$. Si può quindi scegliere $\mathbf{c}$ unitario. Se si fanno assumere inizialmente a $\mathbf{c}$ i tre valori ($\mathbf{c}_\alpha$) della terna di riferimento fissa, si ricostruisce la matrice

$\mathbf{Q}$ ⁽¹⁾. L'integrazione di questo sistema non è in generale riconducibile alle quadrature ⁽²⁾. Lo è però nel caso dei moti alla Poincaré. Si consideri infatti come vettore fisso il vettore $\mathbf{K}$. Se (α, β, γ) sono i suoi coseni direttori secondo la terna principale d'inerzia, posto $K = |\mathbf{K}|$, si ha

$$(24) \quad K\alpha = Ap, \quad K\beta = Bq, \quad K\gamma = Cr.$$

Se si fanno intervenire gli angoli di Euler (θ, ϕ, ψ) e si sceglie la terna fissa in modo che $\mathbf{c} = \mathbf{c}_3$ sia parallelo e concorde con $\mathbf{K}$, utilizzando le (5) del §8.1 si trova che

$$(25) \quad \cos \theta = \frac{Cr}{K}, \quad \tan \phi = \frac{Ap}{Bq}.$$

Gli angoli di nutazione e di rotazione propria (θ, ψ) sono quindi determinati in funzione del tempo attraverso (p, q, r) . Utilizzando inoltre le prime due equazioni del sistema (3) del §8.1 si trova che ⁽³⁾

$$(26) \quad \dot{\psi} = \frac{p \sin \phi + q \cos \phi}{\sin \theta}.$$

L'angolo di precessione ψ in funzione del tempo è quindi determinato con una quadratura. In generale, se si vogliono utilizzare gli angoli di Euler per rappresentare le rotazioni, si deve considerare, come si è detto, il sistema dinamico fornito dalle equazioni (3) del §8.1 risolte rispetto alle derivate.

8.3. Corpo rigido con un asse fisso

Consideriamo infine il caso di **un corpo rigido con asse fisso**. Le forze vincolari si esplicano tutte sull'asse fisso, quindi, in assenza di

⁽¹⁾ Si noti che, fissato $\mathbf{c}$ la conoscenza dei tre coseni direttori (α, β, γ) rispetto alla terna solidale $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ determina la posizione di quest'ultima rispetto alla terna fissa soltanto a meno di una rotazione intorno a $\mathbf{c}$. Il vettore unitario $\mathbf{c}$ mobile rispetto al corpo e di componenti (α, β, γ) prende il nome di **vettore di Poisson**.

⁽²⁾ Per un primo approccio a questo problema si veda p.es. T. Levi-Civita, U. Amaldi, *Lezioni di Meccanica Razionale* (Zanichelli), Vol. I, Cap. IV, §8.

⁽³⁾ Si veda ancora il Levi-Civita, Amaldi, Vol. II, Cap. VIII, §3.

attriti, il loro momento assiale rispetto all'asse fisso a è da ritenersi nullo. Essendo l'asse fisso a asse di Mozzi e quindi ω parallelo al suo versore $\mathbf{u}$, posto

$$\omega = \omega \mathbf{u},$$

risulta

$$(1) \quad K^a = K_O \cdot \mathbf{u} = I_O(\omega) \cdot \mathbf{u} = \omega I_O(\mathbf{u}) = \omega I^a,$$

essendo I^a il momento d'inerzia rispetto all'asse a . Pertanto la seconda equazione cardinale proiettata sull'asse a diventa (si veda la (24) del §7)

$$(2) \quad I^a \dot{\omega} = M^a.$$

La posizione del corpo rigido è determinata dall'angolo di rotazione ϑ concorde col versore $\mathbf{u}$, per cui $\omega = \dot{\vartheta} \mathbf{u}$. L'equazione (2) diventa

$$(3) \quad I^a \ddot{\vartheta} = M^a.$$

Il momento assiale delle forze esterne attive M^a dipende in generale dalla posizione e dalla velocità angolare del corpo rigido, quindi è una funzione nota di ϑ e $\dot{\vartheta}$. Pertanto la sola equazione (3) è sufficiente a determinare il moto.

ESEMPIO 1. Il pendolo composto. È un corpo rigido vincolato a ruotare senza attrito attorno ad un asse fisso orizzontale, detto **asse di sospensione**, e soggetto alla sola forza peso. Sia O il punto dell'asse di sospensione a proiezione ortogonale del baricentro G su a . Il punto O prende il nome di **centro di sospensione**. Se si misura l'angolo di rotazione ϑ a partire dalla posizione in cui il vettore OG è verticale discendente risulta

$$M^a = -mgd \sin \vartheta, \quad d = |OG|.$$

Pertanto l'equazione di moto (3) diventa

$$(4) \quad I^a \ddot{\vartheta} + mgd \sin \vartheta = 0.$$

Se si pone

$$(5) \quad l = \frac{I^a}{md},$$

si ottiene un'equazione analoga a quella del pendolo semplice di lunghezza l :

$$(6) \quad \ddot{\vartheta} + \frac{g}{l} \sin \vartheta = 0.$$

Questa lunghezza viene detta **lunghezza ridotta** del pendolo. Il punto P sulla retta OG a distanza l da O prende il nome di **centro di oscillazione** del pendolo. La retta per P parallela all'asse di sospensione prende il nome di **asse di oscillazione**. La denotiamo con a' e poniamo $d' = |PG|$. L'interesse di queste definizioni risiede nel seguente classico **teorema di Huygens**:

PROPOSIZIONE 1. Un pendolo composto oscilla nello stesso modo scambiando l'asse di sospensione col corrispondente asse di oscillazione.

Dimostrazione. Sia g l'asse per il baricentro parallelo ad a . Per il teorema di Huygens relativo ai momenti d'inerzia si ha

$$I^a = I^g + md^2,$$

quindi

$$(7) \quad l = \frac{I^g}{md} + d.$$

Di qui si deduce innanzitutto che $l > d$, quindi che G è compreso tra O e P . Se ora si assume come asse fisso l'asse a' , in analogia con la (7), deve essere

$$l' = \frac{I^g}{md'} + d'.$$

Tenuto allora conto che $d' = l - d$, di qui e dalla (7) si deduce

$$l' = \frac{I^g}{md'} + \frac{I^g}{md}.$$

Dalla simmetria di questa formula segue $l = l'$ e il teorema di Huygens è dimostrato. ■

OSSERVAZIONE 7. Se un corpo rigido è vincolato in maniera tale da possedere un solo *grado di libertà*, cioè in maniera tale che ogni sua posizione è determinata dalla conoscenza di un solo parametro (per esempio un angolo, come nel caso di un asse fisso), allora l'integrale primo

dell'energia (se sussiste) fornisce un'equazione differenziale sufficiente a determinare il moto. Per esempio nel caso del pendolo composto si ha

$$T = \frac{1}{2} I^a \dot{\vartheta}^2, \quad U = mgd \cos \vartheta,$$

e quindi

$$\frac{1}{2} I^a \dot{\vartheta}^2 - mgd \cos \vartheta = h.$$

Derivando questa rispetto al tempo e dividendo per $\dot{\vartheta}$ si ritrova l'equazione di moto (4) (che resta valida anche per $\dot{\vartheta} = 0$).

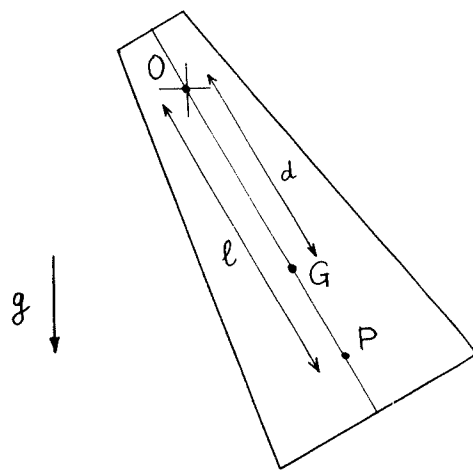


Fig. 8.3: il teorema di Huygens.

CAPITOLO V

LA MECCANICA DI LAGRANGE (Meccanica Analitica)

Joseph-Louis Lagrange (Torino 1736 - Parigi 1813) pubblica nel 1788 la "Mécanique Analytique". Scrive nell' "avvertissement", con piena coscienza della grandezza dell'opera compiuta:

"Si hanno già diversi Trattati di Meccanica, ma il piano di questo è interamente nuovo. Mi sono proposto di ridurre la teoria di questa Scienza, e l'arte di risolvere i problemi che ad essa sono riferiti, a delle formule generali, il cui semplice sviluppo dia tutte le equazioni necessarie per la soluzione di ciascun problema. Spero che la maniera con cui ho cercato di raggiungere quest'obiettivo, non lascerà niente a desiderare.

Quest'Opera avrà d'altronde un'altra utilità; riunirà e presenterà sotto uno stesso punto di vista, i differenti Principi trovati finora per facilitare la soluzione di questioni di Meccanica, ne mostrerà il legame e la mutua dipendenza, e consentirà di giudicare la loro esattezza e la loro portata.

[...] Non si troveranno figure in quest'Opera. I metodi che vi espongo non richiedono ragionamenti geometrici o meccanici, ma solamente delle operazioni algebriche, assoggettate ad una marcia regolare e uniforme. Coloro che amano l'Analisi, vedranno con piacere la Meccanica diventarne una nuova branca, e mi saranno grati di averne così esteso il dominio."

Questo capitolo è dedicato ad una trattazione in chiave moderna delle idee fondamentali di Lagrange. La Meccanica Analitica, in alternativa alla Meccanica di Newton e Euler, trasferisce l'analisi dei sistemi meccanici dallo spazio affine tridimensionale euclideo alle varietà delle configurazioni e a varietà associate (fibrati tangenti e cotangenti), utilizzando le tecniche della geometria differenziale ed il calcolo vettoriale sulle varietà.

1. Varietà differenziabili

La nozione di **varietà differenziabile**, fondamentale per la moderna Geometria Differenziale, sorge dalla necessità di operare con le tecniche del calcolo differenziale ed integrale su spazi di natura più generale degli spazi affini e soltanto *localmente* identificabili con aperti di $\mathbb{R}^n$.

DEFINIZIONE 1. Sia Q un insieme, i cui elementi chiameremo **punti**. Dicesi **carta di dimensione n** su Q un'applicazione iniettiva

$$\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

il cui **dominio** U è un sottoinsieme di Q e la cui **immagine** $\varphi(U)$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$. Le n funzioni $q^i: U \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n$) tali che per ogni $x \in U$

$$\varphi(x) = (q^1(x), \dots, q^n(x))$$

prendono il nome di **coordinate** associate alla carta φ . Si dice anche che le (q^i) formano un sistema di **coordinate locali** sull'insieme Q . Denoteremo una generica carta con la coppia (U, φ) o con (U, q^i) .

Una carta consente di rappresentare il dominio $U \subset Q$ in un aperto di $\mathbb{R}^n$ e quindi di operare su di questo con gli strumenti dell'analisi. Va osservato che pur essendo le coordinate (q^i) definite come **funzioni reali** sopra U , esse possono anche interpretarsi come **variabili reali**. Ad esempio, data una funzione reale $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ sopra Q e data una carta (U, q^i) , risulta definita una funzione $\bar{f}: \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \bar{f}(q^1(x), \dots, q^n(x))$ per ogni punto $x \in U$, cioè tale che $\bar{f} = f \circ \varphi^{-1}$. Diciamo che la funzione $\bar{f}$ è la **funzione rappresentatrice** o la **rappresentazione locale** della funzione f secondo la carta o secondo le coordinate (q^i) , funzione che per semplicità denoteremo con $f(q^i)$.

DEFINIZIONE 2. Due carte di dimensione n , $\varphi_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\varphi_2: U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, si dicono **C^k -compatibili** se $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ oppure se, quando $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, risultano verificate le due condizioni seguenti:

- (i) gli insiemi $O_1 = \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ e $O_2 = \varphi_2(U_1 \cap U_2)$, immagini dell'intersezione dei domini secondo le due carte, sono entrambi aperti;
- (ii) le **funzioni di transizione** $\varphi_{12}: O_1 \rightarrow O_2$ e $\varphi_{21}: O_2 \rightarrow O_1$, definite da $\varphi_{12} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ e $\varphi_{21} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$, dove φ_1 e φ_2 s'intendono ristrette all'intersezione $U_1 \cap U_2$, sono di classe C^k .

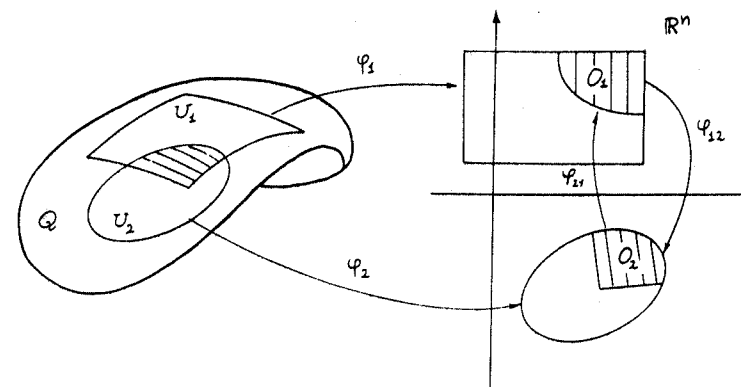


Fig. 1.1: funzioni di transizione.

Le funzioni di transizione sono applicazioni, una inversa dell'altra, tra due aperti O_1 e O_2 di $\mathbb{R}^n$ rappresentate da funzioni del tipo

$$(2) \quad q_2^i = \varphi_{12}^i(q_1^h), \quad q_1^i = \varphi_{21}^i(q_2^h),$$

dove (q_1^i) e (q_2^i) sono le coordinate corrispondenti alle carte φ_1 e φ_2 . Le (2) esprimono il **cambiamento di coordinate** nel passaggio da una carta all'altra. Le funzioni reali $\varphi_{12}^i(q_1^h)$ e $\varphi_{21}^i(q_2^h)$ sono per definizione di classe C^k , ammettono cioè derivate parziali continue almeno fino all'ordine k . Nel caso in cui $k \geq 1$, stante l'invertibilità delle funzioni di transizione, le corrispondenti **matrici Jacobiane**

$$(3) \quad \left(\frac{\partial q_1^i}{\partial q_2^h} \right), \quad \left(\frac{\partial q_2^i}{\partial q_1^h} \right)$$

sono regolari e una inversa dell'altra.

DEFINIZIONE 3. Dicesi **atlante** sull'insieme Q un insieme di carte compatibili $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n; \alpha \in \mathcal{I}\}$ ($\mathcal{I}$ è un insieme di indici) i cui domini (U_α) formano un ricoprimento di Q . Un insieme Q dotato

di un atlante prende il nome di **varietà differenziabile** (o **varietà differenziale**) di **dimensione** n .

OSSERVAZIONE 1. Un dato atlante può essere arricchito con l'aggiunta di carte. Un atlante si dice **saturato** (o **massimale**) se contiene tutte le possibili carte ad esso compatibili. Per varietà differenziabile s'intende, più precisamente, un insieme dotato di un atlante massimale.

OSSERVAZIONE 2. Un atlante induce sull'insieme Q una topologia, quindi una varietà differenziabile è anche uno spazio topologico. Un sottoinsieme $A \subset Q$ è per definizione un **aperto** se per ogni carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ l'insieme $\varphi_\alpha(A \cap U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto (nella topologia di $\mathbb{R}^n$). I sottoinsiemi aventi questa proprietà soddisfano agli assiomi degli aperti. Infatti, poiché ogni φ_α è iniettiva vale l'uguaglianza $\varphi_\alpha(A_1 \cap A_2 \cap U_\alpha) = \varphi_\alpha(A_1 \cap U_\alpha) \cap \varphi_\alpha(A_2 \cap U_\alpha)$. Quindi se A_1 e A_2 sono aperti, anche la loro intersezione è un aperto. Inoltre, per una qualunque collezione di sottoinsiemi $\{A_i\}$ di Q vale l'identità $\varphi_\alpha((\cup_i A_i) \cap U_\alpha) = \cup_i \varphi_\alpha(A_i \cap U_\alpha)$, quindi se questi sono aperti anche la loro unione è un aperto. Infine, siccome le immagini dei domini delle carte sono aperti per definizione, l'insieme Q è un aperto.

OSSERVAZIONE 3. Nella topologia indotta da un atlante i domini delle carte sono aperti e le carte sono degli omeomorfismi. Per verificarlo occorre dimostrare che una carta $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ (che, per definizione, stabilisce una corrispondenza biunivoca tra il suo dominio e la sua immagine) è bicontinua, cioè che: (i) se $B \subset \varphi(U)$ è un aperto, allora l'insieme $A = \varphi^{-1}(B)$ è un aperto, (ii) se $A \subset U$ è un aperto, allora $\varphi(A)$ è un aperto. (i) Oltre alla φ si consideri una qualunque altra carta compatibile $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $A \cap U_\alpha \neq \emptyset$. La funzione di transizione $\psi: \varphi(U \cap U_\alpha) \rightarrow \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$, è per definizione almeno C^0 , cioè continua insieme all'inversa, quindi è un omeomorfismo. D'altra parte $\varphi_\alpha(A \cap U_\alpha) = \psi(B \cap \varphi(U \cap U_\alpha))$, dove B è aperto per ipotesi e $\varphi(U \cap U_\alpha)$ è aperto per definizione di compatibilità. Dunque $\varphi_\alpha(A \cap U_\alpha)$ è un aperto per ogni carta compatibile. Ciò dimostra che A è un aperto. (ii) Questa seconda proprietà è ovvia in base alla definizione di aperto: l'immagine di A secondo una qualunque carta è un aperto e φ è una di queste carte. Si noti bene che, nella maggior parte dei testi di Geometria Differenziale, una varietà differenziabile è definita come insieme Q dotato di una struttura topologica e di un atlante le cui carte sono omeomorfismi di aperti di Q su aperti di $\mathbb{R}^n$.

OSSERVAZIONE 4. La topologia indotta da un atlante può non essere di **Hausdorff** (cioè **separabile**: punti distinti ammettono intorni disgiunti) anche se ogni dominio di carta, preso a se stante, è omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$ (si veda l'Esempio 3 qui di seguito). In queste lezioni (così come nella maggior parte dei testi di Geometria Differenziale) per varietà differenziabile s'intende un'insieme dotato di un atlante la cui topologia indotta è separabile e a base numerabile.

OSSERVAZIONE 5. La compatibilità è un requisito essenziale richiesto a più carte sul medesimo insieme affinché, considerate nel loro complesso, possano fornire attraverso le parametrizzazioni locali una visione d'insieme coerente (in particolare, come si è visto, indurre una topologia). Si osservi che un atlante di classe C^k può essere considerato come atlante di classe C^h con $h < k$. Si può tuttavia dimostrare che una varietà differenziabile paracompatta di classe C^k con $k \geq 1$ ammette un atlante di classe C^h per ogni $h > k$. Dunque una varietà differenziabile paracompatta di classe C^k con $k \geq 1$ (è essenziale che non sia solo $k = 0$, cioè che la compatibilità tra le carte non sia solo continua) ammette una struttura di varietà differenziabile di classe C^∞ . Pertanto si supporrà tacitamente che le varietà considerate siano di classe C^∞ .

ESEMPIO 1. L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ è una varietà di dimensione 1. L'identità $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una carta (detta **carta naturale**) che da sola costituisce un atlante. Analogamente, l'insieme $\mathbb{R}^n$ è una varietà di dimensione n e più in generale gli spazi affini sono varietà.

ESEMPIO 2. Uno stesso insieme può possedere atlanti fra di loro non compatibili (anche se con la stessa topologia). Sull'insieme $\mathbb{R}$ la carta $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^3$ non è compatibile con la carta naturale perché una delle due funzioni di transizione è la radice cubica che non è derivabile nell'origine.

ESEMPIO 3. Sia Q l'insieme unione delle tre semirette A, B, C del piano $\mathbb{R}^2$ definite da:

$$\begin{cases} A: & y = 0, x < 0, \\ B: & y = 1, x \geq 0, \\ C: & y = -1, x \geq 0. \end{cases}$$

Si considerino su Q le carte

$$\varphi_1: A \cup B \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_2: A \cup C \rightarrow \mathbb{R},$$

ottenute restringendo la proiezione di $\mathbb{R}^2$ sull'asse x agli insiemi $A \cup B$ e $A \cup C$. Queste due carte sono compatibili perché le funzioni di transizione coincidono con l'identità sulla semiretta aperta A , intersezione dei loro domini. Esse formano inoltre un atlante di Q , perché i loro domini ricoprono Q . La topologia indotta non è separabile perché i punti estremi delle due semirette B e C (di coordinate $(0, 1)$ e $(0, -1)$) non ammettono intorno disgiunti.

OSSERVAZIONE 6. Sottovarietà aperte. Se Q è una varietà differenziabile allora ogni suo aperto A possiede una naturale struttura di varietà differenziabile (con la stessa dimensione). Si verifica infatti che se $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n; \alpha \in \mathcal{I}\}$ è un atlante di Q allora le restrizioni delle sue carte ad un aperto $A \subset Q$ formano un atlante $\{\varphi_\alpha|_A: U_\alpha \cap A \rightarrow \mathbb{R}^n; \alpha \in \mathcal{I}\}$ di A .

OSSERVAZIONE 7. Sottovarietà di una varietà differenziabile. Una sottovarietà S di una varietà differenziabile Q è un sottoinsieme di Q tale che per ogni punto $p_0 \in S$ esiste una carta $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ con dominio contenente p_0 , di coordinate (q^i) tali che

$$p \in S \cap U \iff q^{k+1}(p) = 0, \dots, q^n(p) = 0 \quad (k < n),$$

cioè tale che i punti di S che stanno nel dominio della carta sono caratterizzati dall'annullarsi di $n - k$ coordinate. Una tale carta si dice **carta adattata** a S (e le corrispondenti coordinate si dicono **adattate**). Si può dimostrare che la restrizione $\varphi|_S: U \cap S \rightarrow \mathbb{R}^k$ è una carta di S di dimensione k e che l'insieme delle carte adattate induce un atlante su S . Si dimostra anche che la topologia indotta da questo atlante coincide con la topologia indotta da Q a S .

OSSERVAZIONE 8. Applicazioni differenziabili. Un'applicazione $f: M \rightarrow N$ tra due varietà differenziabili M ed N (di dimensione m ed n rispettivamente), assegnate due carte su M ed N di coordinate (x^i) e (y^a) rispettivamente ($i = 1, \dots, m, a = 1, \dots, n$), è rappresentabile da equazioni del tipo

$$y^a = f^a(x^i)$$

cioè da n funzioni reali nelle m variabili reali (x^i) . L'applicazione f si dice di classe C^k (in particolare differenziabile) se ogni sua rappresentazione in coordinate è di classe C^k (in particolare C^∞). Si dice **rango**

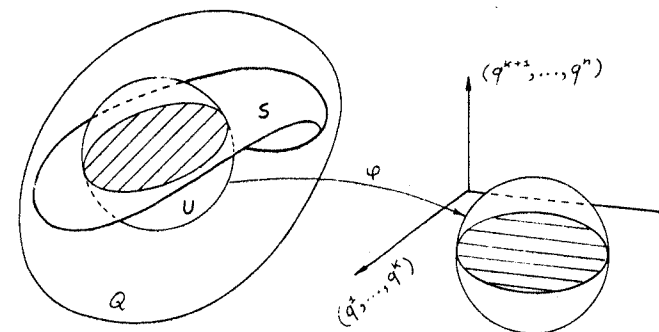


Fig. 1.2: sottovarietà.

dell'applicazione f in un punto di M il rango della matrice $m \times n$ delle derivate parziali

$$\left(\frac{\partial f^a}{\partial x^i} \right)$$

calcolate in quel punto. Si può dimostrare che questo non dipende dalla scelta delle coordinate. Si dice che f è una **immersione** di M in N se $m \leq n$ e se il rango di f è ovunque massimo ($= m$). Se f è iniettiva allora si dice che l'immagine $S = f(M)$ è una **sottovarietà immersa** di M . Questo concetto è più generale di quello di sottovarietà dato all'Oss. 7 perché la topologia di S indotta da N tramite f può essere diversa dalla topologia indotta da N . Se le due topologie coincidono, cioè se S è una sottovarietà nel senso anzidetto, si dice che f è una **immersione topologica** (o **embedding**). Si dice che f è un **diffeomorfismo** se è invertibile e se f ed f^{-1} sono entrambe differenziabili. Le due varietà M ed N si dicono allora **diffeomorfe** e si usa scrivere $M \simeq N$. Esse hanno la stessa dimensione, $m = n$.

OSSERVAZIONE 9. Varietà prodotto. Se M e N sono due varietà differenziabili, di dimensione m ed n rispettivamente, allora il loro pro-

dotto cartesiano $M \times N$ è una varietà differenziabile di dimensione $m+n$, detta **varietà prodotto**. Si dimostra infatti che i prodotti cartesiani di carte delle due varietà definiscono carte su $M \times N$ che sono fra loro compatibili e quindi che a due atlanti di M ed N corrisponde un atlante di $M \times N$.

OSSERVAZIONE 10. Superfici regolari in uno spazio affine. Si consideri in $\mathbb{R}^m$ il sottinsieme S costituito dai punti soddisfacenti a $r < m$ equazioni indipendenti

$$(\dagger) \quad F^a(x^1, \dots, x^m) = 0 \quad (a = 1, \dots, r).$$

S'intende con ciò che i differenziali delle funzioni F^a sono indipendenti in ogni punto di S , ovvero che in corrispondenza ai punti di S la matrice $r \times m$

$$(\ddagger) \quad \left(\frac{\partial F^a}{\partial x^\alpha} \right)$$

ha rango massimo. L'insieme S è allora una superficie regolare. Dimostriamo che è una sottovarietà di $\mathbb{R}^m$ e quindi essa stessa una varietà (si veda l'Oss. 7). Dire che la matrice $(\ddagger)$ ha rango massimo in un punto di S equivale ad affermare che nell'intorno di quel punto una sua sottomatrice quadrata di ordine massimo r è regolare. Si può supporre, cambiando eventualmente l'ordine delle coordinate, che questa sottomatrice sia composta dalle prime r righe e prime r colonne:

$$\det \left(\frac{\partial F^a}{\partial x^b} \right) \neq 0 \quad (a, b = 1, \dots, r).$$

Ciò posto, si considerino le equazioni

$$\begin{cases} q^a = F^a(x^1, \dots, x^m) \\ q^i = x^i \end{cases} \quad (a = 1, \dots, r; i = r+1, \dots, m).$$

Queste definiscono nuove coordinate (q^a, q^i) in un certo intorno U del punto considerato, perché il corrispondente jacobiano non è nullo:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial q^a}{\partial x^b} & \frac{\partial q^a}{\partial x^i} \\ \frac{\partial q^j}{\partial x^b} & \frac{\partial q^j}{\partial x^i} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F^a}{\partial x^b} & \frac{\partial F^a}{\partial x^i} \\ 0 & \delta_i^j \end{pmatrix} = \det \left(\frac{\partial F^a}{\partial x^b} \right) \neq 0.$$

Poiché la superficie S è nell'intorno U caratterizzata dalle equazioni $q^a = 0$, queste coordinate sono adattate a S . Si è così dimostrato che nell'intorno di ogni punto di S esistono carte adattate e quindi che S è una sottovarietà. Dimostrato che una superficie regolare è una varietà, si può anche dimostrare che una qualunque varietà differenziabile Q può essere *immersa topologicamente* in $\mathbb{R}^N$ con N opportuno non superiore a $2 \dim(Q) + 1$ (**teorema di immersione di Whitney** (1936)), quindi può essere intesa come superficie regolare in $\mathbb{R}^N$. La definizione di immersione topologica è data all'Oss. 8.

OSSERVAZIONE 11. Sottovarietà definite da equazioni. Quanto detto nell'osservazione precedente si può ripetere per un sistema di r funzioni differenziabili (F^a) sopra una varietà Q . Le equazioni $F^a = 0$ definiscono un sottoinsieme $S \subset Q$. Se in ogni punto di S le (F^a) sono indipendenti allora S è una sottovarietà di codimensione r . Più in generale le equazioni $F^a = c^a$, al variare delle costanti $c = (c^a) \in \mathbb{R}^r$, definiscono una partizione su di un sottoinsieme $D \subset Q$ in sottoinsiemi disgiunti S_c (il sottoinsieme D può non essere tutto Q , perché potrebbero esserci dei punti non soddisfacenti alle equazioni per tutte le possibili scelte delle costanti). Se le funzioni sono indipendenti su D , allora le S_c sono sottovarietà, tutte della medesima dimensione, e formano un **fogliettamento** di D (si veda anche il §10, Cap. II).

ESEMPIO 4. La circonferenza $\mathbb{S}_1$. Si consideri l'insieme $\mathbb{S}_1 \subset \mathbb{R}^2$ definito da

$$\mathbb{S}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Si tratta della circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine. Quest'insieme è una curva regolare (superficie regolare di dimensione 1) di $\mathbb{R}^2$ e quindi varietà differenziabile. Tuttavia, per riconoscere direttamente che è una varietà, si possono costruirne delle carte e quindi degli atlanti. Possiamo per esempio definire una carta prendendo come dominio tutta la circonferenza meno un punto A (per esempio il punto $A = (1, 0)$) e considerare l'applicazione che ad ogni altro punto P associa l'angolo compreso tra 0 e 2π (estremi esclusi) che separa P da A . Due carte di questo tipo sono compatibili (perché i due angoli differiscono per una costante) e formano un atlante su $\mathbb{S}_1$. Un'altro tipo di carta è la **proiezione stereografica** rispetto ad un punto N . Si prenda per esempio $N = (0, 1)$. Ad ogni punto P del dominio $U_N = \mathbb{S}_1 - N$ si fa corrispondere il punto P' intersezione della retta per $O = (0, 0)$ ortogonale alla retta ON (in questo caso l'asse x) con la retta NP . L'applicazione

$\varphi_N: U_N \rightarrow \mathbb{R}$ che associa al punto $P = (x, y)$ l'ascissa del punto P' è una carta. Risulta essere

$$\varphi_N(x, y) = \frac{x}{1-y}.$$

Si noti che si ha sempre $\varphi_N \neq 0$, perché il punto $(0, 1)$ è escluso dal dominio della carta. Due carte di questo tipo sono fra loro compatibili e definiscono un atlante. Si prenda per esempio il punto S opposto ad N , nel nostro caso il punto $S = (0, -1)$. La corrispondente carta φ_S è tale che

$$\varphi_S(x, y) = \frac{x}{1+y}.$$

Poiché $(x, y) \in \mathbb{S}_1$, risulta $\varphi_N \cdot \varphi_S = 1$. Il cambiamento di coordinate è allora rappresentato dalla relazione

$$\varphi_N = \frac{1}{\varphi_S},$$

ovunque differenziabile (perché $\varphi_N \neq 0$, $\varphi_S \neq 0$).

ESEMPIO 5. Le sfere $\mathbb{S}_n$. Per ogni intero n poniamo

$$\mathbb{S}_n = \{(x_\alpha) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum (x_\alpha)^2 = 1\}.$$

Per $n = 1$ si ritrova la definizione di $\mathbb{S}_1$. Per $n = 2$ si ha la sfera (unitaria, bidimensionale)

$$\mathbb{S}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Ad ogni prefissato punto N di $\mathbb{S}_2$ corrisponde una proiezione stereografica $\varphi_N: U_N \rightarrow \mathbb{R}^2$ che associa ad ogni punto P di $U_N = \mathbb{S}_2 - N$ il punto P' del piano per l'origine O perpendicolare a ON intersezione con la retta NP . Se per esempio $N = (0, 0, 1)$ questo piano è il piano coordinato (x, y) e quindi

$$\varphi_N(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right).$$

Una proiezione stereografica è una carta. Si dimostra che due proiezioni stereografiche sono compatibili. Due proiezioni stereografiche corrispondenti a punti opposti della sfera formano un atlante. In maniera analoga si costruiscono le proiezioni stereografiche su ogni $\mathbb{S}_n$.

ESEMPIO 6. I tori $\mathbb{T}_n$. Si consideri sulla retta reale $\mathbb{R}$ la relazione di equivalenza $x \simeq x' \iff x - x' \in \mathbb{Z}$ (due numeri sono equivalenti se differiscono per un numero intero). L'insieme delle classi di equivalenza è il **quoziente** di $\mathbb{R}$ rispetto a $\mathbb{Z}$ e si denota con $\mathbb{T}_1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Fissato un numero a si consideri l'intervallo aperto unitario $I_a = (a, a+1)$. L'applicazione identica $I_a \rightarrow \mathbb{R}$ genera un'applicazione $\varphi_a: U_a \rightarrow \mathbb{R}$ sopra l'insieme U_a delle classi di equivalenza rappresentate dai punti di I_a ponendo $\varphi_a([x]) = x$ per ogni $x \in I_a$ (si noti che $U_a = \mathbb{T}_1 - [a]$). Questa è una carta. Due carte di questo tipo sono compatibili, perché le funzioni di transizione si riducono all'identità, e formano un atlante. Dunque $\mathbb{T}_1$ è una varietà differenziabile, di dimensione 1. Si noti che $\mathbb{T}_1$ può considerarsi rappresentato dall'intervallo chiuso $[0, 1]$ dove però gli estremi vanno identificati. Quest'identificazione rende quest'intervallo, quindi $\mathbb{T}_1$, omeomorfo ad una circonferenza. Per precisare questa corrispondenza si consideri l'applicazione $\theta: \mathbb{T}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ che ad ogni classe $[t]$ associa il punto di $\mathbb{S}_1$ determinato dall'angolo $2\pi t$ (misurato in un certo senso, per esempio antiorario, a partire da un certo punto, per esempio $(1, 0)$). Si tratta di un'applicazione biunivoca. Se si prende su $\mathbb{T}_1$ la carta φ_0 , il cui dominio è $U_0 = [0, 1]$, si vede che l'applicazione θ è definita da $\theta([t]) = 2\pi t$ con $0 < t < 1$. L'applicazione θ è dunque invertibile e differenziabile insieme alla sua inversa, quindi un diffeomorfismo. Le due varietà $\mathbb{S}_1$ e $\mathbb{T}_1$ sono pertanto diffeomorfe.

In maniera analoga a quanto visto per $\mathbb{T}_1$ si dimostra che l'insieme $\mathbb{T}_n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, dato dalle classi di equivalenza dei punti di $\mathbb{R}^n$ le cui coordinate differiscono per dei numeri interi, è una varietà differenziabile detta **toro** di dimensione n . Si dimostra che $\mathbb{T}_n$ è diffeomorfo al prodotto cartesiano $\mathbb{S}_1^n = \mathbb{S}_1 \times \dots \times \mathbb{S}_1$, n volte. Si osservi che il toro $\mathbb{T}_2$ può essere rappresentato in un quadrato, per esempio il quadrato unitario $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, dove i lati opposti vengono identificati.

ESEMPIO 7. Gruppi di matrici, gruppi ortogonali. Si denota con $GL(n, \mathbb{R})$ il gruppo delle matrici quadrate (A_i^j) di ordine n di numeri reali a determinante non nullo (**gruppo lineare generale** di ordine n sui reali). Le matrici reali di ordine n formano lo spazio $\mathbb{R}^{n^2}$. Le matrici il cui determinante è nullo formano una superficie regolare S dello spazio $\mathbb{R}^{n^2}$, definita appunto dall'equazione

$$\det(A_i^j) = 0.$$

Essendo una superficie, l'insieme S è chiuso e quindi l'insieme comple-

mentare $GL(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2} - S$ è un aperto di $\mathbb{R}^{n^2}$, quindi una varietà differenziabile (di dimensione n^2).

Si consideri il sottogruppo $O(n)$ delle **matrici ortogonali**, caratterizzate dalle equazioni

$$\sum_{i=1}^n A_h^i A_k^i = \delta_{hk}.$$

Queste equivalgono alle $\frac{1}{2}n(n+1)$ equazioni

$$F^{(h,k)}(A_j^i) \equiv \sum_{i=1}^n A_h^i A_k^i - \delta_{hk} = 0, \quad h \leq k$$

nelle $\mathbb{R}^{n^2}$ variabili (A_j^i) . Si può dimostrare che queste equazioni sono indipendenti (occorre studiare il rango della matrice delle derivate delle funzioni $F^{(h,k)}$ rispetto alle variabili (A_j^i) e mostrare che è massimo).

Dunque $O(n)$ è una superficie regolare di $\mathbb{R}^{n^2}$ di dimensione $\frac{1}{2}n(n-1)$ ($= n^2 - \frac{1}{2}n(n+1)$) quindi una varietà differenziabile. Si tratta di una varietà sconnessa. La componente connessa che contiene la matrice unitaria, composta dalle matrici ortogonali a determinante uguale a 1, è un sottogruppo denotato con $SO(n)$. È interessante e complesso il problema della rappresentazione parametrica di tali matrici, cioè la costruzione di carte di queste varietà (per esempio gli angoli di Euler sono coordinate di una carta di $SO(3)$; un'altro sistema di coordinate è dato dalle componenti delle matrici antisimmetriche 3×3 nella rappresentazione esponenziale delle rotazioni). Questi esempi rientrano in una particolare ma fondamentale classe di varietà: i **gruppi di Lie**. Si dice **gruppo di Lie** un gruppo G dotato di una struttura di varietà differenziabile tale che le applicazioni $G \times G \rightarrow G: (g, h) \mapsto gh$ (prodotto) e $G \rightarrow G: g \mapsto g^{-1}$ (inversione) sono di classe C^∞ .

2. Fibrati tangenti

La nozione di spazio affine si basa essenzialmente su quella di spazio vettoriale, che invece non è coinvolta nella definizione di varietà differenziabile. Per poter estendere alle varietà il calcolo vettoriale occorre definire su queste la nozione di **vettore**.

Sia Q una varietà differenziabile di dimensione n . Come si è detto, una **funzione reale** (o **campo scalare**) di classe C^k su Q è un'applicazione $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ tale che ogni sua rappresentazione locale $f(x^i)$ è di classe C^k . Si denota con $C^k(Q, \mathbb{R})$ l'insieme di tali funzioni. Su di esso sono definite le operazioni di somma e di prodotto che gli conferiscono la struttura di anello commutativo e di spazio vettoriale reale (di dimensione infinita). Denotiamo più brevemente con $\mathcal{F}(Q)$ l'insieme $C^\infty(Q, \mathbb{R})$ delle funzioni reali di classe C^∞ . In particolare, per ogni punto $q \in Q$, denotiamo con $\mathcal{F}_q(Q)$ l'insieme delle funzioni C^∞ definite in un aperto contenente q .

Un'applicazione $\gamma: I \rightarrow Q$ da un intervallo reale $I \subset \mathbb{R}$ ad una varietà Q prende il nome di **curva** su Q . In un qualunque sistema di coordinate (q^i) una curva γ è rappresentata da **equazioni parametriche** del tipo

$$q^i = \gamma^i(t) \quad (i = 1, \dots, n),$$

con t variabile in un opportuno sottointervallo di I . Si conviene che gli intervalli di definizione delle curve contengano lo zero. Una curva si dice **basata** in un punto $q \in Q$ se $\gamma(0) = q$. Il punto q prende anche il nome di **punto base** o **punto iniziale** della curva. Una curva si dice di classe C^k se tali sono le sue rappresentazioni parametriche.

Siamo ora in grado di dare tre definizioni equivalenti di vettore.

DEFINIZIONE 1. Un **vettore tangente** in un punto q ad una varietà Q è una **classe di equivalenza di curve** su Q basate in q . Due curve γ e γ' si dicono **equivalenti** o **tangenti** se

$$(1) \quad \begin{cases} \gamma(0) = \gamma'(0) & (\text{hanno lo stesso punto base}), \\ D(f \circ \gamma)(0) = D(f \circ \gamma')(0), & \forall f \in \mathcal{F}(Q). \end{cases}$$

Si denota con $[\gamma]$ la classe di equivalenza individuata dalla curva γ .

In questa definizione D denota l'operazione di derivazione di funzione reale a variabile reale.

DEFINIZIONE 2. Un **vettore tangente** in un punto q ad una varietà Q è una **derivazione sulle funzioni**, cioè un'applicazione $v: \mathcal{F}_q(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$(2) \quad \begin{cases} v(af + bg) = a v(f) + b v(g), & \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall f, g \in \mathcal{F}_q(Q), \\ v(fg) = v(f)g(q) + v(g)f(q). \end{cases}$$

La prima condizione mostra che v è $\mathbb{R}$ -lineare. La seconda è la **regola di Leibniz**. Il numero $v(f)$ è anche denotato con

$$\langle v, df \rangle$$

ed è chiamato **derivata della funzione f** rispetto al vettore v .

DEFINIZIONE 3. Un **vettore tangente** in un punto q ad una varietà Q è una **classe di equivalenza di coordinate e componenti** cioè di coppie

$$(q^i, v^i)$$

costituite da un sistema di coordinate (q^i) in un intorno di q e da una n -pla di numeri reali (v^i) . Due coppie si dicono equivalenti se

$$(3) \quad v^i = v^{i'} \left(\frac{\partial q^i}{\partial q^{i'}} \right)_q.$$

I numeri (v^i) si dicono **componenti** del vettore secondo le coordinate (q^i) .

Se $[\gamma]$ è una classe di curve equivalenti in un punto $q \in Q$, cioè un vettore tangente secondo la Def. 1, si definisce una derivazione v , cioè un vettore secondo la Def. 2, ponendo

$$(4) \quad \boxed{v(f) = D(f \circ \gamma)(0)}$$

In virtù della stessa definizione di equivalenza $(1)_2$ questa definizione non dipende dalla curva rappresentatrice della classe. Che le proprietà (2) siano verificate segue dal fatto che, introdotte coordinate generiche nell'intorno del punto q , si ha

$$D(f \circ \gamma) = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt},$$

dove è sottintesa la sostituzione delle equazioni parametriche $q^i = \gamma^i(t)$ della curva γ . Per cui, posto

$$(5) \quad \boxed{v^i = D\gamma^i(0)}$$

la (4) equivale a

$$v(f) = v^i \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \right)_q,$$

e le proprietà (2) discendono dalle analoghe proprietà delle derivate parziali. Se si usa un diverso sistema di coordinate $(q^{i'})$, avendosi

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial q^i}{\partial q^{i'}} \frac{dq^{i'}}{dt},$$

si riconosce che tra le componenti (v^i) definite dalla (5) e le analoghe $(v^{i'})$ corrispondenti alle coordinate $(q^{i'})$ sussiste il legame (3). La (4) stabilisce dunque il passaggio dalla Def. 1 alla Def. 3. Se inoltre v è un vettore secondo la Def. 2 allora le sue componenti secondo la Def. 3 sono definite da

$$(6) \quad \boxed{v^i = v(q^i) = \langle v, dq^i \rangle}$$

osservato che le coordinate sono particolari funzioni nell'intorno del punto q . Se $v = [(q^i, v^i)]$ è un vettore secondo la Def. 3 allora una curva tale che $v = [\gamma]$ secondo la Def. 1 ha equazioni parametriche

$$(7) \quad q^i = v^i t + q_0^i,$$

dove (q_0^i) sono le coordinate del punto base q .

OSSERVAZIONE 1. L'attributo *tangente* dato ai vettori così definiti richiama la circostanza che, nel caso in cui Q sia una superficie regolare di un opportuno $\mathbb{R}^N$, questi si identificano proprio coi vettori tangenti alla superficie. La nozione di vettore tangente ad una varietà si riduce, nel caso in cui questa sia uno spazio affine, alla nozione di vettore applicato. Per questo motivo, al posto di *vettore tangente* si può usare il termine **vettore applicato** in q .

Denotiamo con $T_q Q$ l'insieme dei vettori tangenti a Q nel punto $q \in Q$. Usando la Def. 3 si riconosce che esso ha una naturale struttura di spazio vettoriale reale di dimensione n . Lo chiamiamo pertanto **spazio tangente** a Q in q .

Denotiamo con TQ l'insieme di tutti i vettori tangenti alla varietà Q . Esso ha una naturale struttura di varietà differenziabile di dimensione $2n$ che chiamiamo **varietà tangente** o **fibrato tangente** di Q .

Infatti ad ogni carta (U, q^i) su Q corrisponde una carta (TU, q^i, v^i) su TQ , il cui dominio TU è l'insieme di tutti i vettori tangenti nei punti di U : ad ogni $v \in TU$ le (q^i) associano le coordinate del suo punto di applicazione mentre le (v^i) associano le sue componenti secondo queste coordinate. Due carte siffatte sono fra loro compatibili. Infatti se (U, q^i) e $(U', q^{i'})$ sono due carte di Q con $U \cap U' \neq \emptyset$ allora valgono le (3), le quali rappresentano le funzioni di transizione dalla seconda alla prima carta. Le funzioni a secondo membro sono di classe C^∞ sia nelle coordinate $(q^{i'})$ (perché le due carte sono supposte compatibili) sia nelle velocità lagrangiane $(v^{i'})$ (sono addirittura lineari in queste variabili). Lo stesso dicasi per i legami inversi, del tutto analoghi. Dunque i cambiamenti di coordinate $(q^i, v^i) \longleftrightarrow (q^{i'}, v^{i'})$ sopra $TU \cap TU'$ sono di classe C^∞ e le due carte sono compatibili. Partendo da un atlante di Q , con carte di questo tipo si costruisce un atlante su TQ . Dunque TQ è una varietà differenziabile di dimensione $2n$.

Le coordinate (q^i, v^i) su TQ corrispondenti a coordinate (q^i) su Q considerate nel ragionamento precedente si dicono **coordinate fibrato** o **naturali** di TQ . Talvolta si usa anche la notazione $(q^i, \dot{q}^i)$ oppure $(q^i, \delta q^i)$.

L'applicazione $\tau_Q: TQ \rightarrow Q$ che ad ogni vettore tangente associa il punto di Q a cui è applicato si chiama **fibrato tangente** di Q . Una **fibra** di TQ è dunque data da uno spazio tangente $T_q Q$.

Partendo dalla nozione di vettore tangente è possibile definire sulle varietà differenziabili, così come si fa per gli spazi affini, i concetti di campo vettoriale, di campo tensoriale, di forma differenziale, con le relative operazioni.

Per esempio, un **campo vettoriale** (di classe C^k) su di una varietà differenziabile Q è un'applicazione (di classe C^k) $X: Q \rightarrow TQ$ che associa ad ogni punto $q \in Q$ un vettore $X(q) \in T_q Q$ (cioè un vettore applicato in q). Si usa dire anche che un campo vettoriale è una **sezione** del fibrato tangente. Se (q^i, v^i) sono generiche coordinate fibrato su TQ , l'applicazione $X: Q \rightarrow TQ$ è rappresentata da equazioni parametriche del tipo

$$(8) \quad v^i = X^i(q^j)$$

Le funzioni (X^i) sono dette le **componenti del campo vettoriale**. Come nel caso degli spazi affini, un campo vettoriale su di una varietà può essere inteso come campo di velocità, quindi come sistema dinamico generatore di curve integrali e flussi, oppure come derivazione. Nel primo

caso esso si identifica con un sistema di equazioni differenziali del primo ordine in forma normale

$$(9) \quad \boxed{\frac{dq^i}{dt} = X^i}$$

Nel secondo caso esso si identifica con un'applicazione $\mathbb{R}$ -lineare

$$X: \mathcal{F}(Q) \rightarrow \mathcal{F}(Q): F \mapsto XF = \langle X, dF \rangle$$

soddisfacente alla regola di Leibniz e si rappresenta con l'operatore

$$(10) \quad \boxed{X = X^i \frac{\partial}{\partial q^i}}$$

L'equazione

$$(11) \quad \boxed{\langle X, dF \rangle = X^i \frac{\partial F}{\partial q^i} = 0}$$

è caratteristica degli integrali primi del campo, cioè delle funzioni su Q costanti lungo le sue curve integrali.

Se le definizioni relative ai campi vettoriali e alle forme differenziali su spazi affini si estendono in maniera naturale alle varietà, occorre però osservare che i relativi teoremi hanno sulle varietà validità solo locale. La struttura topologica della varietà può infatti avere delle conseguenze notevoli sul comportamento globale delle funzioni, dei campi vettoriali e delle curve integrali, delle forme differenziali. Queste proprietà globali sono argomento tipico della Geometria Differenziale. Vediamone alcuni esempi.

ESEMPIO 1. Si può dimostrare che su di una varietà compatta (per esempio su di una sfera, su di un toro) ogni campo vettoriale è completo.

ESEMPIO 2. Si può dimostrare che le sfere di dimensione dispari hanno almeno un campo vettoriale di classe C^∞ mai nullo, cioè senza punti singolari, e che invece sulle sfere di dimensione pari un tale campo non esiste (ogni campo ha almeno un punto singolare).

ESEMPIO 3. Il fibrato tangente TQ non è in generale diffeomorfo al prodotto $\mathbb{R}^n \times Q$. Se lo è si dice che la varietà Q è **parallelizzabile**. La parallelizzabilità equivale all'esistenza di n campi vettoriali indipendenti in ogni punto. Si può dimostrare che le sfere $\mathbb{S}_1$, $\mathbb{S}_3$ e $\mathbb{S}_7$ sono le sole sfere parallelizzabili. Ogni toro $\mathbb{T}_n$ è parallelizzabile, essendo la potenza di $\mathbb{S}_1$. Ogni gruppo di Lie è parallelizzabile.

3. Sistemi olonomi

Un sistema meccanico può essere schematizzato in un insieme di punti mobili, con o senza vincoli, nello spazio affine tridimensionale euclideo, modello dello spazio fisico osservato da un riferimento. Sia P_ν il generico punto del sistema; l'indice ν è da intendersi variabile in un opportuno insieme $\mathcal{B}$, finito o infinito. Scelta un'origine O dello spazio affine, la posizione del punto P_ν è caratterizzata dal vettore $OP_\nu = \mathbf{r}_\nu$. L'insieme dei vettori posizione $\{\mathbf{r}_\nu; \nu \in \mathcal{B}\}$ definisce una **configurazione** del sistema. Denotiamo con Q l'insieme di tutte le possibili configurazioni che il sistema può assumere, compatibilmente coi vincoli imposti, rispetto ad un assegnato riferimento. Lo chiamiamo **spazio delle configurazioni**.

DEFINIZIONE 1. Un sistema di punti $\{P_\nu; \nu \in \mathcal{B}\}$ si dice **olonomo** se il corrispondente spazio delle configurazioni Q ha una struttura di varietà differenziabile. Si dice allora che Q è la **varietà delle configurazioni**. La dimensione n di Q prende il nome di **numero dei gradi di libertà** del sistema. Le coordinate (q^i) associate ad un qualunque carta di Q prendono il nome di **coordinate lagrangiane**⁽¹⁾.

Per ogni indice $\nu \in \mathcal{B}$ risulta definibile un'applicazione

$$(1) \quad \mathbf{r}_\nu: Q \rightarrow E_3,$$

da Q allo spazio vettoriale euclideo tridimensionale E_3 , che assegna il vettore posizione $\mathbf{r}_\nu$ del punto P_ν in corrispondenza ad ogni configurazione del sistema. Scelte delle coordinate (q^i) su Q le applicazioni (1) si

⁽¹⁾ Si possono considerare definizioni più generali di questa. Per esempio, assumere che la varietà Q possa essere una **varietà con bordo**, cioè ammettere delle carte sopra semispazi di $\mathbb{R}^n$. La nozione qui data di sistema olonomo sarà comunque estesa, nel prossimo paragrafo, ai sistemi con vincoli dipendenti dal tempo. Le varietà delle configurazioni che consideriamo sono supposte tutte di classe C^∞ . Il termine *olonomo*, derivato da $\delta\lambda\omicron\varsigma$ (intero) e $\nu\acute{o}\mu\omicron\varsigma$ (legge), fu introdotto da H. Hertz (1857-1894). Esso sta a significare che pur essendo il sistema costituito da un numero finito o infinito di punti, in virtù dei vincoli imposti la posizione di ciascuno di questi è determinata dai valori di un numero ridotto finito n di parametri reali $(q^i) = (q^1, \dots, q^n)$, come mostra il ragionamento che segue.

traducono in funzioni vettoriali $\mathbf{r}_\nu(q^i)$ nelle n variabili (q^i) ,

$$(2) \quad OP_\nu = \mathbf{r}_\nu(q^i).$$

Queste funzioni svolgono un ruolo di *ponte* tra la descrizione tridimensionale del sistema meccanico e quella, più astratta, ambientata nella varietà delle configurazioni Q ; servono cioè a tradurre entità meccaniche rappresentate nello spazio affine tridimensionale euclideo in entità sopra la varietà delle configurazioni.

Posto che una configurazione di un sistema olonomo è rappresentata da un *punto* sulla varietà delle configurazioni Q , un **moto** del sistema sarà rappresentato dal moto di un punto su Q vale a dire da una *curva* su Q ,

$$\gamma: I \rightarrow Q: t \mapsto \gamma(t).$$

Assegnate delle coordinate lagrangiane (q^i) , un moto è allora descritto da equazioni parametriche

$$(3) \quad q^i = \gamma^i(t).$$

Se queste si sostituiscono nelle funzioni $\mathbf{r}_\nu(q^i)$ che danno le posizioni dei singoli punti del sistema, cioè nelle (2), si trova il moto di ciascuno di questi:

$$OP_\nu(t) = \mathbf{r}_\nu(q^i(t)).$$

Derivando rispetto al tempo si trova anche la loro velocità:

$$(4) \quad \mathbf{v}_\nu = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt}.$$

Chiamiamo **atto di moto** di un sistema olonomo un sistema di vettori $\{(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu), \nu \in \mathcal{B}\}$ rappresentanti la posizione e la velocità dei suoi punti, compatibili con i vincoli imposti. Il sistema di vettori $\{\mathbf{r}_\nu, \nu \in \mathcal{B}\}$ rappresenta la configurazione corrispondente all'atto di moto. L'atto di moto è quindi un concetto istantaneo. Perché i vettori velocità siano compatibili con i vincoli occorre e basta che in un qualsiasi sistema di coordinate lagrangiane si abbia

$$(5) \quad \begin{cases} \mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(q^i), \\ \mathbf{v}_\nu = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} v^i, \end{cases} \quad (v^i) \in \mathbb{R}^n.$$

Questo segue dall'analogia formale tra la (4) e la seconda delle (5), posto

$$(6) \quad v^i = \frac{dq^i}{dt}.$$

Si osservi infatti che un moto, inteso come successione temporale di configurazioni, stabilisce una successione temporale di atti di moto e che, viceversa, un atto di moto compatibile coi vincoli può sempre essere inteso come immagine istantanea della distribuzione dei vettori posizione e velocità dei punti del sistema olonomo durante un qualche moto. Pertanto: al variare delle coordinate (q^i) nel loro dominio U di definizione e delle (v^i) in tutto $\mathbb{R}^n$, le equazioni (5) forniscono tutti gli atti di moto corrispondenti alle configurazioni dell'insieme U . I parametri (v^i) vengono chiamati **velocità lagrangiane**.

Se Q è la varietà delle configurazioni, l'insieme degli atti di moto si identifica con la varietà tangente TQ , la quale viene pertanto anche chiamata **varietà delle velocità**. Infatti, stante la (6), i numeri (v^i) che intervengono nella definizione (5)₂ degli atti di moto possono intendersi come componenti secondo le coordinate (q^i) di un vettore tangente a Q .

OSSERVAZIONE 1. Sovente, nella teoria ma specialmente nelle applicazioni, è più conveniente usare i simboli $(\dot{q}^i)$ anziché (v^i) per denotare le velocità lagrangiane associate ad un dato sistema di coordinate lagrangiane (q^i) . Se per esempio queste sono le coordinate polari del piano (r, ϑ) , le corrispondenti velocità lagrangiane si possono denotare con $(\dot{r}, \dot{\vartheta})$.

ESEMPIO 1. **Punto libero.** L'esempio più semplice di sistema olonomo è il punto libero. La varietà delle configurazioni Q coincide con lo spazio affine euclideo tridimensionale $\mathcal{A}_3$ (dunque il numero dei gradi di libertà è 3). Come coordinate lagrangiane si possono scegliere delle coordinate cartesiane ortonormali (x, y, z) . Il vettore posizione è allora ovviamente dato da

$$\mathbf{r}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}.$$

Si possono anche scegliere coordinate non cartesiane $(q^i) = (q^1, q^2, q^3)$. La configurazione del punto è descritta da una sola funzione vettoriale

$$OP = \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3).$$

Questa funzione vettoriale è tale che i vettori $\mathbf{E}_i = \partial \mathbf{r} / \partial q^i$ sono indipendenti.

ESEMPIO 2. **Sistema finito di punti liberi.** Si consideri un sistema costituito da N punti liberi. La varietà delle configurazioni Q è lo spazio affine $\mathcal{A}_3^N \simeq \mathbb{R}^{3N}$, potenza N -sima di $\mathcal{A}_3 \simeq \mathbb{R}^3$. Si possono prendere come coordinate lagrangiane le coordinate cartesiane (x_ν, y_ν, z_ν) di tutti i punti. Allora le funzioni vettoriali (1) sono semplicemente date da

$$\mathbf{r}_\nu = x_\nu \mathbf{i} + y_\nu \mathbf{j} + z_\nu \mathbf{k}.$$

Da Q si possono eventualmente togliere quelle configurazioni in cui due o più punti vengono a coincidere (si escludono così le *collisioni*). Queste configurazioni formano nel loro complesso un sottoinsieme chiuso $C \subset Q = \mathcal{A}_3^N$ e pertanto la varietà delle configurazioni *senza collisioni* è una sottovarietà aperta di Q .

ESEMPIO 3. **Punto vincolato ad una superficie regolare.** La varietà delle configurazioni Q è la stessa superficie (i gradi di libertà sono 2). La posizione del punto è descritta da una funzione vettoriale

$$OP = \mathbf{r}(q^1, q^2)$$

di due parametri (q^i) ($i = 1, 2$), che è la rappresentazione parametrica (locale) della superficie. Considerazioni analoghe valgono per un punto vincolato ad una curva regolare, per cui si ha un solo grado di libertà. Entrambi questi esempi sono casi particolari dell'esempio seguente.

ESEMPIO 4. **Sistemi di punti vincolati.** Si consideri un sistema costituito da un numero finito N di punti: P_ν ($\nu = 1, \dots, N$). Si supponga che questi punti non siano liberi ma sottoposti a **vincoli di posizione** rappresentati da r equazioni scalari indipendenti

$$F^a(\mathbf{r}_\nu) = 0 \quad (a = 1, \dots, r)$$

coinvolgenti i singoli vettori posizione $\mathbf{r}_\nu$. Queste si traducono in equazioni indipendenti coinvolgenti le $3N$ coordinate cartesiane dei punti e definiscono pertanto una superficie regolare Q , di dimensione $3N - r$,

dello spazio affine $\mathcal{A}_3^N \simeq \mathbb{R}^{3N}$. Questa superficie rappresenta pertanto la varietà delle configurazioni del sistema⁽²⁾.

ESEMPIO 5. Il pendolo semplice. Dal punto di vista puramente cinematico è un punto vincolato ad una circonferenza. Dunque è un sistema olonomo la cui varietà delle configurazioni è $Q = \mathbb{S}_1$.

ESEMPIO 6. Si consideri un'asta rigida con gli estremi vincolati a scorrere su due guide rettilinee complanari e perpendicolari fra loro. Si tratta di un sistema olonomo ad un grado di libertà la cui varietà delle configurazioni è ancora $Q = \mathbb{S}_1$. Infatti, ogni configurazione dell'asta è univocamente individuata dalla posizione del suo punto medio che si muove su di una circonferenza di centro l'intersezione delle guide e raggio uguale alla metà della lunghezza. Abbiamo così un esempio di due sistemi olonomi, questo ed il pendolo semplice, che dal punto di vista meccanico sono assai diversi ma che hanno la stessa varietà delle configurazioni.

ESEMPIO 7. Il pendolo sferico. Dal punto di vista puramente cinematico è un punto vincolato ad una sfera. Si tratta quindi di un sistema olonomo a due gradi di libertà la cui varietà delle configurazioni è $Q = \mathbb{S}_2$.

ESEMPIO 8. Si consideri un'asta rigida con gli estremi vincolati a scorrere uno su di una guida rettilinea e l'altro su di un piano perpendicolare a questa. Si tratta di un sistema olonomo a 2 gradi di libertà la cui varietà delle configurazioni è ancora $Q = \mathbb{S}_2$. Infatti, ogni configurazione è univocamente individuata dalla posizione del punto medio dell'asta, e questo punto si muove sulla sfera di centro l'intersezione della guida rettilinea col piano e raggio uguale alla metà della lunghezza dell'asta. Ecco un altro esempio di due sistemi olonomi diversi ma con la stessa varietà delle configurazioni.

ESEMPIO 9. Il bipendolo piano. È costituito da due punti A e B mobili su di un piano e vincolati rigidamente fra loro, con uno dei

⁽²⁾ La definizione originaria di *sistema olonomo* deriva proprio da questo esempio, incluso il caso di un numero infinito di punti e di equazioni di vincolo (come per un corpo rigido continuo). Per questo motivo, prima che il concetto di varietà differenziabile venisse utilizzato, le varietà delle configurazioni venivano dette *varietà vincolari*.

due (per esempio il punto A) collegato rigidamente ad un punto fisso O . Si tratta di un sistema olonomo la cui varietà delle configurazioni è il prodotto cartesiano di due circonferenze, cioè il toro bidimensionale: $Q = \mathbb{T}_2$. Se i due punti, restando fisso il punto O , non sono vincolati a muoversi su di un piano allora la varietà delle configurazioni è $Q = \mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_2$. Si tratta di un sistema a 4 gradi di libertà: il **bipendolo sferico**.

ESEMPIO 10. I corpi rigidi. Ritorniamo all'Esempio 4: sistemi di punti vincolati. Un esempio fondamentale di vincolo di posizione è il vincolo di rigidità: le mutue distanze dei punti del sistema restano costanti. Se i punti sono due questo vincolo si traduce in una sola equazione scalare ed il sistema ha quindi 5 gradi di libertà. Se i punti sono 3 le equazioni vincolari sono 3 e quindi il sistema ha 6 gradi di libertà. Se i punti sono più di 3 i gradi di libertà restano 6, perché ad ogni punto aggiunto si aggiungono 3 nuove coordinate ma anche 3 equazioni di vincolo, rappresentanti la costanza della distanza dai primi tre punti. D'altra parte va anche osservato che le configurazioni di un corpo rigido con un punto fisso (che sia composto da un numero finito o infinito di punti, ma non allineati) sono in corrispondenza biunivoca col gruppo delle rotazioni $SO(3)$ dello spazio vettoriale euclideo tridimensionale (che è una varietà differenziabile di dimensione 3). Dunque in questo caso la varietà delle configurazioni è $Q = SO(3)$. Se il corpo rigido è libero, ogni sua configurazione è invece determinata dalla posizione nello spazio di un suo qualunque punto prefissato e da una rotazione intorno a questo punto. Quindi la varietà delle configurazioni è in questo caso il prodotto cartesiano $Q = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$. Proseguendo in quest'analisi si conclude che un corpo rigido può avere diverse varietà delle configurazioni. Ne elenchiamo alcune:

$Q = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$,	corpo rigido libero,
$Q = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}_2$,	segmento rigido libero,
$Q = SO(3)$,	corpo rigido con un punto fisso,
$Q = \mathbb{S}_2$,	segmento rigido con un punto fisso,
$Q = \mathbb{R} \times \mathbb{S}_1$,	corpo rigido scorrevole su di un asse fisso,
$Q = \mathbb{S}_1$,	corpo rigido con un asse fisso,

A quest'elenco vanno aggiunti quei casi in cui uno o più punti del corpo rigido sono vincolati a speciali curve o superfici (come negli Esempi 6 e 8).

4. Sistemi olonomi a vincoli dipendenti dal tempo

I vincoli imposti ai punti di un sistema meccanico possono dipendere dal tempo. Si pensi ad esempio a uno o più punti vincolati ad una superficie mobile con legge assegnata, oppure ad un insieme di punti le cui mutue distanze varino nel tempo con legge assegnata. Occorre dunque estendere la nozione di sistema olonomo in modo da includere anche questi casi.

DEFINIZIONE 1. Un sistema olonomo è un sistema di punti le cui possibili configurazioni in tutti gli istanti formano una varietà differenziabile $\bar{Q}$ di dimensione $n+1$, detta **spazio-tempo delle configurazioni** o **varietà estesa delle configurazioni**, di dimensione $n+1$ e tale che: (i) esiste una funzione differenziabile $t: \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ che assegna ad ogni configurazione l'istante a cui questa si riferisce; (ii) quest'applicazione è tale che per ogni $t \in \mathbb{R}$ l'insieme Q_t di tutte le configurazioni possibili all'istante t è una sottovarietà di dimensione n ; (iii) esiste una varietà differenziabile Q di dimensione n e un diffeomorfismo $\varphi: \mathbb{R} \times Q \rightarrow \bar{Q}$ tale da indurre per ogni $t \in \mathbb{R}$ un diffeomorfismo

$$\varphi_t: Q \rightarrow Q_t: q \mapsto \varphi(t, q)$$

tra la varietà Q e la varietà Q_t . L'intero n prende il nome di **numero dei gradi di libertà**, la varietà Q di **varietà delle configurazioni di riferimento**.

OSSERVAZIONE 1. Nel linguaggio della Geometria Differenziale la Def. 1 si riassume dicendo che un sistema olonomo è costituito da una **fibrazione** $t: \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ di una varietà $\bar{Q}$ sopra la retta reale $\mathbb{R}$. Le **fibre** sono le varietà Q_t delle configurazioni possibili all'istante t . Questa fibrazione è **triviale**, cioè tale che $\bar{Q}$ risulta essere diffeomorfa ad un prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times Q$ e la fibrazione $t: \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ equivalente alla proiezione naturale $\mathbb{R} \times Q \rightarrow \mathbb{R}$. Il diffeomorfismo φ prende il nome di **trivializzazione** della fibrazione.

ESEMPIO 1. Pendolo semplice di lunghezza variabile. Si consideri un punto vincolato ad una circonferenza su di un piano fisso, con centro fisso O e raggio $l(t)$ variabile (mai nullo). L'insieme $\bar{Q}$ di tutte le sue possibili configurazioni si può identificare con il prodotto $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_1$. Si può prendere infatti come varietà di riferimento Q la circonferenza $\mathbb{S}_1$

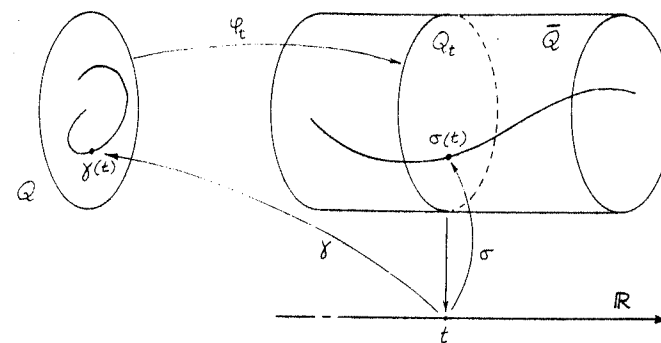


Fig. 4.1: lo spazio-tempo delle configurazioni.

di raggio 1 e, tramite le semirette uscenti da O , stabilire tra questa ed ogni circonferenza Q_t di raggio $l(t)$ un diffeomorfismo.

ESEMPIO 2. Si consideri un punto vincolato ad una circonferenza di centro fisso, raggio costante, ma ruotante con legge assegnata intorno ad un suo diametro fisso. La varietà estesa delle configurazioni $\bar{Q}$ non è la sfera descritta dalla circonferenza (che è, se si vuole, l'insieme di tutte le possibili posizioni occupabili dal punto), bensì il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_1$. Occorre infatti distinguere le configurazioni "estese", elementi di $\bar{Q}$, non solo per la posizione effettivamente occupata dal punto, ma anche per l'istante in cui tale posizione è occupata.

Se si considerano coordinate (q^i) sulla varietà di riferimento Q e se si interpreta la funzione t come ulteriore coordinata (che denotiamo anche con q^0) risultano definite delle coordinate (t, q^i) sullo spazio-tempo delle configurazioni $\bar{Q}$. Di conseguenza la posizione dei singoli punti del sistema è determinata da funzioni vettoriali

$$(1) \quad OP_\nu = r_\nu(t, q^i).$$

Se queste non dipendono dal tempo si ricade nel caso, considerato al §3 dei **sistemi olonomi a vincoli indipendenti dal tempo** detti anche

scleronomi. I sistemi olonomi a vincoli dipendenti dal tempo sono detti **reonomi**.

Vi sono due modi, del tutto equivalenti, per rappresentare il moto di un sistema olonomo.

Un moto è una **sezione della fibrazione** $t: \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, cioè un'applicazione differenziabile

$$\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \bar{Q}$$

che associa ad ogni istante $t \in \mathbb{R}$ una configurazione $\sigma(t) \in Q_t$, cioè una configurazione corrispondente allo stesso istante. Questa definizione non ricorre alla trivializzazione φ .

Un moto può anche essere definito come curva

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow Q$$

sopra la varietà di riferimento Q . Infatti, attraverso la trivializzazione φ , una curva γ su Q genera una sezione σ ponendo

$$\sigma(t) = \varphi(t, \gamma(t)).$$

Viceversa, una sezione σ genera una curva γ ponendo (si veda la Fig. 4.1)

$$\gamma(t) = \varphi_t^{-1}(\sigma(t)).$$

Se, introdotte coordinate su Q , si considerano le equazioni parametriche $q^i = \gamma^i(t)$ della curva γ e queste si sostituiscono nelle (1), si ottengono i moti dei singoli punti. Derivando si ottengono le velocità:

$$(2) \quad v_\nu = \frac{\partial r_\nu}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} + \frac{\partial r_\nu}{\partial t}.$$

Segue che un generico atto di moto compatibile con i vincoli è costituito dall'insieme dei vettori

$$(3) \quad \begin{cases} r_\nu = r_\nu(t, q^i), \\ v_\nu = \frac{\partial r_\nu}{\partial q^i} v^i + \frac{\partial r_\nu}{\partial t}, \end{cases}$$

con $(v^i) \in \mathbb{R}^n$. Esso è allora in definitiva rappresentato da un vettore tangente alla varietà di riferimento Q , di componenti (v^i) .

Accanto agli atti di moto definiti dalle (3) si considerano anche sistemi di vettori definiti dalle equazioni

$$(4) \quad \begin{cases} r_\nu = r_\nu(q^i, t), \\ \delta r_\nu = \frac{\partial r_\nu}{\partial q^i} \delta q^i, \end{cases}$$

con $(\delta q^i) \in \mathbb{R}^n$. Un sistema di vettori di questo tipo è detto **atto di moto virtuale** (in alcuni testi, **spostamento virtuale**). Un tale atto di moto non è compatibile con i vincoli a meno che questi non siano indipendenti dal tempo, caso in cui si ha identicamente

$$\frac{\partial r_\nu}{\partial t} = 0.$$

Tuttavia, come sarà osservato nel seguito, il concetto di atto di moto virtuale conserva la sua importanza anche nel caso di sistemi scleronomi. Si usa anche dire che un atto di moto virtuale corrisponde ad un atto di moto compatibile coi vincoli *supposti irrigiditi* (o *fissati*, o *congelati*) nell'istante considerato.

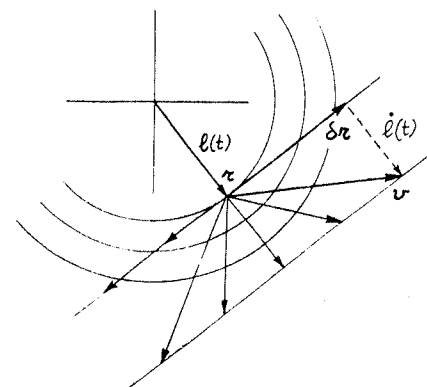


Fig. 4.2: velocità virtuali in un pendolo a raggio variabile.

5. Le equazioni di Lagrange

Un sistema olonomo è costituito da punti liberi o vincolati. Nella dinamica del punto l'azione dei vincoli è tradotta da forze, le cosiddette reazioni vincolari, sulle quali è necessario imporre delle condizioni costitutive. Il concetto di **vincolo liscio**, che nel caso di un punto vincolato ad una superficie o ad una curva si esprime nell'ortogonalità al vincolo della reazione, può essere esteso ai sistemi olonomi nella maniera seguente.

Si consideri un sistema olonomo. Fissata una sua configurazione e un sistema di forze $\mathbf{F}_\nu$ applicate in ogni punto del sistema, ad ogni atto di moto relativo a quella configurazione corrisponde una *potenza* W delle forze. Se il sistema è costituito da un numero finito di punti (caso a cui limitiamo le nostre considerazioni, le cui conclusioni valgono però in generale) si ha per definizione

$$(1) \quad W = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \cdot \mathbf{v}_\nu.$$

Possiamo in particolare considerare il caso in cui il sistema di forze è dato dalle reazioni vincolari $\mathbf{F}_{r\nu}$ e l'atto di moto è un atto di moto virtuale, cioè compatibile coi vincoli, supposti fissati nell'istante considerato. Abbiamo allora la **potenza virtuale delle forze reattive**, che denotiamo con $W_r^{(v)}$.

DEFINIZIONE 1. Diciamo che un sistema olonomo è **perfetto**, o a **vincoli perfetti**, se la potenza virtuale delle forze reattive è nulla per ogni atto di moto virtuale.

OSSERVAZIONE 1. Se un punto è vincolato ad una superficie mobile per esprimere il fatto che il vincolo è liscio, cioè che la reazione vincolare è sempre ortogonale alla superficie, *non* si può dire che è nulla la potenza della forza reattiva per ogni atto di moto, ma che è nulla quella virtuale, che corrisponde a vettori velocità tangenti alla superficie, supposta fissata nell'istante considerato.

OSSERVAZIONE 2. Se il sistema olonomo è a vincoli indipendenti dal tempo non è necessaria, in questa definizione, la distinzione tra atto di moto virtuale e atto di moto compatibile coi vincoli.

Supponiamo ora che il sistema di forze sia dato dalle **forze attive** $\mathbf{F}_{a\nu}$. Per queste si postulano delle leggi di forza, cioè la loro dipendenza dalla posizione e dalla velocità di *tutti* i punti del sistema, ed eventualmente dal tempo. Ha allora senso considerare la **potenza virtuale delle forze attive**, che denotiamo con $W_a^{(v)}$.

OSSERVAZIONE 3. Qui la distinzione fra atto di moto virtuale e atto di moto compatibile coi vincoli (o *reale*) è essenziale, anche per i sistemi scleronomi. Si consideri ad esempio il caso di un punto libero soggetto alla forza di Coriolis o alla forza esercitata da un campo magnetico. Entrambe le leggi di forza sono del tipo $\mathbf{F} = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{v}$. La potenza effettiva di questa forza è sempre nulla: $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$. Con l'introduzione della velocità virtuale, che denotiamo con $\delta \mathbf{r}$, intesa come puro vettore, distinto dalla velocità effettiva del punto, la potenza virtuale è formalmente espressa dal prodotto misto $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r}$, quindi non è più identicamente nulla.

La potenza virtuale delle forze attive risulta essere una forma lineare nelle componenti (δq^i) dell'atto di moto virtuale,

$$(2) \quad W_a^{(v)} = \varphi_i \delta q^i$$

i cui coefficienti (φ_i) prendono il nome di **forze lagrangiane** o di **componenti lagrangiane delle forze attive**. Per esempio, nel caso di un sistema finito, si ha

$$(3) \quad W_a^{(v)} = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_{a\nu} \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_{a\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \delta q^i.$$

Vale quindi la (2) con

$$(4) \quad \varphi_i = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_{a\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i}.$$

OSSERVAZIONE 4. Nel caso generale, in cui le forze attive dipendono dalla posizione e dalla velocità dei singoli punti ed eventualmente dal tempo, le forze lagrangiane risultano essere funzioni delle coordinate lagrangiane, delle velocità lagrangiane e del tempo:

$$\varphi_i = \varphi_i(q^j, v^h, t).$$

OSSERVAZIONE 5. Nel caso di un solo punto la (4) diventa

$$\varphi_i = \mathbf{F}_a \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} = \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{E}_i.$$

Questa formula è valida sia per il punto libero, nel qual caso $i = 1, 2, 3$ e le (q^i) sono coordinate dello spazio affine tridimensionale euclideo, sia per il punto vincolato ad una superficie, nel qual caso $i = 1, 2$ e le (q^i) sono coordinate superficiali. Considerazioni analoghe valgono per il punto vincolato ad una curva. Si osserva quindi che per il punto libero le forze lagrangiane φ_i coincidono con le componenti covarianti della forza attiva rispetto alle coordinate (q^i) .

OSSERVAZIONE 6. La (2) mostra che per poter calcolare le forze lagrangiane si può calcolare la potenza virtuale delle forze attive per atti di moto virtuali in cui le velocità lagrangiane virtuali (δq^i) sono tutte nulle salvo una. La componente φ_1 è per esempio ottenibile calcolando la potenza virtuale corrispondente all'atto di moto virtuale ottenuto ponendo $\delta q^2 = \dots = \delta q^n = 0$ e $\delta q^1 = 1$. Quanto detto nell'Oss. 2, sulla necessità della distinzione tra atti di moto effettivi e virtuali, va qui ripetuto.

DEFINIZIONE 2. Chiamiamo **stato dinamico** di un sistema meccanico la distribuzione istantanea delle posizioni, velocità ed accelerazioni dei singoli punti.

Ad ogni stato dinamico si associa la **potenza virtuale delle forze di massa** $W_m^{(v)}$, dove per **forza di massa** o (**forza d'inerzia**), nel caso di un singolo punto di massa m_ν , s'intende il vettore $\mathbf{F}_{m\nu} = -m_\nu \mathbf{a}_\nu$. Anche la potenza virtuale delle forze di massa risulta essere una forma lineare nelle componenti (δq^i) dell'atto di moto virtuale,

$$(5) \quad W_m^{(v)} = \tau_i \delta q^i$$

Per esempio, nel caso di un sistema finito di punti si ha

$$(6) \quad W_m^{(v)} = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_{m\nu} \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = - \sum_{\nu=1}^N m_\nu \mathbf{a}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \delta q^i,$$

per cui vale la (5) con

$$(7) \quad \tau_i = - \sum_{\nu=1}^N m_\nu \mathbf{a}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i}.$$

Si hanno così tutti gli elementi per formulare un principio generale che racchiude in sé, pur nella sua estrema semplicità, il comportamento dinamico di una vastissima classe di sistemi meccanici: il **principio di D'Alembert-Lagrange** (Jean-Baptiste Le Rond d'Alembert, 1717 - 1783).

PRINCIPIO. In corrispondenza ad un qualunque stato dinamico di un sistema a vincoli perfetti, per ogni atto di moto virtuale è nulla la somma della potenza virtuale delle forze attive e della potenza virtuale delle forze di massa:

$$(8) \quad W_a^{(v)} + W_m^{(v)} = 0$$

L'equazione (8) prende il nome di **equazione simbolica della dinamica**.

OSSERVAZIONE 7. Si noti bene che nel caso di un solo punto materiale soggetto ad un vincolo liscio questo principio è equivalente all'equazione fondamentale della dinamica $m\mathbf{a} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_r$. Infatti, moltiplicandola scalarmente per una generica velocità virtuale $\delta \mathbf{r}$ si trova $\mathbf{F}_a \cdot \delta \mathbf{r} - m\mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{r} = 0$, perché $\mathbf{F}_r \cdot \delta \mathbf{r} = 0$, e quindi $W_a^{(v)} + W_m^{(v)} = 0$. Ragionando inversamente, da quest'ultima equazione, supposta valida per ogni velocità virtuale, segue che $\mathbf{F}_a - m\mathbf{a} = \mathbf{F}_r$ con $\mathbf{F}_r$ vettore ortogonale al vincolo.

Mostriamo ora come dal principio di D'Alembert-Lagrange discendano le equazioni fondamentali della dinamica dei sistemi olonomi.

TEOREMA. Comunque si scelgano le coordinate lagrangiane (q^i) , i moti $(q^i(t))$ di un sistema olonomo a n gradi di libertà e a vincoli perfetti soddisfano al sistema di equazioni differenziali

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{dq^i}{dt} &= v^i, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} &= \varphi_i, \end{aligned} \quad (i = 1, \dots, n)$$

dove T è l'energia cinetica del sistema e le φ_i sono le forze lagrangiane.

OSSERVAZIONE 8. Le equazioni (9)₂ prendono il nome di **equazioni di Lagrange**. Si noti che il sistema (9) è un sistema di $2n$ equazioni differenziali del *primo ordine* nelle $2n$ funzioni incognite $(q^i(t), v^i(t))$. Posto che la $v^i(t)$ è la derivata della $q^i(t)$, come dichiarato dalle prime n equazioni del sistema, le equazioni di Lagrange possono anche interpretarsi come equazioni del *secondo ordine* nelle sole n funzioni incognite $(q^i(t))$.

Dimostrazione. Viste le (2) e le (5), l'equazione simbolica della dinamica (8) si traduce nell'equazione

$$(\varphi_i + \tau_i) \delta q^i = 0, \quad \forall (\delta q^i) \in \mathbb{R}^n.$$

Siccome le funzioni φ_i e τ_i non dipendono dalle δq^i e queste sono arbitrarie, quest'equazione equivale al sistema di n equazioni

$$(10) \quad \varphi_i + \tau_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Occorre allora sviluppare i coefficienti τ_i a partire dalla (7). Dall'espressione delle velocità dei singoli punti

$$(11) \quad \mathbf{v}_\nu = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} v^i + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t},$$

derivando rispetto alle (v^i) , segue l'identità

$$(12) \quad \frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial v^i} = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i}.$$

Se invece si deriva la (11) rispetto alle coordinate lagrangiane si trova

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial q^j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i \partial q^j} v^i + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q^j \partial t}.$$

D'altra parte

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i \partial q^j} v^i + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q^j \partial t},$$

per cui dal confronto con la precedente espressione segue l'identità

$$(13) \quad \frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial q^j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^j}.$$

A partire dalla (7) si ha allora successivamente, tenuto conto delle identità (12) e (13) (si può omettere il simbolo di sommatoria rispetto all'indice ν):

$$\begin{aligned} \tau_i &= -m_\nu \frac{d\mathbf{v}_\nu}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \\ &= m_\nu \left(\mathbf{v}_\nu \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\mathbf{v}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \right) \right) \\ &= m_\nu \left(\mathbf{v}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\mathbf{v}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial v^i} \right) \right) \\ &= \frac{\partial T}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v^i}, \end{aligned}$$

osservato in ultimo che l'energia cinetica è per definizione

$$(14) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \mathbf{v}_\nu \cdot \mathbf{v}_\nu.$$

Dalle (10) seguono allora le equazioni di Lagrange. ■

Un primo grande vantaggio del metodo lagrangiano è che le equazioni di Lagrange sono di immediata scrittura, una volta che si siano esplicitate le forze lagrangiane φ_i e l'energia cinetica T . Sul calcolo delle forze lagrangiane si è già detto all'Oss. 6 e si ritornerà ancora più avanti (§7).

Per quel che riguarda il calcolo dell'energia cinetica va osservato che questa risulta essere un polinomio di secondo grado nelle velocità lagrangiane

$$(15) \quad T = \frac{1}{2} g_{ij} v^i v^j + g_{0i} v^i + \frac{1}{2} g_{00}$$

a coefficienti (g_{ij}, g_{0i}, g_{00}) dipendenti dalle coordinate lagrangiane e dal tempo. Infatti (ci limitiamo al solito a considerare un sistema finito di punti) sostituendo l'espressione (11) delle velocità nella definizione (14) dell'energia cinetica si vede che vale la (15) ponendo

$$(16) \quad \begin{cases} g_{ij} = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^j}, \\ g_{0i} = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i}, \\ g_{00} = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}. \end{cases}$$

Nel caso di vincoli indipendenti dal tempo i coefficienti g_{0i} e g_{00} si annullano identicamente e l'energia cinetica risulta essere una forma quadratica:

$$(17) \quad T = \frac{1}{2} g_{ij} v^i v^j$$

Questa è definita positiva perché l'energia cinetica, per sua stessa definizione, è una quantità positiva, nulla se e solo se tutti i punti del sistema hanno velocità nulla cioè se l'atto di moto è nullo. D'altra parte, gli atti di moto nulli sono caratterizzati dall'annullarsi di tutte le velocità lagrangiane. Abbiamo pertanto $T \geq 0$ con $T = 0$ se e solo se $(v^i) = 0$; ciò prova che T è definita positiva.

Anche nel caso di vincoli indipendenti dal tempo la parte quadratica omogenea dell'energia cinetica (15) risulta essere una forma quadratica definita positiva. Per riconoscerlo basta ripetere il ragionamento precedente considerando però atti di moto virtuali, cioè con vincoli istantaneamente fissi, perché tale parte quadratica omogenea è proprio l'energia cinetica corrispondente a questi atti di moto.

Mettiamo in opera il metodo lagrangiano in tre semplici esempi. Si constaterà come esso sia, in questi casi, assai più agevole del metodo newtoniano.

ESEMPIO 1. Un "piano inclinato", costituito da un triangolo rettangolo materiale omogeneo, può scorrere senza attrito, giacendo in un piano verticale, su di una guida rettilinea orizzontale. Su di esso rotola senza strisciare un disco materiale omogeneo. Determinare le equazioni del moto del sistema.

I termini "verticale" e "orizzontale" sottintendono la presenza della forza peso. Il sistema può essere interpretato come un sistema olonomo a due gradi di libertà. Per riconoscerlo, conviene innanzitutto fissare un sistema di assi cartesiani ortogonali (O, x, y) sul piano, di versori (i, j) , facendo per esempio coincidere l'asse x con la guida e prendendo l'asse y orientato verso l'alto. Si consideri inoltre sulla retta rappresentante il piano inclinato un'ascissa euclidea s , avente per esempio origine nel vertice superiore B del triangolo e orientata verso il basso, di versore u . Siano: A il vertice sottostante a B (corrispondente all'angolo retto), C

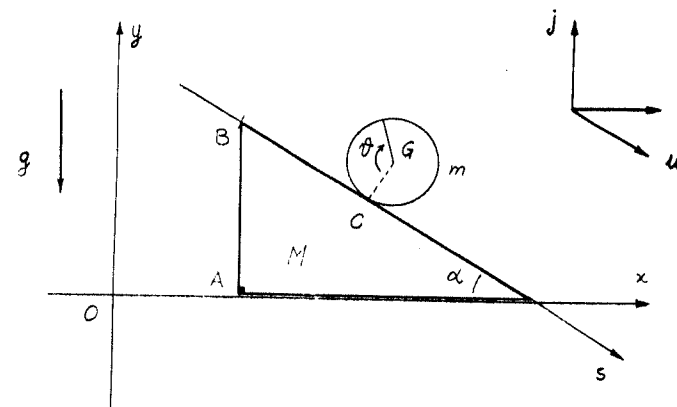


Fig. 5.1.

il punto di contatto del disco, G il suo baricentro. Per determinare completamente la configurazione del sistema basta, per esempio, assegnare l'ascissa x del punto A e l'ascissa s del punto di contatto C . Ammettendo per semplicità che il disco possa scorrere su tutto l'asse s , segue che la varietà delle configurazioni Q di questo sistema è identificabile con il prodotto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con coordinate lagrangiane $(q^i) = (q^1, q^2) = (x, s)$.

Verifichiamo che, nelle ipotesi fatte, il sistema è a vincoli perfetti, cioè che la potenza virtuale delle forze reattive è nulla per ogni spostamento virtuale (trattandosi di un sistema a vincoli indipendenti dal tempo, non vi è distinzione formale tra atti di moto virtuali e atti di moto possibili). Per un atto di moto virtuale definito dalle condizioni $(\delta x \neq 0, \delta s = 0)$, corrispondente ad una traslazione lungo la guida orizzontale di tutto il sistema con il disco fisso sul suo punto di contatto, la potenza delle reazioni vincolari è nulla perché non vi è attrito tra guida orizzontale e triangolo. Per un atto di moto virtuale definito da $(\delta x = 0, \delta s \neq 0)$, che corrisponde invece ad un atto di moto di puro rotolamento del disco sul triangolo fisso, la potenza delle reazioni vincolari è nulla perché in tale atto di moto i punti dove si esercitano le reazioni vincolari, il punto C e i punti del cateto a contatto con la guida, hanno velocità nulla.

Verificato che il sistema è olonomo a vincoli perfetti, per la scrit-

tura delle equazioni di Lagrange occorre calcolare le forze lagrangiane e l'energia cinetica.

Le espressioni delle forze lagrangiane seguono dal calcolo della potenza virtuale delle forze attive: $W_a^{(v)} = \varphi_i \delta q^i = \varphi_x \delta x + \varphi_s \delta s$. Con atto di moto ($\delta x \neq 0, \delta s = 0$) si ha $W_a^{(v)} = 0$ perché la forza peso non compie alcun lavoro. Dunque

$$\varphi_x = 0$$

Con atto di moto ($\delta x = 0, \delta s \neq 0$) si ha $W_a^{(v)} = m\mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{r}_G = mg \sin \alpha \delta s$, per cui

$$\varphi_s = mg \sin \alpha$$

L'energia cinetica di tutto il sistema è la somma delle due energie cinetiche, quella del triangolo e quella del disco: $T = T_T + T_D$. Poiché il triangolo si muove di moto traslatorio, la sua energia cinetica è quella di un suo qualunque punto, per esempio il punto A , in cui si pensi concentrata tutta la massa. Denotata questa con M , si ha

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2.$$

Per il calcolo dell'energia cinetica del disco conviene far ricorso al teorema di König: $T_D = T' + \frac{1}{2} m \mathbf{v}_G^2$, dove T' è l'energia cinetica nel moto rispetto al baricentro, m la massa del disco, $\mathbf{v}_G$ la velocità del baricentro. Trattandosi di un moto rigido piano, nel moto intorno al suo baricentro il disco si muove con velocità angolare pari alla derivata dell'angolo formato da una sua qualunque retta solidale con una qualunque retta del piano fisso. In altri termini, se indichiamo con ϑ l'angolo di rotazione del disco a partire da una configurazione prefissata (p. es. quella in cui $C = A$), si ha $s = R\vartheta + \text{cost.}$, dove R è il raggio del disco. Di qui segue che la velocità angolare (scalare) è $\dot{\vartheta} = \dot{s}/R$ e quindi che

$$T' = \frac{1}{2} I_G \dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{4} m \dot{s}^2,$$

perché il momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrale è $I_G = \frac{1}{2} m R^2$. Possiamo inoltre calcolare la velocità del baricentro attraverso il teorema dei moti relativi, cioè sommando la velocità che il baricentro ha rispetto al riferimento costituito dal triangolo, che è pari a $\dot{s}\mathbf{u}$, con quella di trascinamento, che è uguale a quella di un qualunque punto di tale riferimento, per esempio del punto A , essendo questo in moto traslatorio: $\dot{x}\mathbf{i}$. Pertanto

$$\mathbf{v}_G = \dot{s}\mathbf{u} + \dot{x}\mathbf{i},$$

da cui segue

$$\mathbf{v}_G^2 = \dot{s}^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{s}\dot{x}\cos\alpha,$$

denotato con α l'angolo formato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{i}$, cioè tra asse x ed asse s . Abbiamo dunque nel complesso

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{4} m \dot{s}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{s}^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{s}\dot{x}\cos\alpha),$$

cioè

$$T = \frac{1}{2} [(M+m)\dot{x}^2 + \frac{3}{2}m\dot{s}^2 + 2m\cos\alpha\dot{x}\dot{s}]$$

Si osservi che, rispetto alle coordinate lagrangiane scelte, la matrice dei coefficienti dell'energia cinetica è

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} M+m & m\cos\alpha \\ m\cos\alpha & \frac{3}{2}m \end{pmatrix}.$$

Per comporre le equazioni le equazioni di Lagrange occorre ancora osservare che

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= (M+m)\dot{x} + m\cos\alpha\dot{s}, & \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} &= \frac{3}{2}m\dot{s} + m\cos\alpha\dot{x}, & \frac{\partial T}{\partial s} &= 0. \end{aligned}$$

Le equazioni di Lagrange sono quindi

$$(M+m)\ddot{x} + m\cos\alpha\ddot{s} = 0, \quad \cos\alpha\ddot{x} + \frac{3}{2}\ddot{s} = g\sin\alpha$$

Si osserva che queste equazioni formano un sistema lineare nelle accelerazioni $\ddot{x}$ e $\ddot{s}$. Risolvendolo rispetto a queste, si trova:

$$\ddot{x} = \frac{-m\sin 2\alpha}{3M+m(1+2\sin^2\alpha)}, \quad \ddot{s} = \frac{2(M+m)g\sin\alpha}{3M+m(1+2\sin^2\alpha)}$$

Come si vede, $\ddot{x}$ è sempre una costante negativa (α è infatti compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$), mentre $\ddot{s}$ è una costante positiva, in accordo con l'evidenza fisica: lasciato libero il sistema a partire da una posizione di quiete, il disco si muove verso il basso con accelerazione costante mentre il triangolo si muove verso sinistra con accelerazione costante.

ESEMPIO 2. Il bipendolo piano: Esempio 9, §3 (Fig. 5.2). Supposti nulli gli attriti, i vincoli sono perfetti. Si consideri per semplicità il caso in cui le masse dei due punti A e B sono uguali ($= m$) così come le lunghezze dei due segmenti OA e AB ($= l$). Fissato un riferimento cartesiano (O, x, y) come in figura (asse x verticale orientato verso il basso e asse y orizzontale), conviene scegliere come coordinate lagrangiane i due angoli $(q^1, q^2) = (\theta, \phi)$ come in figura. (a) *Calcolo dell'energia cinetica:* i vettori posizione dei due punti sono

$$\mathbf{r}_A = l(\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}), \quad \mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + l(\cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}),$$

quindi le loro velocità sono

$$\mathbf{v}_A = l\dot{\theta}(-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}), \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + l\dot{\phi}(-\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}).$$

Di qui segue

$$\mathbf{v}_A^2 = l^2 \dot{\theta}^2, \quad \mathbf{v}_B^2 = l^2 [\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2 \cos(\theta - \phi) \dot{\theta} \dot{\phi}],$$

quindi

$$T = \frac{1}{2} m (\mathbf{v}_A^2 + \mathbf{v}_B^2) = \frac{1}{2} m l^2 [2 \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2 \cos(\theta - \phi) \dot{\theta} \dot{\phi}]$$

(b) *Calcolo delle forze lagrangiane:* seguono dal calcolo della potenza virtuale delle forze attive: $W_a^{(v)} = \varphi_i \delta q^i = \varphi_\theta \delta \theta + \varphi_\phi \delta \phi$. In questo caso $W_a^{(v)} = m \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{r}_A + m \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{r}_B$. Con atto di moto ($\delta \theta \neq 0, \delta \phi = 0$), che provoca una rotazione del segmento OA ed una traslazione del segmento AB , si ha $\delta \mathbf{r}_A = \delta \mathbf{r}_B = l(-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) \delta \theta$ e quindi $W_a^{(v)} = -2 m g l \sin \theta \delta \theta$. Dunque

$$\varphi_\theta = -2 m g l \sin \theta$$

Con atto di moto ($\delta \theta = 0, \delta \phi \neq 0$), che provoca una rotazione del solo segmento AB , si ha $\delta \mathbf{r}_A = 0$ e $\delta \mathbf{r}_B = l(-\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}) \delta \phi$ e quindi $W_a^{(v)} = -m g l \sin \phi \delta \phi$. Dunque

$$\varphi_\phi = -m g l \sin \phi$$

(c) *Le equazioni di Lagrange:* tenuto conto che

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= m l^2 (2 \dot{\theta} + \cos(\theta - \phi) \dot{\phi}), & \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} &= m l^2 (\dot{\phi} + \cos(\theta - \phi) \dot{\theta}), \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} &= -m l^2 \sin(\theta - \phi) \dot{\theta} \dot{\phi}, & \frac{\partial T}{\partial \phi} &= m l^2 \sin(\theta - \phi) \dot{\theta} \dot{\phi}, \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} &= -2 m g l \sin \theta, & \frac{\partial U}{\partial \phi} &= -m g l \sin \phi. \end{aligned}$$

risultano essere, dividendo per $m l$,

$$\begin{aligned} 2 \ddot{\theta} + \cos(\theta - \phi) \ddot{\phi} + \sin(\theta - \phi) \dot{\phi}^2 + 2 \frac{g}{l} \sin \theta &= 0 \\ \ddot{\phi} + \cos(\theta - \phi) \ddot{\theta} - \sin(\theta - \phi) \dot{\theta}^2 + \frac{g}{l} \sin \phi &= 0 \end{aligned}$$

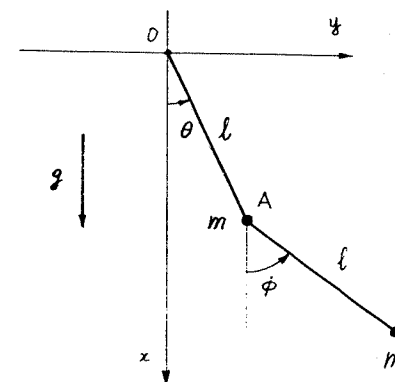


Fig. 5.2.

ESEMPIO 3. Il pendolo a lunghezza variabile: Esempio 1, §4 (Fig. 5.3). Utilizzando coordinate polari (r, ϑ) e tenuto conto che $r = l(t)$

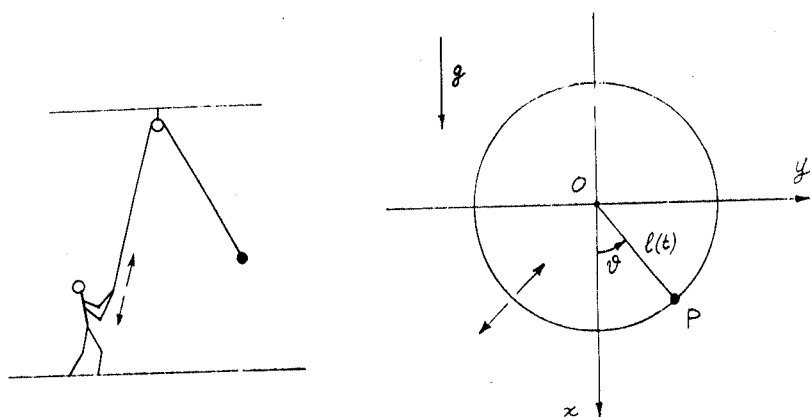


Fig. 5.3.

si trova subito che

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{l}^2 + l^2 \dot{\vartheta}^2)$$

L'unica forza attiva è la gravità $\mathbf{F} = m \mathbf{g}$ (la forza che provoca la variazione della lunghezza del pendolo è di natura vincolare). La potenza virtuale è formalmente identica a quella del pendolo a lunghezza fissa:

$$W_a^{(v)} = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} = -m g l \sin \vartheta \delta \vartheta,$$

per cui la forza lagrangiana è

$$\varphi_{\vartheta} = -m g l \sin \vartheta$$

Poiché

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = m l^2 \dot{\vartheta}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} \right) = 2 m l \dot{\vartheta} + m l^2 \ddot{\vartheta}, \quad \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = 0,$$

l'equazione di Lagrange divisa per $m l^2$ (supposto $l(t) \neq 0$) diventa

$$\ddot{\vartheta} + 2 \frac{\dot{l}}{l} \dot{\vartheta} + \frac{g}{l} \sin \vartheta = 0$$

Chiaramente, per $\dot{l} = 0$ ($l = \text{cost.}$) si ritrova l'equazione del pendolo semplice.

6. Meccanica riemanniana

In questo paragrafo limitiamo le nostre considerazioni ai sistemi olonomi con vincoli indipendenti dal tempo (sistemi scleronomi) (§3).

Si è osservato alla fine del § precedente che l'energia cinetica è una forma quadratica nelle velocità lagrangiane. Tale circostanza è di importanza fondamentale: grazie all'energia cinetica la varietà delle configurazioni di un sistema scleronomo assume la struttura di *varietà riemanniana*.

DEFINIZIONE 1. Una **varietà riemanniana** ⁽¹⁾ è una coppia (Q, g) costituita da una varietà differenziabile Q e da un **tensore metrico** g . Un **tensore metrico** è un'applicazione differenziabile

$$g: TQ \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che per ogni punto $q \in Q$ la restrizione allo spazio tangente

$$g_q: T_q Q \rightarrow \mathbb{R}$$

è una forma quadratica definita positiva ⁽²⁾.

Il tensore metrico induce quindi su ogni spazio tangente una struttura di spazio vettoriale euclideo e consente di estendere alle varietà riemanniane alcune nozioni ed operazioni fondamentali viste per gli spazi affini euclidei (che sono particolari varietà riemanniane). Ne risulta una generalizzazione della geometria euclidea: la **geometria riemanniana**. Una superficie regolare immersa in uno spazio affine euclideo fornisce un esempio elementare di varietà riemanniana. In un qualunque sistema di coordinate (q^i) di Q il tensore metrico risulta essere una forma quadratica delle corrispondenti coordinate (v^i) rappresentanti le componenti dei vettori tangenti:

$$(1) \quad g = g_{ij} v^i v^j.$$

⁽¹⁾ Da Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826 - 1866.

⁽²⁾ La richiesta che la segnatura sia positiva può essere sostituita da quella più generale che la forma quadratica g sia regolare e di segnatura costante. In questo caso si dice che la varietà è **pseudo-riemanniana** o **semi-riemanniana**. Un esempio importante è costituito dallo spaiotempo della teoria della Relatività Generale, che è una varietà a quattro dimensioni di segnatura iperbolica $(-+++)$.

I coefficienti (g_{ij}) , funzioni a loro volta delle coordinate lagrangiane, formano una matrice quadrata $n \times n$ regolare e simmetrica detta **matrice metrica**. La lunghezza delle curve su Q è l'integrale dell'elemento d'arco ds , il cui quadrato è dato da

$$(1') \quad ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j.$$

Nel caso di un sistema scleronomo l'energia cinetica T è una funzione positiva o nulla sopra TQ . Poiché essa è in particolare una forma quadratica definita positiva nelle velocità lagrangiane, la si può assumere come tensore metrico sulla varietà delle configurazioni. Più precisamente conviene porre

$$(2) \quad g = 2T$$

perché allora le componenti (g_{ij}) di g coincidono proprio coi coefficienti dell'energia cinetica.

La presenza della struttura riemanniana sulle varietà delle configurazioni stabilisce uno stretto legame tra la geometria riemanniana e la meccanica lagrangiana.

Come si è detto, un moto di un sistema olonomo è rappresentato dal moto di un punto sopra la varietà delle configurazioni Q , cioè da una curva $\gamma: I \rightarrow Q$ descritta localmente da equazioni parametriche

$$(3) \quad q^i = \gamma^i(t).$$

A questa curva corrisponde la **curva tangente** o **curva derivata** $v: I \rightarrow TQ: t \mapsto v(t)$, di equazioni parametriche

$$(4) \quad \begin{cases} q^i = \gamma^i(t), \\ v^i = \frac{dq^i}{dt}, \end{cases}$$

che fornisce la **velocità** istantanea del sistema, vale a dire l'atto di moto istantaneo per ogni $t \in I$.

È possibile definire per i sistemi olonomi il concetto di accelerazione. Si opera per analogia con quanto visto per l'accelerazione di un punto su di una superficie e per l'accelerazione di un punto libero in coordinate generiche. Questa volta però, al contrario di quanto accade per la definizione di velocità, interviene in maniera essenziale il tensore metrico.

DEFINIZIONE 2. Dicesi **accelerazione** di un moto $\gamma: I \rightarrow Q$ il vettore $a(t)$ di componenti $(a^i(t))$ definite da

$$(5) \quad a^i = \frac{dv^i}{dt} + \Gamma_{jh}^i v^j v^h = \frac{d^2 q^i}{dt^2} + \Gamma_{jh}^i \frac{dq^j}{dt} \frac{dq^h}{dt}$$

posto

$$(6) \quad \Gamma_{jh}^i = g^{ik} \Gamma_{jkh}, \quad \Gamma_{jkh} = \frac{1}{2} (\partial_j g_{hk} + \partial_h g_{kj} - \partial_k g_{jh}).$$

In questa definizione con (g^{ik}) s'intende al solito matrice inversa della matrice metrica (g_{ij}) e inoltre

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial q^i}.$$

Le funzioni Γ_{jh}^i e Γ_{jkh} sono i **simboli di Christoffel** corrispondenti alle coordinate (q^i) .

Per quel che riguarda invece le forze lagrangiane, esse possono interpretarsi come componenti di una forma differenziale lineare

$$(7) \quad \varphi = \varphi_i dq^i.$$

Ad ogni atto di moto v questa 1-forma fa corrispondere la potenza delle forze attive:

$$(8) \quad W_a = \langle v, \varphi \rangle.$$

La presenza del tensore metrico consente di definire, come negli spazi affini euclidei, una corrispondenza biunivoca tra campi vettoriali e 1-forme sulla varietà Q . Quindi alla 1-forma φ corrisponde un campo vettoriale su Q (eventualmente dipendente dal tempo e dalla velocità v)

$$(9) \quad F = \varphi^\sharp$$

le cui componenti sono ottenute con l'innalzamento dell'indice tramite la matrice metrica contravariante:

$$(10) \quad F^i = g^{ij} \varphi_j.$$

L'importanza di queste osservazioni è messa in evidenza dalla proprietà seguente.

PROPOSIZIONE 1. Le equazioni di Lagrange di un sistema olonomo a vincoli indipendenti dal tempo sono equivalenti all'equazione vettoriale

$$(11) \quad \boxed{\mathbf{a} = \mathbf{F}}$$

sulla varietà riemanniana delle configurazioni, cioè al sistema di equazioni

$$(12) \quad \boxed{\frac{d^2 q^i}{dt^2} + \Gamma_{jh}^i \frac{dq^j}{dt} \frac{dq^h}{dt} = F^i}$$

Dimostrazione. Stante la (1) e la (2) si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial v^i} &= g_{ij} v^j, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v^i} &= \partial_h g_{ij} v^h v^j + g_{ij} \frac{dv^j}{dt}, \\ \frac{\partial T}{\partial q^i} &= \frac{1}{2} \partial_i g_{jh} v^j v^h. \end{aligned}$$

Allora le equazioni di Lagrange diventano

$$g_{ij} \frac{dv^j}{dt} + \partial_h g_{ij} v^h v^j - \frac{1}{2} \partial_i g_{jh} v^j v^h = \varphi_i.$$

Quindi, per la simmetria di $v^j v^h$ e di g_{hj} ,

$$g_{ij} \frac{dv^j}{dt} + \frac{1}{2} (\partial_j g_{hi} + \partial_h g_{ij} - \partial_i g_{jh}) v^j v^h = \varphi_i.$$

Stante la definizione (6)₂ quest'ultima equazione si può scrivere

$$g_{ij} \frac{dv^j}{dt} + \Gamma_{jhi} v^j v^h = \varphi_i.$$

Di qui, con l'innalzamento dell'indice i (si vedano le (6) e la (10)) seguono le equazioni (13), quindi la (12). ■

OSSERVAZIONE 1. L'equazione (11), che è di tipo *newtoniano*, consente di affermare che: *i moti di un sistema olonomo a vincoli indipendenti dal tempo possono interpretarsi come moti di un punto materiale di massa unitaria sopra la varietà riemanniana delle configurazioni e soggetto ad un campo di forza $\mathbf{F}$ le cui componenti covarianti sono le forze lagrangiane.*

OSSERVAZIONE 2. Quando le forze lagrangiane sono nulle, quindi $\mathbf{F} = 0$, i moti di un sistema olonomo si dicono **moti spontanei**: il sistema si muove soltanto sotto l'azione dei propri vincoli (perfetti, quindi non dissipativi). L'equazione (11) diventa $\mathbf{a} = 0$. In analogia con quanto visto per le superfici, possiamo definire i moti con accelerazione nulla **moti geodetici**. Pertanto: *i moti spontanei di un sistema olonomo sono moti geodetici sulla varietà riemanniana delle configurazioni.* Sempre in virtù di quest'analogia segue che *nei moti spontanei l'energia cinetica è costante.* Come si vedrà più avanti (§10), la definizione di moto geodetico o di geodetica di una varietà riemanniana può darsi in maniera diretta e generale, senza il ricorso all'analogia con la geometria delle superfici.

OSSERVAZIONE 3. Dalle (12) risulta che le equazioni di Lagrange equivalgono ad un sistema di n equazioni differenziali del secondo ordine nelle funzioni $q^i(t)$. A loro volta le (12) equivalgono ad un sistema del primo ordine:

$$(13) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{dq^i}{dt} &= v^i \\ \frac{dv^i}{dt} &= F^i - \Gamma_{jh}^i v^j v^h \end{aligned}}$$

Se le forze lagrangiane non dipendono dal tempo questo sistema è autonomo e corrisponde quindi ad un campo vettoriale $\mathbf{X}_L$ sopra il fibrato tangente TQ , che chiamiamo **campo lagrangiano**. Su quest'ultima considerazione si ritornerà più avanti (§8).

7. Il potenziale e la lagrangiana

DEFINIZIONE 1. Sia dato un sistema olonomo a vincoli eventualmente dipendenti dal tempo con varietà delle configurazioni Q . Una funzione $U: TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, localmente rappresentata da una funzione $U(q^i, v^i, t)$ delle coordinate lagrangiane, delle velocità lagrangiane e del tempo è detta **potenziale** se le forze lagrangiane sono esprimibili con la formula

$$(1) \quad \varphi_i = \frac{\partial U}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial v^i} \right)$$

L'interesse di questa definizione risiede nel fatto che se esiste un potenziale U allora le equazioni di Lagrange assumono la forma

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

introdotta la funzione

$$(3) \quad L = T + U$$

Queste equazioni prendono il nome di **equazioni di Euler-Lagrange**. I primi membri, che denoteremo anche con L_i , prendono il nome di **binomi lagrangiani**. La funzione L è chiamata **lagrangiana** del sistema.

La lagrangiana è una funzione reale su $TQ \times \mathbb{R}$, esprimibile localmente in una funzione $L(q^i, v^i, t)$ delle coordinate lagrangiane, delle velocità lagrangiane e del tempo. La lagrangiana racchiude in sé tutte le caratteristiche e le proprietà dinamiche del sistema olonomo, perché è con questa sola funzione che risultano determinate le equazioni che ne governano tutti i possibili moti: le equazioni di Euler-Lagrange.

Si consideri, come primo caso, un sistema olonomo a vincoli indipendenti dal tempo e con forze lagrangiane dipendenti solo dalle coordinate lagrangiane. Come si è visto al §6, le forze lagrangiane possono interpretarsi come componenti di una forma differenziale lineare sulla varietà delle configurazioni Q :

$$(4) \quad \varphi = \varphi_i dq^i.$$

Il potenziale è in questo caso una funzione $U: Q \rightarrow \mathbb{R}$, cioè una funzione delle sole coordinate lagrangiane, per cui la (1) si semplifica in

$$(5) \quad \varphi_i = \partial_i U.$$

Ciò significa che

$$(6) \quad \boxed{\varphi = dU}$$

cioè che φ è esatta e che U ne è un potenziale nel senso della teoria delle forme differenziali. Il potenziale è determinato a meno di una costante additiva. Sappiamo per il lemma di Poincaré che condizione necessaria per l'esistenza di un potenziale (e sufficiente per l'esistenza locale) è che questa forma sia chiusa,

$$(7) \quad d\varphi = 0,$$

cioè che, in componenti, valgono le equazioni

$$(8) \quad \partial_i \varphi_j = \partial_j \varphi_i.$$

Sulla varietà delle configurazioni, il campo vettoriale $\mathbf{F}$ corrispondente alla forma φ è il gradiente di U : $\mathbf{F} = \text{grad}(U)$. Un sistema olonomo a vincoli indipendenti dal tempo le cui forze lagrangiane ammettono un potenziale indipendente dalle velocità e dal tempo si dice **sistema olonomo conservativo**. Un sistema olonomo conservativo è pertanto caratterizzato da una terna $(Q, \mathbf{g}, U)$ dove $(Q, \mathbf{g})$ è la varietà riemanniana delle configurazioni e $U: Q \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione potenziale.

Nel caso di un sistema olonomo, a vincoli eventualmente dipendenti dal tempo ma con forze lagrangiane non dipendenti dalle velocità (quindi dipendenti dalle coordinate lagrangiane e dal tempo) il potenziale è una funzione $U: Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cioè una funzione delle coordinate lagrangiane e del tempo (si veda l'Oss. 4, più avanti), per cui il legame (1) tra potenziale e forze lagrangiane si riduce ancora all'equazione (5).

OSSERVAZIONE 1. Occorre osservare che, in questo come nel caso precedente, il potenziale U è legato alla potenza virtuale delle forze attive dall'equazione

$$(9) \quad W_a^{(v)} = \delta U = \partial_i U \delta q^i.$$

Qui il simbolo δ applicato alla funzione potenziale U ha formalmente il significato di "derivata totale rispetto al tempo", fatta però con i vincoli supposti fissi. L'utilità del concetto di potenziale risiede proprio nel fatto che esso si calcola di solito (almeno nei due casi considerati) per via diretta, cioè senza il passaggio attraverso le forze lagrangiane, o mediante la (9) oppure sommando i potenziali delle varie forze che operano sul sistema

ESEMPIO 1. Nell'Esempio 1 del §5 (piano inclinato mobile) il potenziale delle forze peso si manifesta solo sul disco ed è pari a $U = -m g y_G$ (y_G = quota del baricentro). Facendo intervenire le coordinate lagrangiane (in questo caso, in effetti, ne interviene solo una), essendo $y_G = -s \sin \alpha + \text{costante}$, si trova $U = m g \sin \alpha s$. Nell'Esempio 2 (bipendolo piano) si ha evidentemente $U = m g x_a + m g x_B$ e quindi $U = m g l (2 \cos \theta + \cos \phi)$. Nell'Esempio 3 (pendolo a raggio variabile) il calcolo del potenziale è immediato, in base a quanto detto nell'osservazione precedente: $U = m g x_P = m g l(t) \cos \vartheta$.

Discutiamo ora il caso generale. Poniamo $q^0 = t$, interpretando il tempo come coordinata sullo spazio-tempo delle configurazioni $\bar{Q} \simeq \mathbb{R} \times Q$. Poniamo $(q^\alpha) = (q^0, q^i)$ con indici greci variabili da 0 a n . Denotiamo con ∂_α la derivata parziale rispetto alla coordinata q^α .

Sviluppando il secondo membro della (1), tenendo conto che $v^i = \frac{dq^i}{dt}$, si trova

$$(10) \quad \varphi_i = \frac{\partial U}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 U}{\partial q^j \partial v^i} v^j - \frac{\partial^2 U}{\partial v^j \partial v^i} \frac{dv^j}{dt} - \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial v^i}.$$

Se si esclude per principio la dipendenza delle forze lagrangiane dalle accelerazioni, deve essere identicamente

$$\frac{\partial^2 U}{\partial v^j \partial v^i} = 0.$$

La più generale funzione U soddisfacente a queste equazioni è un polinomio di primo grado nelle velocità lagrangiane:

$$(11) \quad U = \alpha_0 + \alpha_i v^i$$

Se si sostituisce nelle (10) una funzione di questo tipo si trova

$$\varphi_i = \partial_i \alpha_0 - \partial_0 \alpha_i + (\partial_i \alpha_j - \partial_j \alpha_i) v^j.$$

Quindi se si pone

$$(12) \quad \begin{cases} \beta_{ij} = \partial_i \alpha_j - \partial_j \alpha_i \\ \beta_{i0} = \partial_i \alpha_0 - \partial_0 \alpha_i \end{cases}$$

risulta

$$(13) \quad \varphi_i = \beta_{i0} + \beta_{ij} v^j$$

con

$$\beta_{ij} = -\beta_{ji}$$

Si può pertanto affermare che

PROPOSIZIONE 1. Esclusa la dipendenza dalle accelerazioni delle forze lagrangiane, condizione necessaria affinché queste ammettano un potenziale è che esse siano polinomi di primo grado nelle velocità lagrangiane a coefficienti antisimmetrici, cioè del tipo (13). In tal caso il potenziale è un polinomio di primo grado nelle velocità lagrangiane, cioè del tipo (11).

Si tratta ora di interpretare i legami (12) tra i coefficienti del polinomio U con i coefficienti dei polinomi φ_i . Per far questo si osserva che ad un potenziale del tipo (11) corrisponde una forma differenziale lineare su $T\bar{Q}$

$$(14) \quad \bar{\alpha} = \alpha_0 dt + \alpha_i dq^i = \alpha_\alpha dq^\alpha.$$

mentre i coefficienti (β_{i0}, β_{ij}) delle forze lagrangiane (13), posto $\beta_{i0} = -\beta_{0i}$, possono interpretarsi come componenti

$$(15) \quad (\beta_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & \beta_{0j} \\ \beta_{i0} & \beta_{ij} \end{pmatrix}$$

di una 2-forma su $T\bar{Q}$:

$$(16) \quad \bar{\beta} = \frac{1}{2} \beta_{\alpha\beta} dq^\alpha \wedge dq^\beta.$$

Allora i legami (12) si traducono semplicemente nella condizione

$$(17) \quad \bar{\beta} = d\bar{\alpha}$$

Infatti differenziando la (14) si trova

$$\begin{aligned}\bar{\beta} &= \partial_i \alpha_0 dq^i \wedge dq^0 + \partial_0 \alpha_i dq^0 \wedge dq^i + \partial_j \alpha_i dq^j \wedge dq^i \\ &= (\partial_i \alpha_0 - \partial_0 \alpha_i) dq^i \wedge dq^0 + \frac{1}{2} (\partial_i \alpha_j - \partial_j \alpha_i) dq^i \wedge dq^j \\ &= \beta_{i0} dq^i \wedge dq^0 + \frac{1}{2} \beta_{ij} dq^i \wedge dq^j.\end{aligned}$$

Si può quindi affermare che

PROPOSIZIONE 2. Se le forze lagrangiane sono polinomi di primo grado nelle velocità lagrangiane con coefficienti antisimmetrici (cioè del tipo (13)) e se questi coefficienti si interpretano come componenti di una 2-forma $\bar{\beta}$ su $\bar{Q}$, allora condizione necessaria e sufficiente affinché esista un potenziale è che $\bar{\beta}$ sia esatta: $\bar{\beta} = d\bar{\alpha}$. Il potenziale è in tal caso un polinomio di primo grado nelle velocità lagrangiane i cui coefficienti sono le componenti della 1-forma $\bar{\alpha}$ (formula (11)).

Ricordato il lemma di Poincaré, si può anche affermare che

PROPOSIZIONE 3. Condizione necessaria per l'esistenza di un potenziale e condizione sufficiente per l'esistenza di potenziali locali è che la 2-forma $\bar{\beta}$ sia chiusa: $d\bar{\beta} = 0$.

OSSERVAZIONE 2. In componenti la condizione di chiusura di $\bar{\beta}$ è espressa dalle equazioni

$$(18) \quad \partial_\alpha \beta_{\beta\gamma} + \partial_\beta \beta_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma \beta_{\alpha\beta} = 0,$$

le quali si spezzano nei due gruppi di equazioni

$$(19) \quad \begin{cases} \partial_i \beta_{jk} + \partial_j \beta_{ki} + \partial_k \beta_{ij} = 0 \\ \partial_0 \beta_{ij} + \partial_i \beta_{j0} - \partial_j \beta_{i0} = 0 \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 3. La (17) mostra che la 1-forma potenziale $\bar{\alpha}$ è determinata a meno di una forma esatta, cioè che essa può essere sostituita da $\bar{\alpha} + dF$, qualunque sia funzione $F: Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ciò significa che il potenziale è determinato a meno di funzioni additive del tipo

$$\partial_0 F + \partial_i F v^i,$$

più ovviamente delle costanti.

OSSERVAZIONE 4. Il caso delle forze lagrangiane non dipendenti dalle velocità lagrangiane è caratterizzato dalla condizione $\beta_{ij} = 0$ (si veda la (13)). La prima delle (12) mostra che $\partial_i \alpha_j = \partial_j \alpha_i$ e quindi che esiste una funzione F delle coordinate e del tempo tale che $\alpha_i = \partial_i F$. La seconda delle (12) mostra a sua volta che $\varphi_i = \beta_{i0} = \partial_i(\alpha_0 - \partial_0 F)$, cioè che vale la (5) con $U = \alpha_0 - \partial_0 F$, cioè che, se esiste il potenziale, questo è funzione delle sole coordinate e del tempo. La (11) mostra invece che il potenziale è del tipo $U = \alpha_0 + \partial_i F v^i$, cioè che è lineare nelle velocità. Questa seconda conclusione non è in contraddizione con la prima per quanto visto nell'osservazione precedente.

ESEMPIO 2. Dimostriamo che nello spazio affine tridimensionale euclideo la più generale forza che ammette potenziali locali è del tipo

$$(20) \quad \boxed{\mathbf{F} = \mathbf{E} - \mathbf{B} \times \mathbf{v}}$$

dove $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ sono campi vettoriali (eventualmente dipendenti dal tempo) soddisfacenti alle equazioni

$$(21) \quad \boxed{\operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\mathbf{E}) = 0}$$

Il potenziale è del tipo

$$(22) \quad \boxed{U = \phi + \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}}$$

ed il legame tra forza e potenziale è dato dalle equazioni

$$(23) \quad \boxed{\mathbf{B} = \operatorname{rot}(\mathbf{A}), \quad \mathbf{E} = \operatorname{grad}(\phi) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}}$$

(i) La (20) è infatti la traduzione in forma vettoriale della formula (13), introdotte le 1-forme $\varphi = \mathbf{F}^b$ e $\varepsilon = \mathbf{E}^b$, corrispondenti alle forze $\mathbf{F}$ e $\mathbf{E}$, di componenti φ_i e

$$\varepsilon_i = \beta_{i0}$$

rispettivamente, e la 2-forma $\beta = *\mathbf{B}$, di componenti β_{ij} , aggiunta del campo $\mathbf{B}$. Va ricordato che $\mathbf{B} \times \mathbf{v} = \beta(\mathbf{v})$ e che in componenti

è $(\beta(v))_i = \beta_{ji} v^j$. (ii) Le (21) sono le equivalenti vettoriali delle condizioni di chiusura (19). Infatti queste ultime si traducono nella scrittura

$$\begin{cases} d\beta = 0, \\ \partial_0 \beta + d\varepsilon = 0, \end{cases}$$

e quindi, operando con l'aggiunzione su entrambe,

$$\begin{cases} *d*\beta = 0, \\ \partial_0 *\beta + *d\varepsilon = 0. \end{cases}$$

Ricordato che per ogni campo vettoriale X si ha per definizione

$$\begin{cases} \operatorname{div}(X) = *d*X, \\ \operatorname{rot}(X) = *dX^b, \end{cases}$$

si trovano le (21). (iii) L'espressione (22) del potenziale è la traduzione della (11), denotata con $\alpha = A^b$ la 1-forma corrispondente al vettore A , di componenti α_i , e posto

$$\phi = \alpha_0.$$

(iv) Infine le equazioni (23) sono equivalenti alle condizioni di esattezza (12). Infatti queste ultime, con le posizioni fatte, sono equivalenti a

$$\begin{cases} \beta = d\alpha, \\ \varepsilon = d\phi - \partial_0 \alpha. \end{cases}$$

Operando sulla prima con l'aggiunzione e sulla seconda con l'operatore $\sharp$ inverso di b , e ricordata la definizione di gradiente, si trovano le (23).

Una particella dotata di carica elettrica e immersa in un campo elettrico E e in un campo magnetico B è soggetta alla forza di Lorentz

$$F_L = e(E - \frac{1}{c} B \times v),$$

dove c è la costante velocità della luce nel vuoto. È una forza del tipo (20). Le corrispondenti equazioni (21), con B sostituito da $\frac{1}{c}B$, costituiscono la prima coppia delle fondamentali **equazioni di Maxwell** dell'elettromagnetismo (James Clerk Maxwell, 1831 - 1879). Il vettore A è detto **potenziale vettore**, la funzione ϕ **potenziale scalare**. Si noti che le equazioni di Maxwell (21) si sono qui dedotte solo come condizioni necessarie per l'esistenza di un potenziale, senza alcuna altra considerazione d'ordine fisico.

8. Sistemi lagrangiani

Nel § precedente si è visto che la dinamica di un sistema olonomo dotato di potenziale è "generata" da una funzione "caratteristica": la lagrangiana $L = T + U$. Questa circostanza conduce alla seguente estensione del concetto di "dinamica".

DEFINIZIONE 1. Diciamo **sistema lagrangiano** una coppia (Q, L) costituita da una varietà differenziabile Q di dimensione n , detta **varietà delle configurazioni**, e da una funzione reale $L: TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (di classe C^∞) detta **lagrangiana**. Il sistema lagrangiano si dice **tempo-indipendente** (brevemente, *t-indipendente*) se la lagrangiana si riduce ad una funzione $L: TQ \rightarrow \mathbb{R}$. La **dinamica** di un sistema lagrangiano è l'insieme delle curve su Q soddisfacenti al sistema di $2n$ equazioni

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = v^i \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \end{cases}$$

I primi membri delle equazioni $(1)_2$,

$$(2) \quad L_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i},$$

prendono il nome di **binomi lagrangiani**. Le equazioni $(1)_2$ prendono il nome di **equazioni di Euler-Lagrange**. Si denotano al solito con (q^i) generiche coordinate su Q e con (q^i, v^i) (o anche con $(q^i, \dot{q}^i)$) le corrispondenti coordinate su TQ (coordinate e velocità lagrangiane). La lagrangiana L è quindi localmente rappresentata da una funzione nelle $2n+1$ variabili (q^i, v^i, t) oppure nelle sole (q^i, v^i) nel caso *t*-indipendente. Vale per il sistema (1) la stessa Oss. 8 del §5: il sistema (1) è un sistema di $2n$ equazioni differenziali del *primo ordine* nelle $2n$ funzioni incognite $(q^i(t), v^i(t))$; tuttavia, per effetto delle prime n equazioni, le seconde si riducono a n equazioni del *secondo ordine* nelle sole n funzioni incognite $(q^i(t))$, le cui soluzioni forniscono appunto le equazioni parametriche locali delle curve su Q costituenti la dinamica del sistema lagrangiano.

OSSERVAZIONE 1. Perché la definizione ora data di dinamica di un sistema lagrangiano abbia senso occorre verificare il carattere intrinseco delle equazioni di Euler-Lagrange (1), cioè la loro indipendenza

dalla scelta delle coordinate lagrangiane. Ciò si può fare direttamente, con qualche calcolo. Tuttavia, nel caso dei sistemi olonomi, il carattere intrinseco di queste equazioni è già implicitamente riconosciuto dal fatto che esse sono dedotte, utilizzando un generico sistema di coordinate lagrangiane, dal principio di D'Alembert-Lagrange, che ha carattere intrinseco. Nel prossimo § sarà comunque dimostrato che le equazioni di Euler-Lagrange, per una qualsiasi lagrangiana, sono equivalenti ad un altro principio di natura intrinseca: il principio della minima azione.

OSSERVAZIONE 2. In certi casi il sistema (1), inteso come sistema del primo ordine nelle (q^i, v^i) , può essere posto completamente in forma normale (le prime n equazioni lo sono già) cioè nella forma

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = v^i, \\ \frac{dv^i}{dt} = f^i(q^h, v^k, t). \end{cases}$$

Il sistema lagrangiano è allora equivalente ad un sistema dinamico in senso ordinario cioè ad un campo vettoriale $\mathbf{X}_L$, detto **campo lagrangiano**. Se la lagrangiana e quindi i secondi membri del sistema normale equivalente (3) non dipendono esplicitamente dal tempo (col che il sistema (3) è *autonomo*) questo campo vettoriale è definito sopra il fibrato tangente TQ . Se invece vi è dipendenza dal tempo, è definito sulla varietà prodotto $TQ \times \mathbb{R}$. In questo secondo caso infatti, seguendo la stessa tecnica vista per la dinamica di un punto, si introduce un tempo fittizio τ come ulteriore variabile e si aggiunge al sistema l'equazione $\frac{d\tau}{dt} = 1$. Quando un sistema lagrangiano è di questo tipo si possono applicare tutte le nozioni ed i teoremi relativi ai campi vettoriali, in particolare (sotto le solite ipotesi di regolarità) il teorema di Cauchy per cui, assegnato un atto di moto iniziale (ad un istante t_0), risulta determinato un unico moto del sistema.

DEFINIZIONE 2. Una lagrangiana si dice **regolare** se è regolare la sua matrice hessiana rispetto alle velocità lagrangiane, cioè se è $\det(g_{ij}) \neq 0$, posto

$$(4) \quad g_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}.$$

PROPOSIZIONE 1. Se la lagrangiana è regolare il sistema (1) è riducibile a forma normale, cioè equivalente ad un sistema del tipo (3).

Dimostrazione. Lo sviluppo dei binomi lagrangiani (primi membri delle (1)₂) porta alle seguenti equazioni (si tenga conto delle n equazioni $\frac{dq^i}{dt} = v^i$)

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i} v^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} \frac{dv^j}{dt} + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial v^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0,$$

che in generale non possono risolversi rispetto alle derivate delle (v^i) . Se la lagrangiana è regolare ciò è possibile. Operando con la matrice inversa (g^{ki}) si riconduce il sistema (1) alla forma normale

$$(5) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{dq^i}{dt} &= v^i, \\ \frac{dv^k}{dt} &= g^{ki} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i} v^j - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial v^i} \right) \end{aligned}} \quad \blacksquare$$

OSSERVAZIONE 3. Nel caso dei sistemi olonomi dotati di potenziale $L = T + U$. Poiché è lineare nelle velocità, il potenziale U non interviene nell'hessiano (4) per cui

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} = \frac{\partial^2 T}{\partial v^i \partial v^j}.$$

Questi elementi coincidono proprio con i coefficienti della parte omogenea quadratica dell'energia cinetica,

$$T = \frac{1}{2} g_{ij} v^i v^j + g_{i0} v^i + \frac{1}{2} g_{00}.$$

Poiché, come si è osservato alla fine del §5, questa è una forma quadratica definita positiva, si ha $\det(g_{ij}) > 0$ e la lagrangiana è regolare.

OSSERVAZIONE 4. Si consideri una lagrangiana del tipo

$$(6) \quad L = \partial_0 F + v^i \partial_i F$$

dove F è una funzione reale sopra $Q \times \mathbb{R}$ (quindi funzione delle coordinate lagrangiane e del tempo). Poiché L è lineare nelle velocità lagrangiane si ha identicamente $g_{ij} = 0$. Non è dunque una lagrangiana regolare. Si verifica che i binomi lagrangiani corrispondenti si annullano identicamente. Ciò significa che la dinamica di una tale lagrangiana è costituita da tutte le curve su Q . Di conseguenza, se ad una qualunque lagrangiana si aggiunge una lagrangiana del tipo (6) la dinamica non risulta alterata (si veda anche l'Oss. 3, §7).

9. Integrali primi dei sistemi lagrangiani

DEFINIZIONE 1. Una funzione differenziabile $F: TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è un **integrale primo** di un sistema lagrangiano (Q, L) se è costante su tutte le soluzioni delle corrispondenti equazioni di Euler-Lagrange, cioè se in corrispondenza ad ogni soluzione vale la condizione

$$(1) \quad \frac{dF}{dt} = 0.$$

Se il sistema lagrangiano equivale ad un campo lagrangiano X_L si ricade nella solita definizione di integrale primo di un campo vettoriale. Le proposizioni seguenti mettono in evidenza due integrali primi tipici dei sistemi lagrangiani.

PROPOSIZIONE 1. Se la lagrangiana è indipendente dal tempo allora la funzione

$$(2) \quad E = \frac{\partial L}{\partial v^i} v^i - L.$$

è un integrale primo.

Dimostrazione. Derivando totalmente rispetto al tempo si trova

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \right) v^i + \frac{\partial L}{\partial v^i} \frac{dv^i}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} - \frac{\partial L}{\partial v^i} \frac{dv^i}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Facendo intervenire le equazioni di Euler-Lagrange si trova

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

per cui l'indipendenza dal tempo della lagrangiana, che equivale all'annullarsi identico della sua derivata parziale rispetto a t

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0,$$

implica

$$\frac{dE}{dt} = 0. \quad \blacksquare$$

La funzione E prende il nome di **energia** del sistema lagrangiano. Questa terminologia è giustificata dal fatto che nel caso di un sistema scleronomo conservativo, dove il potenziale U è una funzione su Q (dipende solo dalle coordinate lagrangiane), risulta

$$(3) \quad E = T - U.$$

Infatti, poiché in questo caso l'energia cinetica è una forma quadratica nelle velocità lagrangiane, risulta ⁽¹⁾

$$(4) \quad v^i \frac{\partial T}{\partial v^i} = 2T$$

⁽¹⁾ È bene ricordare a questo proposito il **teorema di Euler sulle funzioni omogenee**. Una funzione $F(v^i)$ di n variabili (v^i) si dice omogenea di grado k se per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$F(\alpha v^i) = \alpha^k F(v^i).$$

Il teorema di Euler afferma che se $F(v^i)$ è una funzione omogenea di grado k allora si ha identicamente (somma sottintesa sull'indice ripetuto)

$$v^i \frac{\partial F}{\partial v^i} = k F.$$

L'energia cinetica è omogenea di grado 2 nelle (v^i) per cui la (4) può essere vista come conseguenza di questo teorema. Se F è omogenea di grado k allora le sue derivate parziali $\partial F / \partial v^i$ sono omogenee di grado $k - 1$. Infatti, derivando parzialmente l'uguaglianza precedente rispetto a v^j , risulta

$$v^i \frac{\partial^2 F}{\partial v^i \partial v^j} = (k - 1) \frac{\partial F}{\partial v^j}.$$

Se in particolare è $k = 1$ si trova che

$$v^i \frac{\partial^2 F}{\partial v^i \partial v^j} = 0.$$

Di qui si trae che se una lagrangiana è omogenea di grado 1 nelle velocità allora essa è necessariamente non regolare, perché valgono le equazioni

$$v^i g_{ij} = 0$$

con le (v^i) non necessariamente nulle.

e di conseguenza

$$E = \frac{\partial L}{\partial v^i} v^i - L = \frac{\partial T}{\partial v^i} v^i - T - U = T - U.$$

DEFINIZIONE 2. Dato un sistema lagrangiano (Q, L) ed un sistema di coordinate (q^i) sulla varietà Q , le funzioni

$$(5) \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}$$

prendono il nome di **momenti cinetici** del sistema lagrangiano. Una coordinata q^i si dice **ignorabile** se la lagrangiana non dipende esplicitamente da questa, cioè se si ha identicamente

$$(6) \quad \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0.$$

PROPOSIZIONE 2. Il momento corrispondente ad una coordinata ignorabile è un integrale primo.

Dimostrazione. Stante la definizione (5) le equazioni di Euler-Lagrange possono scriversi

$$(7) \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^i}.$$

Se una coordinata q^i è ignorabile il secondo membro è identicamente nullo e quindi p_i è costante. ■

ESEMPIO 1. Nel moto di un punto libero soggetto ad un campo di forze conservativo i momenti cinetici (p_i) coincidono con le componenti covarianti della quantità di moto $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Infatti, prendendo per esempio delle coordinate cartesiane ortonormali, risulta

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z),$$

per cui

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m \dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \dot{z}.$$

Si consideri in particolare il caso di una forza conservativa e perpendicolare all'asse z . Poiché la componente F_z secondo l'asse z di una forza conservativa è data da

$$F_z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

l'ortogonalità della forza all'asse z equivale alla non dipendenza da z del potenziale. Dunque la lagrangiana non dipende da z e questa è una coordinata ignorabile. Il corrispondente momento cinetico p_z è pertanto un integrale primo. Si ritrova così l'integrale primo della quantità di moto rispetto ad una direzione.

ESEMPIO 2. Nel moto piano di un punto soggetto ad un campo centrale simmetrico la lagrangiana è (in coordinate polari)

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2) + U(r).$$

La coordinata ϑ è ignorabile. Pertanto il corrispondente momento cinetico

$$p_{\vartheta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = m r^2 \dot{\vartheta}$$

è un integrale primo. Si ritrova così l'integrale primo delle aree.

OSSERVAZIONE 1. Nei due esempi precedenti gli integrali primi sono conseguenza di un'invarianza della lagrangiana: nel primo caso rispetto a traslazioni lungo una direzione, nel secondo rispetto a rotazioni intorno ad un punto. Anche l'integrale primo dell'energia è conseguenza di un'invarianza: rispetto alle *traslazioni temporali*. Da questo punto di vista il tempo t può essere considerato come coordinata ignorabile. Questi fatti lasciano intravedere una relazione generale tra l'esistenza di integrali primi e l'invarianza della lagrangiana rispetto a trasformazioni o *simmetrie* della varietà Q .

Vediamo ora una notevole applicazione della teoria precedente.

ESEMPIO 3. **Il giroscopio pesante** (ovvero la **trottola di Lagrange**). Si consideri un corpo rigido con un punto fisso O . Si prendano come coordinate lagrangiane i tre angoli di Euler (θ, ϕ, ψ) della terna principale d'inerzia $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ in O rispetto ad una terna fissa $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$,

secondo quanto stabilito al §8 del Cap. IV (si veda la Fig. 8.1). Le componenti (p, q, r) della velocità angolare ω secondo la terna (i, j, k) sono date dalle formule (3) del §8, Cap. IV. Poiché

$$T = \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2),$$

con (A, B, C) momenti principali d'inerzia, utilizzando queste formule si trova

$$T = \frac{1}{2} (A (\cos \phi \dot{\theta} + \sin \phi \sin \theta \dot{\psi})^2 + B (\sin \phi \dot{\theta} + \cos \phi \sin \theta \dot{\psi})^2 + C (\cos \theta \dot{\psi} + \dot{\phi})^2).$$

Quest'espressione si semplifica notevolmente nel caso in cui $A = B$, cioè nel caso di un corpo rigido simmetrico (detto anche **giroscopio**). Essendo $p^2 + q^2 = \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\psi}^2$, risulta infatti

$$T = \frac{A}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\psi}^2) + \frac{C}{2} (\cos \theta \dot{\psi} + \dot{\phi})^2.$$

Nel caso in cui il corpo rigido simmetrico intorno all'asse k sia soggetto alla sola forza peso (come accade per una trottola), osservato che il baricentro G si trova sull'asse di simmetria, il potenziale è dato da

$$U = -m g l \cos \theta,$$

dove $l = |OG|$ (il versore c_3 è verticale e orientato verso l'alto). La lagrangiana della trottola è pertanto

$$L = \frac{A}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\psi}^2) + \frac{C}{2} (\cos \theta \dot{\psi} + \dot{\phi})^2 - m g l \cos \theta$$

Si osserva allora che ϕ e ψ sono coordinate ignorabili. Quindi i corrispondenti momenti cinetici

$$\begin{cases} p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = C (\cos \theta \dot{\psi} + \dot{\phi}) = C r, \\ p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = (A \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta) \dot{\psi} + C \cos \theta \dot{\phi}, \end{cases}$$

sono integrali primi⁽¹⁾. Per l'energia totale si trova inoltre l'espressione

$$E = \frac{A}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{(p_\psi - p_\phi \cos \theta)^2}{2 A \sin^2 \theta} + \frac{p_\phi^2}{2 C} + m g l \cos \theta.$$

⁽¹⁾ Che la componente r secondo l'asse di simmetria k della velocità angolare sia un integrale primo segue immediatamente dalla terza delle equazioni di Euler, $C \dot{r} = (A - B) p q + Z$, osservato che la componente Z rispetto a tale asse del momento M_O della forza peso è nulla.

La presenza di questi tre integrali primi consente di riconoscere facilmente alcune interessanti proprietà del moto di una trottola. Infatti dall'integrale dell'energia si trae un'equazione di Weierstrass per l'angolo di nutazione θ , angolo che l'asse della trottola forma con la verticale. Meglio ancora, se si pone $x = \cos \theta$, si vede che l'integrale dell'energia si traduce nell'equazione di Weierstrass

$$\dot{x}^2 = \Phi(x), \quad \Phi(x) = (1 - x^2)(a - b x) - (c - d x)^2,$$

con le costanti (a, b, c, d) date da

$$a = \frac{1}{A} \left(2E - \frac{p_\phi^2}{C} \right), \quad b = \frac{2}{A} m g l, \quad c = \frac{p_\psi}{A}, \quad d = \frac{p_\phi}{A}.$$

La funzione $\Phi(x)$ è un polinomio di terzo grado che tende a $+\infty$ per $x \rightarrow +\infty$ (essendo $b > 0$ con $l \neq 0$). Le costanti di moto ammissibili devono essere tali da non produrre tutti valori negativi di $\Phi(x)$ nell'intervallo $[-1, 1]$ (perché $x = \cos \theta$). Siccome $\Phi(\pm 1) = -(c \mp d)^2 \leq 0$, escludendo i casi in cui si hanno degli zeri agli estremi (si osservi che gli angoli di Euler ψ e ϕ non sono definiti per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$), si devono avere almeno due radici (x_1, x_2) all'interno di quest'intervallo (distinte o coincidenti). Pertanto l'angolo di nutazione, fatta eccezione per i casi esclusi, varia periodicamente tra i due valori (θ_1, θ_2) determinati da queste radici. Dai due integrali primi dei momenti cinetici si possono invece ricavare la velocità di precessione $\dot{\psi}$ e la velocità di rotazione propria $\dot{\phi}$ in funzione di θ . Risulta:

$$\dot{\psi} = \frac{c - d x}{1 - x^2}, \quad \dot{\phi} = e + \frac{x(d x - c)}{1 - x^2},$$

posto ancora

$$e = \frac{p_\phi}{C} = \frac{A}{C} d.$$

Per quel che riguarda il moto di precessione si hanno tre casi, a seconda che lo zero di $\dot{\psi}$, $x_0 = \frac{c}{d}$, si trovi all'esterno o all'interno dell'intervallo (x_1, x_2) o coincida con uno degli estremi. Se si trova all'esterno, $\dot{\psi}$ non cambia di segno e il moto di precessione è monotono; il punto P intersezione dell'asse della trottola con la sfera unitaria di centro O descrive una curva di tipo sinusoidale compresa tra i due meridiani (θ_1, θ_2) . Se è interno, siccome $\dot{\psi}$ cambia di segno, si ha invece un moto "inanelato",

cioè di tipo cicloidale accorciato. Se coincide con uno degli estremi, il moto di precessione non si inverte mai ma ha degli istanti di arresto, per cui la curva descritta dall'intersezione P presenta delle cuspidi. Infine, il caso in cui i due zeri coincidono corrisponde a un moto di precessione regolare. Infatti in questo caso θ è costante e di conseguenza anche $\dot{\psi}$ e $\dot{\phi}$ sono costanti. Questi moti di precessione sono *stabili*, nel senso che una piccola perturbazione non produce sensibili effetti: infatti una piccola variazione delle costanti di moto non può che produrre uno dei tre casi precedenti, con i due meridiani ravvicinati.

10. Il principio dell'azione stazionaria

Sia Ω l'insieme di tutte le n -ple di funzioni reali $(q^i(t)) = (q^1(t), \dots, q^n(t))$ di classe C^k sopra intervalli contenenti un prefissato intervallo chiuso $[t_1, t_2]$. Chiamiamo **funzionale** un'applicazione

$$\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

che ad ogni n -pla di funzioni fa corrispondere un numero reale. Un funzionale ϕ si dice **differenziabile** nel "punto" $(q^i(t)) \in \Omega$ se per ogni scelta degli incrementi o **variazioni** $(\delta q^i(t))$, anch'esse funzioni appartenenti all'insieme Ω , sussiste un'uguaglianza del tipo

$$(1) \quad \phi(q^i + \delta q^i) = \phi(q^i) + \delta\phi(q^i, \delta q^i) + R,$$

dove $\delta\phi$ funzionale lineare delle (δq^i) ed R funzionale di "ordine superiore" in tali incrementi. Con ciò si vuol dire che se si considera una famiglia di variazioni del tipo

$$(2) \quad \delta q^i = \varepsilon \eta^i,$$

con $(\eta^i(t)) \in \Omega$ n -pla fissata a piacere e ε parametro reale, osservato che risulta definita la funzione reale

$$(3) \quad F(\varepsilon) = \phi(q^i + \varepsilon \eta^i),$$

allora il funzionale è differenziabile se per ogni scelta delle (η^i) risulta

$$(4) \quad F(\varepsilon) = F(0) + (A + \sigma(\varepsilon))\varepsilon$$

con A costante e $\sigma(\varepsilon)$ infinitesimo per $\varepsilon \rightarrow 0$. Dal confronto della (1) con la (4) segue che

$$(5) \quad A\varepsilon = \delta\phi(q^i, \varepsilon \eta^i).$$

Il funzionale $\delta\phi$ prende il nome di **variazione prima** del funzionale ϕ in $(q^i) \in \Omega$. Poiché dalla (4) segue

$$A = \left(\frac{dF}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0},$$

risulta per la (5)

$$(6) \quad \delta\phi = \varepsilon \left(\frac{dF}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}.$$

Questa formula consente di calcolare la variazione prima di ϕ attraverso la funzione F costruita con una qualsiasi famiglia di incrementi del tipo (2).

Una classe importante di funzionali è costituita dai **funzionali d'azione**. Sia $L = L(q^i, v^i, t)$ una funzione reale di classe C^2 in un dominio aperto $D \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, tale da rendere definito l'integrale

$$(7) \quad \phi_L(q^i(t)) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q^i(t), \dot{q}^i(t)) dt$$

per ogni n -pla di funzioni reali $(q^i(t))$ di classe C^1 sopra $[t_1, t_2]$ (intendiamo con $\dot{q}^i$ le derivate di queste funzioni). L'integrale (7) definisce un funzionale sopra l'insieme Ω di tali n -ple, detto **azione** associata alla funzione L .

La funzione $L(q^i, v^i, t)$ può considerarsi la rappresentazione locale di una funzione $L: TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (di classe C^2 almeno), dove Q è una varietà differenziabile di coordinate locali generiche (q^i) . Il funzionale ϕ_L può allora essere inteso definito sull'insieme delle curve sopra la varietà Q , i cui intervalli di definizione contengono l'intervallo chiuso $[t_1, t_2]$ (e le cui immagini sono contenute nel dominio delle coordinate).

PROPOSIZIONE 1. Il funzionale ϕ_L è differenziabile e la sua variazione prima è

$$(8) \quad \delta\phi_L = - \int_{t_1}^{t_2} L_i \delta q^i dt + \left[\frac{\partial L}{\partial v^i} \delta q^i \right]_{t_1}^{t_2}$$

posto

$$(9) \quad L_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}.$$

Dimostrazione. Occorre far ricorso al teorema sulla derivazione delle funzioni integrali: se

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy,$$

allora

$$\frac{dF}{dx} = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x} dy + f(x, \beta(x))\beta'(x) - f(x, \alpha(x))\alpha'(x).$$

Applichiamo questa formula alla funzione $F(\varepsilon)$ definita come nella (3) per il funzionale (7):

$$F(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q^i + \varepsilon \eta^i, \dot{q}^i + \varepsilon \dot{\eta}^i) dt.$$

Siccome gli estremi d'integrazione sono fissi si ha semplicemente

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \varepsilon} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \eta^i + \frac{\partial L}{\partial v^i} \dot{\eta}^i \right) dt.$$

Valendo l'uguaglianza

$$\frac{\partial L}{\partial v^i} \dot{\eta}^i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \eta^i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \right) \eta^i,$$

risulta

$$\left(\frac{dF}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^i} \right) \eta^i dt + \left[\frac{\partial L}{\partial v^i} \eta^i \right]_{t_1}^{t_2}.$$

Di qui, moltiplicando per ε in accordo con la (6) e tenuto conto della (2), si ottiene la (8). Si osservi che questo ragionamento non dipende dalla scelta della famiglia di variazioni del tipo (2). ■

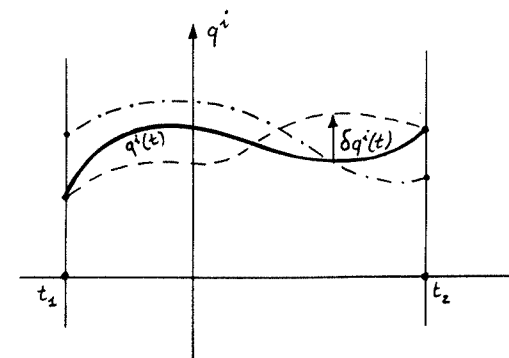


Fig. 9.1: variazioni ad estremi fissi (—) e no (---).

DEFINIZIONE 1. Una variazione $(\delta q^i(t))$ si dice ad **estremi fissi** se $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$.

PROPOSIZIONE 2. Le funzioni $(q^i(t))$ per le quali si ha

(10)

$$\delta \phi_L = 0$$

per ogni variazione ad estremi fissi, sono tutte e sole le soluzioni del sistema differenziale

(11)

$$\begin{aligned} \frac{dq^i}{dt} &= v^i, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} &= 0 \end{aligned}$$

Dimostrazione. Dalla (8) segue che per ogni variazione ad estremi fissi

$$\delta \phi_L = - \int_{t_1}^{t_2} L_i \delta q^i dt.$$

È ovvio che $L_i = 0$ implica $\delta \phi_L = 0$. Viceversa, se $\delta \phi_L = 0$ per ogni δq^i , con $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$, allora necessariamente $L_i = 0$ per ogni indice i . Infatti se fosse per esempio L_1 positivo in un certo punto t_* ,

quindi in tutto un suo intorno $I_* \subset [t_1, t_2]$, prendendo una variazione con $\delta q^2 = \dots = \delta q^n = 0$ e δq^1 funzione di classe C^1 non negativa con supporto contenuto in I_* , risulterebbe chiaramente $\delta\phi_L < 0$ e non $\delta\phi_L = 0$: assurdo. ■

Le curve $(q^i(t))$ soddisfacenti alla Prop. 2, quindi le soluzioni del sistema (11), prendono il nome di **estremali** o **punti critici** del funzionale d'azione ϕ_L . Si dice anche che esse rendono **stazionario** il funzionale.

È notevole il fatto che le equazioni (11) coincidono proprio con le equazioni di Euler-Lagrange del sistema lagrangiano (Q, L) . Si può allora affermare che la dinamica di un sistema lagrangiano è costituita da tutte e sole le curve sulla varietà Q che sono estremali del funzionale ϕ_L , per variazioni ad estremi fissi. Questa proprietà, assunta come postulato della meccanica, prende il nome di **principio dell'azione stazionaria** (o anche **della minima azione**).

Questo principio, sostituibile a quello di D'Alembert-Lagrange nel caso di un sistema olonomo a vincoli perfetti e soggetto a sollecitazioni attive dotate di potenziale (dove la lagrangiana è $L = T + U$), rientra in una classe di principi di *stazionarietà* o di *minimo* assunti a fondamento di molte teorie, per esempio il **principio di Fermat** per la propagazione della luce (Pierre de Fermat, 1601 - 1665).

OSSERVAZIONE 1. Su di una varietà riemanniana (Q, g) (§6) è del tutto naturale considerare il funzionale

$$(12) \quad \phi_G = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij} v^i v^j} dt,$$

di lagrangiana

$$(13) \quad G = \sqrt{g_{ij} v^i v^j}.$$

Questo funzionale associa ad ogni curva parametrizzata su Q , definita in un intervallo contenente $[t_1, t_2]$, la lunghezza dell'arco da essa descritto tra i due punti estremi corrispondenti ai valori t_1 e t_2 del parametro. Infatti G è il *modulo* o *lunghezza* del vettore tangente $v = (v^i)$ alla curva. Chiamiamo **geodetica** ogni curva su Q estrema del funzionale ϕ_G . Le geodetiche sono dunque le curve a lunghezza stazionaria (eventualmente minima) rispetto a curve *prossime* aventi gli stessi estremi. È

interessante esaminare il legame tra il funzionale ϕ_G ed il funzionale

$$(14) \quad \phi_T = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} g_{ij} v^i v^j dt,$$

di lagrangiana

$$(15) \quad T = \frac{1}{2} G^2 = \frac{1}{2} g_{ij} v^i v^j.$$

Questa è la lagrangiana dei moti spontanei di un sistema olonomo a vincoli indipendenti dal tempo, cioè di quei moti relizzati in assenza di forze attive ($U = 0$) per cui la lagrangiana coincide con l'energia cinetica T (la quale a sua volta coincide con l'energia totale, che è costante di moto). Le condizioni di stazionarietà $\delta\phi_G = 0$ e $\delta\phi_T = 0$ non sono equivalenti in senso stretto, poiché non producono le stesse curve estremali. Infatti, mentre la lagrangiana T è regolare e quindi produce equazioni di Euler-Lagrange soddisfacenti al teorema di esistenza ed unicità, non lo è invece la lagrangiana G , che è una funzione omogenea di grado 1 nelle velocità (si veda la nota ⁽¹⁾ al §9). La non unicità delle soluzioni, con posizione e velocità iniziale assegnate, è resa evidente dal fatto che l'integrale (12) è invariante rispetto alla parametrizzazione della curva, cioè che la stessa traiettoria su Q può essere percorsa, sempre nell'intervallo $[t_1, t_2]$, con una qualunque legge temporale e quindi con una qualunque velocità, senza per questo mutare l'integrale (12). Se ci si limita a considerare le estremali percorse con velocità costante, cioè se oltre alla condizione di stazionarietà $\delta\phi_G = 0$ si impone il vincolo

$$G = \sqrt{g_{ij} v^i v^j} = \text{costante},$$

allora le estremali di ϕ_G coincidono con le estremali di ϕ_T . Infatti le equazioni di Euler-Lagrange corrispondenti a G sono

$$\frac{d}{dt} \frac{g_{ij} v^j}{G} - \frac{1}{2G} \partial_i g_{hk} v^h v^k = 0.$$

Se si impone il vincolo della velocità costante si trovano le equazioni

$$\frac{d}{dt} (g_{ij} v^j) - \frac{1}{2} \partial_i g_{hk} v^h v^k = 0,$$

che sono proprio le equazioni di Euler-Lagrange corrispondenti alla lagrangiana T e che si riducono alle equazioni delle geodetiche (si veda il §6).

10.1. Cenni di calcolo delle variazioni

La Prop. 2 è il **teorema fondamentale del calcolo delle variazioni**. Esso, insieme ad alcune sue varianti ed estensioni, è infatti la base su cui poggia la teoria dei massimi e minimi dei funzionali d'azione, capitolo fondamentale dell'Analisi, detto appunto **calcolo delle variazioni**.

Accenniamo a due problemi classici risolti con tale calcolo, il *problema degli isoperimetri* e il *problema della catenaria*. A questo scopo è necessario l'utilizzo di una variante al teorema fondamentale, che tiene conto di una eventuale condizione supplementare, o **vincolo**, sulle variazioni (δq^i). Questo vincolo è espresso dall'invarianza di un integrale del tipo

$$(1) \quad \phi_V = \int_{t_1}^{t_2} V(q^i, \dot{q}^i, t) dt$$

quindi dalla condizione

$$(2) \quad \delta \phi_V = 0.$$

Si può dimostrare che

PROPOSIZIONE 1. Le funzioni $(q^i(t))$ che rendono stazionario un funzionale d'azione ϕ_L con variazioni ad estremi fissi soddisfacenti al vincolo (2) sono tutte e sole quelle che rendono stazionario il funzionale d'azione ϕ_{L^*} associato alla lagrangiana

$$(3) \quad L^* = L + \lambda V,$$

dove λ è un parametro reale costante, detto **moltiplicatore di Lagrange**.

Ciò significa che il funzionale da considerarsi è

$$(4) \quad \phi_{L^*} = \phi_L + \lambda \phi_V,$$

e che quindi le equazioni di Euler-Lagrange sono

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial v^i} - \frac{\partial L^*}{\partial q^i} = 0,$$

con la lagrangiana L^* data dalla (3) e con la condizione $d\lambda/dt = 0$.

Questo teorema è analogo al teorema, pure dovuto a Lagrange, sui **massimi e minimi vincolati** o **condizionati** di una funzione reale a più variabili: i punti di stazionarietà (cioè i punti critici) di una funzione $F(x^\alpha)$ soddisfacenti ad un'equazione di vincolo $V(x^\alpha) = 0$ sono i punti critici della funzione $F^* = F + \lambda V$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Questo teorema ha una semplice dimostrazione geometrica. Interpretata l'equazione del vincolo come equazione di una superficie S nello spazio delle (x^α) , la condizione di stazionarietà condizionata si traduce nella stazionarietà della restrizione $F|_S$ della funzione F alla superficie S , cioè alla condizione $\langle v, dF \rangle = 0$ per ogni vettore v tangente a S , quindi per ogni vettore tale che $\langle v, dV \rangle = 0$. Ciò equivale a dire che su ogni punto di S i differenziali dF e dV (ovvero i rispettivi gradienti) sono dipendenti (ovvero paralleli), cioè che deve esistere un λ per cui $dF + \lambda dV = 0$, ovvero $d(F + \lambda V) = 0$, inteso $d\lambda = 0$.

ESEMPIO 1. Il problema degli isoperimetri. Si vuole stabilire quali siano le curve piane chiuse che a parità di lunghezza racchiudono aree massime. Per far questo ci si può limitare inizialmente a considerare il caso di una curva chiusa costituita da un intervallo $[x_1, x_2]$ sull'asse x e dal grafico di una funzione $y = f(x)$ di classe C^2 , nulla agli estremi. Il funzionale ϕ_L da rendere stazionario è quello dell'area,

$$\phi_L = \int_{x_1}^{x_2} y dx,$$

il quale quindi corrisponde alla lagrangiana

$$L(x, y, y') = y.$$

Il vincolo è rappresentato dalla costanza della lunghezza della curva cioè del funzionale

$$\phi_V = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

il quale corrisponde alla lagrangiana

$$V(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Rispetto alle notazioni generali prima usate abbiamo nel caso presente $n = 1$, $t = x$ (variabile indipendente), $q = y$ e $\dot{q} = v = y'$. Si tratta quindi effettivamente di un problema con variazioni vincolate ed a estremi fissi (Fig. 9.2.a).

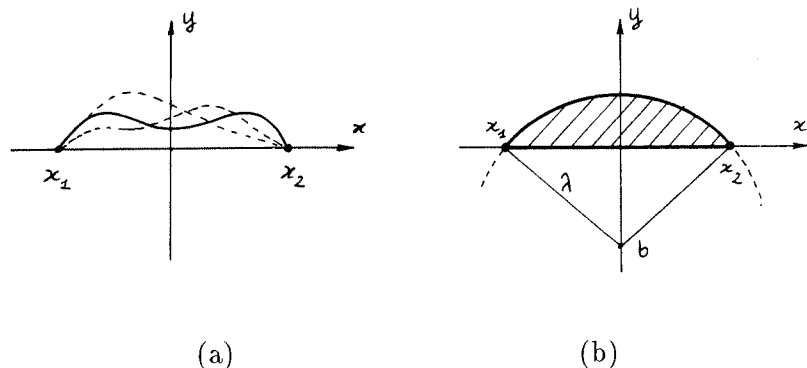


Fig. 9.2

La lagrangiana da considerarsi è allora

$$L^* = y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}$$

e l'equazione di Euler-Lagrange è di conseguenza

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L^*}{\partial y'} - \frac{\partial L^*}{\partial y} = \lambda \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} - 1 = 0.$$

Posto $c = \frac{1}{\lambda}$, segue che

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = cx,$$

modulo una costante additiva, che riteniamo nulla, alla quale corrisponde una inessenziale traslazione lungo l'asse x . Dalla formula precedente segue

$$y' = \frac{cx}{\sqrt{1 - c^2 x^2}},$$

quindi, con semplice integrazione,

$$y = b - \frac{1}{c} \sqrt{1 - c^2 x^2}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Elevando al quadrato si conclude che la curva cercata ha equazione

$$(y - b)^2 + x^2 = \lambda^2.$$

Si tratta di una circonferenza di raggio λ (Fig. 9.2.b). Abbiamo allora dimostrato che le curve che risolvono il problema degli isoperimetri sono gli archi di circonferenza, in particolare che le curve regolari chiuse del piano che a parità di lunghezza racchiudono l'area maggiore sono le circonferenze.

ESEMPIO 2. La catenaria. Si vuole stabilire quale sia la curva descritta da un cavo inestendibile e omogeneo (per esempio una catena sottile) appeso a due estremi fissi, in equilibrio sotto la sola azione della forza peso. Si tratta di un classico problema di statica. Si può far ricorso al **principio di Torricelli** (Evangelista Torricelli, 1608-1647) secondo il quale in condizioni di equilibrio il baricentro della catena occupa la più bassa posizione possibile. Questo principio si traduce nell'equazione variazionale

$$\delta z_G = 0.$$

La quota z_G del baricentro è il funzionale

$$z_G = \phi_L = \int_{x_1}^{x_2} z \, ds = \int_{x_1}^{x_2} z \sqrt{1 + z'^2} \, dx$$

corrispondente alla lagrangiana

$$L(x, z, z') = \frac{1}{m} z \sqrt{1 + z'^2},$$

considerata la curva $z = z(x)$ descritta dalla catena sul piano (x, z) di asse verticale z . Il vincolo è ancora rappresentato dall'invarianza della lunghezza, quindi del tipo considerato nell'esempio precedente. Dunque la lagrangiana del problema è

$$L^* = (z + \lambda) \sqrt{1 + z'^2}.$$

Facendo tuttavia la sostituzione $z + \lambda \rightarrow z$, corrispondente ad una traslazione verticale, ci si può ridurre a considerare la lagrangiana

$$L^* = z \sqrt{1 + z'^2}$$

la cui equazione di Euler-Lagrange è

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L^*}{\partial z'} - \frac{\partial L^*}{\partial z} = \frac{d}{dx} \left(\frac{zz'}{\sqrt{1+z'^2}} \right) - \sqrt{1+z'^2} = 0.$$

Appare evidente la soluzione

$$z = \frac{1}{a} \cosh a(x-b),$$

perché è

$$1+z'^2 = 1 + \sinh^2 a(x-b) = \cosh^2 a(x-b) = a^2 z^2$$

e quindi

$$\frac{zz'}{\sqrt{1+z'^2}} = \frac{1}{a} z',$$

per cui l'equazione differenziale è chiaramente soddisfatta. Tenendo conto che è sempre disponibile una traslazione verticale, le curve estremali del problema variazionale originario sono le funzioni

$$z = \frac{1}{a} \cosh a(x-b) - \lambda.$$

Le costanti (a, b, λ) devono determinarsi assegnate le posizioni degli estremi della catena. È comunque dimostrato che la catenaria è un arco di coseno iperbolico.

11. Equilibrio e stabilità

Sia $\mathbf{X}$ un campo vettoriale (differenziabile) su di una varietà M . Ricordiamo che un punto $p_0 \in M$ si dice **punto critico** di $\mathbf{X}$ se in p_0 esso si annulla: $\mathbf{X}(p_0) = 0$. È importante notare che i punti critici di un campo sono i punti in cui si annullano tutte le sue componenti e quindi tutti i secondi membri del corrispondente sistema differenziale del primo ordine.

OSSERVAZIONE 1. Un punto p_0 è punto critico di $\mathbf{X}$ se e solo se la curva

$$\gamma_{p_0}: \mathbb{R} \rightarrow M : t \mapsto p_0,$$

che associa ad ogni valore del parametro t il punto p_0 , è la curva integrale massimale di $\mathbf{X}$ basata in p_0 . Infatti l'equazione caratteristica delle curve integrali, $\dot{\gamma} = \mathbf{X} \circ \gamma$, è identicamente soddisfatta da γ_{p_0} : a primo membro si ha $\dot{\gamma}_{p_0}(t) = 0$ perché la curva ha valore costante (uguale a p_0) mentre a secondo membro risulta $\mathbf{X}(\gamma_{p_0}(t)) = \mathbf{X}(p_0) = 0$ perché p_0 è punto critico.

DEFINIZIONE 1. Un punto critico p_0 di un campo vettoriale $\mathbf{X}$ si dice **stabile (nel futuro)** se comunque si fissi un intorno aperto A di p_0 esiste un intorno B di p_0 tale che per ogni $p \in B$ la curva integrale massimale $\gamma_p: I_p \rightarrow M$ di $\mathbf{X}$ basata in p è tale che $\gamma_p(t) \in A$ per ogni $t > 0$, $t \in I_p$ ⁽¹⁾. Un punto critico non stabile, per cui cioè questa condizione non è soddisfatta, si dice **instabile**. Un punto critico p_0 stabile si dice **asintoticamente stabile** se ammette un intorno B tale che per ogni $p \in B$ si ha $\gamma_p(t) \rightarrow p_0$ per $t \rightarrow +\infty$ ⁽²⁾.

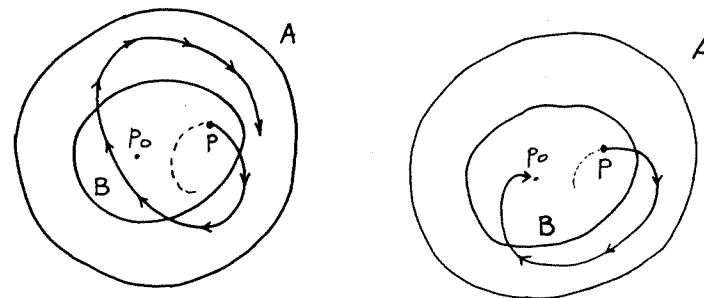


Fig. 10.1: Punto critico stabile e asintoticamente stabile.

⁽¹⁾ In altre parole: per ogni intorno A esiste un intorno B tale che partendo da un qualunque punto di B e seguendo una curva integrale, si resta sempre in A , almeno nel futuro, cioè per $t > 0$.

⁽²⁾ La condizione $\gamma_p(t) \rightarrow p_0$ per $t \rightarrow +\infty$ significa che comunque si scelga un intorno U di p_0 esiste un t_1 tale che $\gamma_p(t) \in U$ per ogni $t > t_1$.

Si osservi che la condizione di stabilità *nel futuro* tiene solo conto dello sviluppo della curva integrale per valori del parametro successivi a quello iniziale ($t = 0$).

Ci si pone il problema di verificare se un punto critico è stabile o instabile senza dover integrare il sistema del prim'ordine associato al campo, cioè senza conoscerne le curve integrali. Il problema può essere risolto utilizzando opportuni *criteri di stabilità* o di *instabilità*. Tra questi, fondamentale è il seguente **criterio di Lyapunov** (Alexandr Michailovic Lyapunov, 1857 - 1918).

PROPOSIZIONE 1. Se in un intorno di un punto critico p_0 del campo $\mathbf{X}$ esiste una funzione reale differenziabile W avente un minimo stretto in p_0 e inoltre tale che

$$(1) \quad \langle \mathbf{X}, dW \rangle \leq 0,$$

allora il punto critico è stabile. Se, escluso il punto p_0 , vale la disuguaglianza stretta, cioè se

$$(2) \quad \langle \mathbf{X}, dW \rangle < 0,$$

il punto critico è asintoticamente stabile. Se invece è

$$(3) \quad \langle \mathbf{X}, dW \rangle > 0,$$

il punto critico è instabile. Una tale funzione prende il nome di **funzione di Lyapunov**.

Una dimostrazione *intuitiva* di quest'enunciato è la seguente.

Dimostrazione. Si può sempre supporre $W(p_0) = 0$ (aggiungendo eventualmente a W una costante inessenziale). Siccome W ha un minimo stretto in p_0 , in un suo intorno (con l'esclusione di p_0) si ha $W > 0$ e le superfici di livello di equazione $W = c$ con $c > 0$ sono diffeomorfe a delle sfere (di codimensione 1). Si consideri in quest'intorno un tensore metrico (definito positivo) qualsiasi ed il campo vettoriale $\text{grad}(W) = dW^\sharp$. Per il teorema del gradiente questo campo è ortogonale ad ogni superficie di livello, sempre diretto verso l'esterno (cioè nella direzione di W crescente). La condizione (1) si traduce in $\text{grad}(W) \cdot \mathbf{X} \leq 0$ e mostra quindi che i due campi formano in ogni punto un angolo *non acuto*. Ciò significa che il campo $\mathbf{X}$ è sempre o diretto verso l'interno

delle superfici di livello o tangente a queste (o, in particolare, nullo). Una sua curva integrale, sempre nell'intorno considerato, tende quindi per t crescente a penetrare all'interno di ogni superficie di livello o al più a restare su una di queste. Si realizza in tal modo la condizione di stabilità del punto critico. La condizione (2) significa che i due campi formano sempre un angolo acuto e quindi che ogni curva integrale penetra sempre verso l'interno di ogni superficie di livello, tendendo necessariamente al punto p_0 . Di qui l'asintotica stabilità. Se infine vale la condizione (3), si ha la situazione opposta: ogni curva attraversa le superfici di livello verso l'esterno e non può quindi mai realizzare le condizioni imposte dalla definizione di stabilità. ■

Diamo una dimostrazione rigorosa nel solo caso della stabilità. Gli altri due casi si dimostrano con tecnica analoga.

Dimostrazione. Sia W una funzione di Lyapunov soddisfacente alla (1). Non è restrittivo supporre che sia $W(p_0) = 0$ (e quindi W positiva nell'intorno). Si osservi che la condizione (1) equivale alla condizione

$$(1') \quad \frac{dW}{dt} \leq 0$$

lungo ogni curva integrale di $\mathbf{X}$. Questo significa che la funzione W ristretta alla curva è decrescente (per t crescente). Come arbitrario intorno di cui alla definizione di stabilità si può sempre considerare un intorno aperto A di p_0 a chiusura compatta. Il bordo (o frontiera) ∂A di A è compatto, sicché la restrizione di W a ∂A ammette un valore minimo $\mu > 0$, positivo perché nell'intorno di p_0 , escluso p_0 , è $W > 0$. Per la continuità di W esiste un intorno $B \subset A$ di p_0 per cui $W|_B < \mu$ (si applichi la definizione di continuità: siccome $W(p_0) = 0$, comunque si fissi un intorno $I_\mu = (-\mu, \mu) \subset \mathbb{R}$ dello zero esiste un intorno B di p_0 tale che $W(B) \subset I_\mu$). Preso allora un qualunque punto $p \in B$ e la corrispondente curva massimale $\gamma_p: I_p \rightarrow \mathbb{R}$, se esistesse un $t > 0$, $t \in I_p$, per cui $\gamma_p(t) \in \partial A$ (e quindi $\gamma_p(t) \notin A$) risulterebbe $W(\gamma_p(t)) \geq \mu$ (Fig. 10.2). D'altra parte, lungo γ_p , la funzione W è decrescente per cui $W(\gamma_p(t)) \leq W(\gamma_p(0)) = W(p) < \mu$: assurdo. ■

OSSERVAZIONE 2. Si noti che tra le possibili funzioni di Lyapunov da utilizzarsi per provare la stabilità vi sono gli integrali primi di $\mathbf{X}$, per i quali nella (1) vale l'uguaglianza.

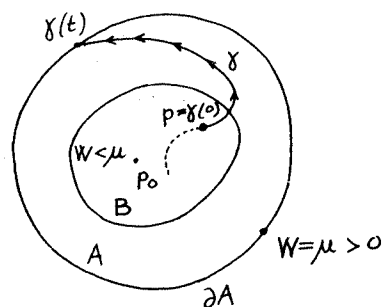


Fig. 10.2

ESEMPIO. Si consideri su $M = \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale $\mathbf{X}$ corrispondente al sistema di equazioni del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = (c - b) y z \\ \dot{y} = (a - c) z x \\ \dot{z} = (b - a) x y \end{cases}$$

dove (a, b, c) sono numeri reali tali che

$$a > b > c.$$

Queste equazioni, qualora si ponga

$$x = Ap, \quad y = Bq, \quad z = Cr, \quad a = \frac{1}{A}, \quad b = \frac{1}{B}, \quad c = \frac{1}{C},$$

sono equivalenti alle equazioni di Euler per le componenti (p, q, r) della velocità angolare in un moto rigido spontaneo (§8.2, Cap. IV). I punti degli assi coordinati sono tutti e soli i punti critici. Dimostriamo che ogni punto critico $(x_0, 0, 0)$ (con $x_0 \neq 0$) è stabile costruendo una funzione di Lyapunov. Come si è detto nell'Oss. 2, gli integrali primi sono dei buoni candidati per essere funzioni di Lyapunov. Si sa, dalle considerazioni svolte sulla meccanica del corpo rigido, che il sistema dinamico in questione ha due integrali primi:

$$F = x^2 + y^2 + z^2, \quad G = ax^2 + by^2 + cz^2.$$

È comunque immediato verificarlo direttamente:

$$\dot{F} = 2(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) = 2((c - b) + (a - c) + (b - a))xyz = 0,$$

$$\dot{G} = 2(ax\dot{x} + by\dot{y} + cz\dot{z}) = 2(a(c - b) + b(a - c) + c(b - a))xyz = 0,$$

Se consideriamo la differenza

$$aF - G = (a - b)y^2 + (a - c)z^2,$$

questa è ancora un integrale primo, è sempre positiva e si annulla su tutto l'asse x . Ha dunque un minimo, ma non stretto, nel punto $(x_0, 0, 0)$. Si può ottenere un minimo stretto aggiungendo a questa funzione un altro integrale primo, a valori sempre positivi o nulli, nulli su di un insieme di punti che intersechi l'asse x proprio nel punto critico. Un buon candidato è per esempio l'integrale primo $(F - x_0^2)^2$. Infatti è sempre positivo fuorché nei punti di equazione $F - x_0^2 = x^2 + y^2 + z^2 - x_0^2 = 0$, cioè sulla sfera centrata nell'origine e di raggio $|x_0|$, quindi passante per il punto critico. In conclusione: la funzione

$$W = aF - G + (F - x_0^2)^2$$

è un integrale primo con un minimo stretto in $(x_0, 0, 0)$. È dunque una funzione di Lyapunov e la stabilità del punto critico è dimostrata. Allo stesso modo si può dimostrare che anche i punti critici del tipo $(0, 0, z_0)$ con $z_0 \neq 0$ sono stabili. Si ha così un'altra prova che i moti alla Poincaré stazionari di un corpo rigido asimmetrico intorno agli assi principali di massimo e minimo momento d'inerzia sono stabili.

Adattiamo le precedenti considerazioni generali sulla stabilità dei punti critici al caso di un campo vettoriale lagrangiano $\mathbf{X}_L$ corrispondente ad un sistema olonomo conservativo, le cui equazioni del primo ordine sono del tipo (§6)

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = v^i, \\ \frac{dv^i}{dt} = F^i - \Gamma_{hj}^i v^h v^j, \end{cases}$$

con

$$(5) \quad F^i = g^{ij} \partial_j U.$$

I punti critici di X_L sono i punti di TQ che annullano i secondi membri del sistema (4), quindi i punti caratterizzati dalle condizioni

$$(6) \quad F^i = 0, \quad v^i = 0.$$

Pertanto:

PROPOSIZIONE 2. I punti critici del campo lagrangiano X_L sono gli atti di moto nulli corrispondenti alle configurazioni in cui si annullano le forze lagrangiane.

Per quanto detto nell'Oss. 1 a proposito dei punti singolari, segue che se il sistema si trova inizialmente nelle condizioni (6) vi resta indefinitamente. È allora naturale introdurre la

DEFINIZIONE 2. Una configurazione $q_0 \in Q$ è **configurazione di equilibrio** se posto il sistema in quella configurazione con atto di moto nullo (cioè con tutti i suoi punti a velocità nulla) esso vi permane indefinitamente.

Risulta di conseguenza dimostrato che

PROPOSIZIONE 3. Una configurazione $q_0 \in Q$ è di equilibrio se e solo se in essa si annullano le forze lagrangiane, ovvero se e solo se è punto critico del potenziale: $dU(q_0) = 0$.

Per giustificare questa seconda parte della proposizione va osservato che la condizione $F^i = 0$ equivale a

$$(7) \quad \frac{\partial U}{\partial q^i} = 0.$$

Le configurazioni di equilibrio si determinano pertanto risolvendo il sistema di n equazioni (7), inteso come sistema di equazioni "algebriche" nelle coordinate lagrangiane (q^i): ogni n -pla (q_0^i) che lo soddisfa rappresenta una configurazione di equilibrio.

Adattiamo ora al caso del sistema olonomo in esame la nozione di stabilità data dalla Def. 1.

DEFINIZIONE 3. Una configurazione $q_0 \in Q$ è di **equilibrio stabile** (risp. **instabile**) se il corrispondente atto di moto nullo è punto critico stabile (risp. instabile) del campo X_L .

La stabilità di una configurazione di equilibrio può essere riconosciuta attraverso il seguente **teorema di Lagrange-Dirichlet** (Gustav Peter Lejeune Dirichlet, 1805 - 1859):

PROPOSIZIONE 4. Una configurazione di equilibrio è stabile se in essa il potenziale U ha un massimo in senso stretto (ovvero se l'energia potenziale $V = -U$ ha un minimo in senso stretto).

Dimostrazione. Si può applicare il criterio di Lyapunov al punto critico del campo X_L , definito dall'atto di moto nullo nella configurazione q_0 considerata, prendendo come funzione di Lyapunov l'energia totale $E = T - U = T + V$, che è un integrale primo (Oss. 2). Sia infatti q_0 una configurazione in cui l'energia potenziale V ha un minimo stretto. Supposto $V(q_0) = 0$, nell'intorno di q_0 (escluso q_0) si ha $V > 0$. In corrispondenza all'atto di moto nullo si ha ovviamente $T = 0$, quindi nel suo intorno si ha $E = V + T > 0$ non potendo essere l'energia cinetica negativa. Pertanto E ha un minimo stretto. ■

Si noti che la condizione di massimo stretto del potenziale è una condizione solo sufficiente per la stabilità. Per ottenere una condizione necessaria, e quindi invertire il teorema, occorre aggiungere ulteriori ipotesi sul potenziale. Tra i vari criteri di instabilità o "teoremi inversi di Lagrange-Dirichlet" che sono stati formulati va citato il seguente **criterio di instabilità di Cetaiev** (1930):

PROPOSIZIONE 5. Se una configurazione di equilibrio non è di massimo stretto del potenziale e se tale fatto è riconoscibile dall'analisi dei valori delle derivate parziali del potenziale in quella configurazione, allora l'equilibrio è instabile⁽³⁾.

Per applicare questo criterio occorre ricordare che i punti di stazionarietà del potenziale, nei casi più comuni, possono essere classificati attraverso i valori delle derivate seconde del potenziale, cioè analizzando la matrice hessiana del potenziale. Posto

$$(8) \quad K_{ij} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^i \partial q^j} \right)_{q_0}$$

⁽³⁾ Come precisato da studi recenti dei matematici russi Koslov e Palamodov, si richiede la riconoscibilità dell'esistenza del minimo stretto dall'analisi del primo termine omogeneo non identicamente nullo dello sviluppo di Taylor del potenziale.

nell'intorno di q_0 il potenziale U risulta approssimato dalla funzione

$$\tilde{U} = \frac{1}{2} K_{ij} q^i q^j,$$

supposto che il potenziale si annulli in q_0 e che in questo punto si annullino anche le coordinate lagrangiane.

La matrice $n \times n$ (K_{ij}), che è simmetrica, definisce una forma quadratica $\mathbf{K}$ la cui segnatura (p, q) è determinabile dall'esame dei segni di una qualunque successione di determinanti di sottomatrici principali, ognuna contenuta nella successiva (§5.2, Cap. I). Si hanno allora i casi seguenti:

(a) Se la segnatura è $(n, 0)$, cioè se la forma quadratica è definita positiva, si ha un *minimo* del potenziale e l'equilibrio è instabile per il criterio di Cetaiev.

(b) Se la segnatura è $(0, n)$, cioè se la forma quadratica è definita negativa, si ha un *massimo stretto* e l'equilibrio è stabile per il criterio di Lagrange-Dirichlet.

(c) Se la segnatura è (p, q) con p e q non entrambi nulli non si ha né *massimo* né *minimo* (è indifferente il fatto che la matrice (K_{ij}) sia o no singolare) e l'equilibrio è instabile per il criterio di Cetaiev.

(d) Se la matrice hessiana è singolare ($K = \det(K_{ij}) = 0$) e la segnatura è $(p, 0)$ o $(0, q)$, allora occorre passare all'esame delle derivate parziali di ordine superiore.

OSSERVAZIONE 3. Per $n = 2$ si può considerare la successione

$$1, \quad K_{11}, \quad K = K_{11} K_{22} - K_{12}^2,$$

(oppure, se si vuole, la successione $(1, K_{22}, K)$). Per il teorema enunciato al §5.2, Cap. I, il numero nelle variazioni di segno (gli eventuali zeri si escludono) è il numero q della segnatura (p, q) . I casi sopra elencati corrispondono allora alle condizioni seguenti:

- | | | |
|-----|----------------------------|------------------------------------|
| (a) | $K > 0, \quad K_{11} > 0,$ | minimo $\rightarrow$ eq. instabile |
| (b) | $K > 0, \quad K_{11} < 0,$ | massimo $\rightarrow$ eq. stabile |
| (c) | $K < 0,$ | sella $\rightarrow$ eq. instabile |
| (d) | $K = 0.$ | analizzare le derivate superiori |

OSSERVAZIONE 4. Può accadere che la matrice hessiana (K_{ij}) risulti diagonale, cioè che si abbia $K_{ij} = 0$ per $i \neq j$. Allora la segnatura (p, q) è data dal numero p degli elementi K_{ii} positivi e dal numero q di quelli negativi.

12. Piccole oscillazioni

Sia dato un sistema olonomo conservativo (Q, g, U) di dimensione n . Sia $q_0 \in Q$ una configurazione in cui il potenziale U ha un massimo stretto. Per il Teorema di Lagrange-Dirichlet q_0 è una configurazione di equilibrio stabile. Si possono sempre scegliere le coordinate lagrangiane (q^i) in maniera tale che esse si annullino in q_0 , così come si può supporre $U(q_0) = 0$. Nell'intorno di q_0 lo sviluppo di Taylor del potenziale, troncato al secondo ordine, diventa

$$(1) \quad U = \tilde{U} + \dots = \frac{1}{2} K_{ij} q^i q^j + \dots,$$

posto

$$(2) \quad K_{ij} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^i \partial q^j} \right)_{q_0},$$

perché in q_0 si annullano anche le derivate prime. Si supponga che la matrice $n \times n$ simmetrica (K_{ij}), che nell'ambito della teoria delle vibrazioni viene chiamata **matrice di rigidità**, sia regolare: $\det(K_{ij}) \neq 0$. È questa una condizione soddisfatta nella maggior parte delle applicazioni. Allora il potenziale approssimato $\tilde{U}$ risulta rappresentato da una forma quadratica $\mathbf{K}$ nelle (q^i) , che è definita negativa perché nell'origine, in cui si annulla, il potenziale U ha un massimo stretto e quindi assume nell'intorno valori negativi.

Per l'energia cinetica si può d'altra parte considerare l'approssimazione

$$(3) \quad T = \tilde{T} + \dots = \frac{1}{2} M_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + \dots,$$

posto

$$(4) \quad M_{ij} = g_{ij}(q_0).$$

Alla matrice $n \times n$ simmetrica (M_{ij}), chiamata **matrice di massa**, corrisponde una forma quadratica $\mathbf{M}$ definita positiva (l'energia cinetica nella configurazione q_0).

Con le approssimazioni (1) e (3) del potenziale e dell'energia cinetica le equazioni di Lagrange si riducono a

$$(5) \quad M_{ij} \ddot{q}^j - K_{ij} q^j = 0.$$

Si noti bene che le matrici (M_{ij}) e (K_{ij}) sono costanti.

Queste equazioni prendono il nome di **equazioni di Lagrange linearizzate** nella configurazione di equilibrio q_0 . Le sue soluzioni descrivono le cosiddette **piccole oscillazioni** del sistema nell'intorno della configurazione di equilibrio stabile. Anche se la questione richiederebbe un'analisi rigorosa, è chiaro da un punto di vista intuitivo che queste soluzioni sono tanto più "vicine" alle soluzioni esatte (cioè delle equazioni di Lagrange non linearizzate) quanto più "piccoli" sono i valori iniziali dell'energia cinetica e delle coordinate.

Il sistema di equazioni differenziali (5) si può integrare trasformandolo con un opportuno cambiamento di coordinate in un sistema di n equazioni separate, coinvolgenti cioè ciascuna una singola coordinata. Il procedimento di trasformazione è suggerito dalla teoria delle forme bilineari negli spazi euclidei. Si consideri il sistema di equazioni agli autovettori

$$(6) \quad (K_{ij} - x M_{ij}) v^j = 0$$

e la corrispondente equazione caratteristica

$$(7) \quad \det(K_{ij} - x M_{ij}) = 0.$$

Per il teorema sulle forme bilineari simmetriche negli spazi strettamente euclidei (qui la matrice di massa svolge il ruolo di tensore metrico), essendo la forma quadratica K definita negativa, l'equazione caratteristica (7) ammette n radici reali negative $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Risultano allora determinati n numeri positivi $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, detti **pulsazioni proprie o caratteristiche**, tali che

$$(8) \quad \lambda_1 = -\omega_1^2, \quad \lambda_2 = -\omega_2^2, \quad \dots, \quad \lambda_n = -\omega_n^2.$$

Per ogni autovalore λ_k si consideri un corrispondente autovettore v_k . Le sue componenti (v_k^j) sono soluzioni del sistema

$$(9) \quad (K_{ij} - \lambda_k M_{ij}) v_k^j = 0.$$

In tal modo si può costruire una base di autovettori $(v_1, v_2, \dots, v_n)$. L'indipendenza di questi autovettori equivale alla regolarità della matrice delle componenti (v_k^j) : $\det(v_k^j) \neq 0$. Ciò posto, si considerino nuove coordinate (s^i) legate alle (q^i) dalle relazioni lineari (invertibili)

$$(10) \quad q^j = v_k^j s^k.$$

Tenuto conto della (9) si ha

$$M_{ij} \ddot{q}^j = M_{ij} v_k^j \ddot{s}^k, \\ K_{ij} q^j = K_{ij} v_k^j s^k = \lambda_k M_{ij} v_k^j s^k,$$

e le equazioni di Lagrange linearizzate (5) diventano

$$M_{ij} v_k^j (\ddot{s}^k - \lambda_k s^k) = 0.$$

Poiché

$$\det(M_{ij} v_k^j) = \det(M_{ij}) \det(v_k^j) \neq 0,$$

questo sistema di equazioni equivale al seguente:

$$(11) \quad \ddot{s}^k + \omega_k^2 s^k = 0 \quad (k \text{ indice non sommato}).$$

Abbiamo così ottenuto, come previsto, un sistema di n equazioni separate, ciascuna coinvolgente una sola funzione incognita s^k . Ognuna di queste è un'equazione del moto armonico ed ammette un integrale generale del tipo

$$(12) \quad s^k(t) = A_k \sin(\omega_k t + \phi_k),$$

con A_k e ϕ_k costanti arbitrarie (ampiezza e fase). In conclusione:

PROPOSIZIONE 1. I moti di un sistema olonomo conservativo nell'intorno di una configurazione di equilibrio stabile (assunto $\det(K_{ij}) \neq 0$) sono la composizione di n moti armonici secondo le autodirezioni della matrice di rigidezza rispetto alla matrice di massa, con pulsazioni date dalle radici quadrate dei valori assoluti degli autovalori.

Le autodirezioni vengono anche dette **modi**.

LA MECCANICA DI HAMILTON

(Meccanica simplettica)

La meccanica hamiltoniana è una naturale evoluzione della meccanica lagrangiana, sorta e sviluppatasi non solo per opera di William Rowan Hamilton (1805 - 1865) ma anche di altri illustri matematici, quali Legendre, Poisson, Jacobi, Poincaré, per giungere fino ai nostri giorni con un cospicuo corredo di risultati raggiunti e di problematiche aperte. La meccanica lagrangiana opera sullo spazio delle configurazioni e sul corrispondente fibrato tangente e consente di trattare con una certa facilità problemi interessanti, per esempio di dinamica del corpo rigido. La meccanica hamiltoniana opera invece inizialmente sul fibrato cotangente della varietà delle configurazioni, detto comunemente "spazio delle fasi", avvalendosi di una particolare struttura "simplettica canonica" posseduta da tali fibrati, estendendo successivamente la sua portata alle più generali "varietà simplettiche".

Il punto di vista hamiltoniano apre la strada a concetti e metodi che non solo consentono di trattare problemi altrimenti irrisolvibili ma che conducono ad altre importanti settori della fisica matematica, quali la meccanica celeste, l'ottica, la meccanica statistica, la meccanica quantistica.

1. Fibrati cotangenti e sistemi hamiltoniani

Parallelamente al concetto di vettore tangente ad una varietà (§2, Cap. V) si può introdurre il concetto *duale* di *covettore tangente*. Come per i vettori, per i covettori si possono dare varie definizioni.

DEFINIZIONE 1. Un **covettore tangente** in un punto q di una varietà Q è una **classe di equivalenza di funzioni** su Q . Due funzioni f

e f' si dicono **equivalenti** (al primo ordine) in un punto q se, comunque si prenda una curva $\gamma: I \rightarrow Q$ basata in q (quindi tale che $\gamma(0) = q$), si ha

$$(1) \quad D(f \circ \gamma)(0) = D(f' \circ \gamma)(0).$$

Si denota con $[f]$ la classe di equivalenza definita dalla funzione f .

Si noti che questa definizione è analoga a quella di vettore tangente come classe di equivalenza fra curve. La definizione seguente si basa invece sulla preesistenza della nozione di vettore tangente.

DEFINIZIONE 2. Un **covettore tangente** p in un punto q di una varietà Q è un elemento del duale dello spazio tangente $T_q Q$, vale a dire un'applicazione lineare $p: T_q Q \rightarrow \mathbb{R}$. Si denota con $T_q^* Q$ lo spazio duale di $T_q Q$, detto **spazio cotangente** a Q in q .

Il legame tra queste due definizioni passa attraverso il concetto di **differenziale di una funzione** f in un punto $q \in Q$: è l'applicazione lineare $d_q f: T_q Q \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$(2) \quad \langle [\gamma], d_q f \rangle = D(f \circ \gamma)(0),$$

ovvero da

$$(3) \quad \langle v, d_q f \rangle = v(f),$$

a seconda che si consideri il vettore tangente come classe di equivalenza di curve o come derivazione. Dal confronto della (1) con la (2) si vede che due funzioni appartenenti alla stessa classe di equivalenza hanno lo stesso differenziale. I differenziali $d_q f$ formano ovviamente un sottospazio di $T_q^* Q$, osservato che $d_q f + d_q f' = d_q(f + f')$ e che $a d_q f = d_q(af)$ per $a \in \mathbb{R}$. Se inoltre su Q (di dimensione n) si prende un sistema di coordinate (q^i) ($i = 1, \dots, n$) nell'intorno di q , si osserva che gli n differenziali $d_q q^i$ formano una base per questo sottospazio, che pertanto coincide con tutto lo spazio duale $T_q^* Q$.

L'intervento di coordinate porta infine a considerare una terza definizione (analoga alla Def. 3, §2, Cap. V, per i vettori tangenti).

DEFINIZIONE 3. Un **covettore tangente** in un punto q di una varietà Q è una **classe di equivalenza di coordinate e componenti** cioè di coppie

$$(q^i, p_i)$$

costituite da un sistema di coordinate (q^i) nell'intorno del punto q e da un insieme di n numeri (p_i) . Due coppie siffatte (q^i, p_i) e $(q^{i'}, p_{i'})$ si dicono equivalenti se sussistono i legami

$$(4) \quad p_i = \left(\frac{\partial q^{i'}}{\partial q^i} \right)_q p_{i'}.$$

I numeri (p_i) si dicono **componenti** del covettore secondo le coordinate (q^i) .

Il legame con la Def. 2, secondo la quale un covettore p è una forma lineare sui vettori, è dato dalla formula

$$(5) \quad \langle v, p \rangle = p_i v^i,$$

dove le (v^i) sono le componenti di v . Il legame con la Def. 1 è invece espresso dal fatto che la scrittura $p = d_q f = [f]$ equivale a

$$(6) \quad p_i = \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \right)_q.$$

Anche l'insieme di tutti i **covettori tangenti** a Q , denotato con T^*Q e chiamato **fibrato cotangente**, è una varietà differenziabile di dimensione $2n$. La dimostrazione è analoga a quella svolta per il fibrato tangente. Infatti ad ogni sistema di coordinate (q^i) su di un dominio aperto $U \subset Q$ corrisponde un sistema di coordinate (q^i, p_i) sull'insieme T^*U dei covettori tangenti nei punti di U . Queste sono dette **coordinate canoniche fbrate** e sono definite alla maniera seguente: se $q \in U$ e $p \in T_q^*U$ allora le (q^i) sono le coordinate del punto q e le (p_i) sono le componenti del covettore p , cioè i numeri definiti dalla (5). Si osserva allora che passando da un sistema di coordinate (q^i) ad un altro $(q^{i'})$ le coordinate (p_i) e $(p_{i'})$ sono legate da una relazione analoga alla (4)⁽¹⁾

$$(7) \quad p_i = \frac{\partial q^{i'}}{\partial q^i} p_{i'}.$$

⁽¹⁾ Va osservato che a secondo membro di questa equazione le derivate parziali $\partial q^{i'}/\partial q^i$ sono in prima istanza funzioni delle (q^i) . Occorre quindi risostituire a queste le loro espressioni in funzione delle $(q^{i'})$ per avere in definitiva a secondo membro una funzione delle $(q^{i'}, p_{i'})$.

Di qui segue che carte compatibili su Q generano carte compatibili su T^*Q e quindi che T^*Q è una varietà differenziabile.

Ogni **spazio vettoriale cotangente** T_q^*Q costituisce una **fibra** del fibrato cotangente T^*Q . Ogni fibra è una sottovarietà di dimensione n .

Come si constaterà nei prossimi paragrafi, i fibrati cotangenti offrono il supporto per un importante sviluppo della Meccanica Analitica. Essi possiedono infatti una struttura tale da consentire alcune operazioni di notevole significato meccanico.

In questo contesto è fondamentale la circostanza che, data una qualunque funzione differenziabile $H: T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ sul fibrato cotangente di una varietà Q , risulta automaticamente definito su T^*Q un campo vettoriale, ovvero un sistema dinamico, denotato con X_H e detto **campo hamiltoniano** o **sistema dinamico hamiltoniano** generato dalla **hamiltoniana** H . Le equazioni differenziali del primo ordine associate a questo campo sono per definizione

$$(8) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{dq^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{aligned}}$$

Queste prendono il nome di **equazioni di Hamilton**.

Perché questa definizione abbia senso, cioè abbia carattere intrinseco, occorre verificare che il sistema (8) sia invariante in forma rispetto a cambiamenti di coordinate sulla varietà Q . Tuttavia è più utile e interessante dimostrare il carattere intrinseco delle equazioni (8) dando del campo X_H una definizione indipendente dall'uso di coordinate.

A questo scopo, cominciamo con l'osservare che, come su ogni varietà differenziabile, anche sui fibrati cotangenti si definiscono campi vettoriali e forme differenziali. In particolare una 1-forma (forma differenziale lineare) φ si rappresenta in coordinate (q^i, p_i) con una scrittura del tipo

$$(9) \quad \varphi = \varphi_i dq^i + \varphi^i dp_i,$$

cioè come una combinazione lineare dei differenziali delle coordinate, con coefficienti (φ_i, φ^i) funzioni di queste.

È notevole il fatto che su ogni fibrato cotangente T^*Q esiste una 1-forma particolare, detta **forma di Liouville** (Joseph Liouville, 1809

- 1882) o **forma fondamentale**, definita qualunque siano le coordinate canoniche fibrato (q^i, p_i) da

$$(10) \quad \boxed{\theta = p_i dq^i}$$

L'indipendenza dalla scelta delle coordinate di questa definizione segue immediatamente dalla (7):

$$p_i dq^i = p_{i'} \frac{\partial q^{i'}}{\partial q^i} dq^i = p_{i'} dq^{i'}.$$

Di conseguenza anche il suo differenziale

$$(11) \quad \boxed{\omega = d\theta = dp_i \wedge dq^i}$$

non dipende dalla scelta delle coordinate e ha quindi un significato intrinseco. La 2-forma ω prende il nome di **forma simplettica canonica**.

D'altra parte, ogni campo vettoriale X sul fibrato cotangente T^*Q , inteso come derivazione, ammette una rappresentazione del tipo

$$(12) \quad X = X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + X_i \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Posto per comodità

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial q^i}, \quad \partial^i = \frac{\partial}{\partial p_i},$$

la (12) può scriversi

$$(12') \quad X = X^i \partial_i + X_i \partial^i.$$

Se interpretato come sezione $X: T^*Q \rightarrow TT^*Q$ del fibrato tangente del fibrato cotangente TT^*Q , il campo X ammette una rappresentazione del tipo

$$(13) \quad \dot{q}^i = X^i, \quad \dot{p}_i = X_i,$$

denotate con $(q^i, p_i, \dot{q}^i, \dot{p}_i)$ le coordinate su TT^*Q indotte dalle coordinate (q^i, p_i) su T^*Q . In entrambe le rappresentazioni le funzioni (X_i, X^i) sono le componenti del campo.

Ciò posto, il valore assunto dalla forma simplettica ω su di una coppia di campi vettoriali (X, Y) è dato da

$$(14) \quad \begin{aligned} \omega(X, Y) &= (dp_i \wedge dq^i)(X, Y) \\ &= \langle X, dp_i \rangle \langle Y, dq^i \rangle - \langle X, dq^i \rangle \langle Y, dp_i \rangle \\ &= X_i Y^i - X^i Y_i. \end{aligned}$$

Si nota allora che se si fissa il campo X e si fa variare Y si ottiene un'applicazione lineare dai campi vettoriali alle funzioni su T^*Q , vale a dire una 1-forma differenziale su T^*Q :

$$(15) \quad \boxed{\omega(X, \cdot) = X_i dq^i - X^i dp_i}$$

Sulla base di queste considerazioni possiamo dimostrare che

PROPOSIZIONE 1. Per ogni funzione differenziabile $H: T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ l'equazione

$$(16) \quad \boxed{\omega(X_H, \cdot) = -dH}$$

definisce un campo vettoriale X_H su T^*Q le cui equazioni differenziali del primo ordine in canoniche fibrato (q^i, p_i) sono le equazioni di Hamilton (8).

Dimostrazione. Scritto il differenziale di H ,

$$(17) \quad dH = \partial_i H dq^i + \partial^i H dp_i$$

e tenuto conto della (15), scritta per $X = X_H$, la definizione (16) equivale all'uguaglianza delle forme differenziali

$$X_i dq^i - X^i dp_i = -\partial_i H dq^i - \partial^i H dp_i.$$

Di qui seguono le uguaglianze

$$(18) \quad X^i = \partial^i H, \quad X_i = -\partial_i H.$$

Sicché, tenuto conto delle (12), si vede che il sistema differenziale associato al campo X_H coincide proprio con il sistema (3), cioè con le equazioni di Hamilton. ■

OSSERVAZIONE 1. Si vede dalla (11) che la matrice delle componenti della forma simplettica ω nelle coordinate (q^i, p_i) è la matrice antisimmetrica

$$(19) \quad J = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & -1 & & \\ & & & & -1 & \\ & & 0 & & & \ddots \\ & & & & & & -1 \\ \hline 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & & 0 & \end{array} \right)$$

detta **matrice simplettica**, composta da quattro sottomatrici quadrate di ordine n , di cui due nulle (le diagonali), una unitaria ed una antiunitaria⁽²⁾. In breve:

$$(19') \quad J = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & -\mathbf{1}_n \\ \hline \mathbf{1}_n & \mathbf{0} \end{array} \right)$$

Sviluppando il determinante di questa matrice secondo le prime n righe con la regola di Laplace si vede che, qualunque sia la dimensione n , è

$$(20) \quad \det(J) = 1.$$

La forma simplettica ω , come forma bilineare, è dunque regolare (§5 - Cap. I). Si osserva inoltre che il quadrato della matrice simplettica è la matrice unitaria:

$$(21) \quad J^2 = \mathbf{1}_{2n}.$$

⁽²⁾ In alcuni testi, in base a convenzioni diverse da quelle qui adottate, per matrice simplettica s'intende la matrice opposta a questa.

2. La trasformazione di Legendre

Alla formulazione lagrangiana delle equazioni della meccanica corrisponde una formulazione hamiltoniana equivalente, costruita sui fibrati cotangenti anziché sui fibrati tangenti. Il legame tra le due formulazioni prende il nome di **trasformazione di Legendre** (Adrien-Marie Legendre, 1752 - 1833) ed è costruito alla maniera seguente.

Si consideri un sistema dinamico lagrangiano (Q, L) con lagrangiana L indipendente dal tempo $L: TQ \rightarrow \mathbb{R}$ ⁽¹⁾ e regolare, cioè tale che

$$(1) \quad \det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} \right) \neq 0$$

La condizione di regolarità della lagrangiana implica due fatti importanti: primo, come si è visto al §8, che la dinamica è rappresentata da un campo lagrangiano X_L sopra la varietà TQ e, secondo, che esiste un diffeomorfismo

$$(2) \quad \varphi_L: TQ \rightarrow T^*Q$$

tra il fibrato tangente ed il fibrato cotangente, conservante le fibre, cioè tale che ad un vettore tangente in un punto $q \in Q$ corrisponde un covettore tangente nello stesso punto. Questo diffeomorfismo è definito dalle equazioni

$$(3) \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}$$

Con queste equazioni infatti le coordinate (p_i) risultano espresse come funzioni delle coordinate (q^i, v^i) , per cui è definita un'applicazione da TQ a T^*Q ⁽²⁾. La condizione di regolarità (1) è necessaria e sufficiente per l'invertibilità di quest'applicazione, cioè alla possibilità di esprimere le coordinate (v^i) come funzioni delle coordinate (q^i, p_i) .

⁽¹⁾ La trasformazione di Legendre può essere definita anche per sistemi lagrangiani dipendenti dal tempo.

⁽²⁾ Si noti la diversa interpretazione delle equazioni (3) e delle analoghe equazioni (5) del §9, Cap. V. Qui le (3) definiscono un'applicazione tra la varietà TQ di coordinate (q^i, v^i) e la varietà T^*Q di coordinate (q^i, p_i) . Le equazioni (5) definiscono invece delle funzioni su TQ (oppure su $TQ \times \mathbb{R}$ nel caso di una lagrangiana t-dipendente).

In effetti le equazioni (3) generano solo un diffeomorfismo locale tra TQ e T^*Q . La lagrangiana L si dice **iper-regolare** se con la combinazione di questi diffeomorfismi locali si genera un diffeomorfismo globale φ_L tra TQ e T^*Q . Se allora si è in queste condizioni, come nel caso di un sistema olonomo (si veda l'Oss. 1 a fine paragrafo), il campo lagrangiano X_L sopra TQ si trasforma tramite questo diffeomorfismo in un campo vettoriale sopra T^*Q . Il fatto notevole è che questo campo è hamiltoniano, come mostrato dal teorema seguente:

TEOREMA. Il campo vettoriale su T^*Q corrispondente a X_L mediante il diffeomorfismo φ_L è un campo hamiltoniano X_H con hamiltoniana H definita da

$$(4) \quad \boxed{H = p_i v^i - L}$$

dove le (v^i) devono intendersi funzioni delle (q^i, p_i) per il tramite delle relazioni inverse delle (3).

Dimostrazione. Si consideri il differenziale della funzione H definita dalla (4):

$$dH = dp_i v^i + p_i dv^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial L}{\partial v^i} dv^i.$$

L'intervento di φ_L , cioè delle (3), fa sì che i coefficienti di dv^i si annullino a vicenda, sicché risulta

$$dH = v^i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i.$$

Ciò significa che

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q^i} = -\frac{\partial L}{\partial q^i}, \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} = v^i, \end{cases}$$

Si osserva d'altra parte che le equazioni di Euler-Lagrange possono porsi nella forma

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = v^i, \\ \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^i}. \end{cases}$$

Quindi, grazie alle (5), esse sono equivalenti alle equazioni di Hamilton

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \end{cases} \quad \blacksquare$$

OSSERVAZIONE 1. Applichiamo le considerazioni precedenti al caso fondamentale di un sistema olonomo conservativo, la cui lagrangiana è

$$(8) \quad L = T + U = \frac{1}{2} g_{ij} v^i v^j + U(q^i).$$

Le equazioni (3), che definiscono φ_L , diventano

$$(9) \quad \boxed{p_i = g_{ij} v^j}$$

e si invertono nelle equazioni

$$(10) \quad \boxed{v^i = g^{ij} p_j}$$

che rappresentano invece φ_L^{-1} . In questo caso dunque φ_L è un diffeomorfismo globale e la lagrangiana L è iper-regolare. Per le (9) e le (10) si ha

$$T = \frac{1}{2} p_i v^i = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j,$$

e l'hamiltoniana definita dalla (5) diventa allora

$$(11) \quad \boxed{H = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j - U(q^i)}$$

Di qui seguono le quazioni di Hamilton:

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = g^{ij} p_j, \\ \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial q^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial g^{hj}}{\partial q^i} p_h p_j. \end{cases}$$

Si vede dalla (11) che l'hamiltoniana coincide con la trasformata tramite φ_L dell'energia totale $E = T + U$, a conferma del fatto, come l'energia totale, che l'hamiltoniana è un integrale primo (si veda il §4).

3. Il metodo di Jacobi

Uno dei vantaggi principali dell'approccio lagrangiano alla meccanica è la totale libertà di scelta delle coordinate (q^i) sulla varietà delle configurazioni Q . Il formalismo hamiltoniano amplia ulteriormente le possibilità di scelta delle coordinate. La ragione di questo ampliamento risiede nel fatto notevole che la formulazione hamiltoniana della dinamica è sintetizzata in un campo vettoriale X_H sul fibrato cotangente T^*Q , alla cui definizione concorre un unico elemento intrinseco proprio di tale varietà: la forma simplettica ω . Questo campo è infatti definito, ricordiamolo, dall'equazione

$$(1) \quad \omega(X_H, \cdot) = -dH.$$

In questo contesto è allora del tutto arbitraria la scelta delle coordinate su T^*Q , non solo su Q . Tuttavia, un ruolo primario e privilegiato è svolto dalle **coordinate canoniche**.

DEFINIZIONE 1. Un **sistema di coordinate** (b^i, a_i) su T^*Q si dice **canonico** se rispetto a queste la 2-forma simplettica canonica ω assume la forma

$$(2) \quad \boxed{\omega = da_i \wedge db^i}$$

Va subito osservato che le coordinate canoniche fbrate (q^i, p_i) associate a coordinate (q^i) su Q sono coordinate canoniche nel senso ora definito perché si ha (per definizione di ω) $\omega = dp_i \wedge dq^i$. Tuttavia, come si avrà modo di osservare nel seguito, esistono sistemi di coordinate canoniche (b^i, a_i) dove le prime n coordinate *non sono* coordinate di configurazione, cioè coordinate su Q .

L'importanza delle coordinate canoniche è sostanzialmente dovuta al fatto che, rispetto a queste, le equazioni differenziali del campo X_H sono sempre equazioni di Hamilton o **equazioni canoniche**:

$$(3) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{db^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial a_i} \\ \frac{da_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial b^i} \end{aligned}}$$

Per riconoscerlo basta ripercorrere i calcoli svolti al §1 ed osservare che le equazioni di Hamilton (3) si deducono dalla definizione intrinseca (1) del campo X_H utilizzando il solo fatto che la forma simplettica ω è suscettibile di una scrittura del tipo $\omega = dp_i \wedge dq^i$, cioè del tipo (2).

Se ora esaminiamo le equazioni (3) osserviamo immediatamente che se la funzione $h(b^i, a_i)$ rappresentatrice dell'hamiltoniana H nelle coordinate canoniche (b^i, a_i) non dipende dalle (b^i) (col che si può dire che le (b^i) sono **ignorabili**) allora queste equazioni si riducono a

$$(4) \quad \frac{db^i}{dt} = \frac{\partial h}{\partial a_i}, \quad \frac{da_i}{dt} = 0.$$

In tal caso le prime n si integrano subito:

$$(5) \quad a_i = \text{cost.}$$

Così le seconde, perché anche le derivate parziali

$$(6) \quad h^i = \frac{\partial h}{\partial a_i}$$

sono delle costanti, e quindi risulta

$$(7) \quad b^i = h^i t + c^i$$

con (c^i) costanti arbitrarie. L'integrazione delle equazioni di Hamilton è dunque riconducibile alla ricerca di questi particolari sistemi di coordinate canoniche. È questa l'idea guida del **metodo di Jacobi**.

Per costruire questo metodo si comincia con l'osservare che se (q^i, p_i) è un sistema di coordinate canoniche (per esempio fbrate) allora (b^i, a_i) è ancora un sistema di coordinate canoniche se e solo se

$$(8) \quad d(p_i dq^i + b^i da_i) = 0,$$

perché la (8) equivale all'uguaglianza $dp_i \wedge dq^i = da_i \wedge db^i$, cioè a $\omega = da_i \wedge db^i$. La (8) afferma che la 1-forma $p_i dq^i + b^i da_i$ sopra T^*Q è chiusa, quindi localmente esatta: esiste localmente (su T^*Q) una funzione W per cui

$$(9) \quad \boxed{p_i dq^i + b^i da_i = dW}$$

Si supponga ora che le $2n$ funzioni (q^i, a_i) siano indipendenti, formino cioè un sistema di coordinate su T^*Q . Espressa la funzione W tramite queste coordinate,

$$W = W(q^i, a_i),$$

la (9) equivale alle equazioni

$$(10) \quad \boxed{p_i = \frac{\partial W}{\partial q^i}, \quad b^i = \frac{\partial W}{\partial a_i}}$$

Ma le prime n equazioni devono essere risolubili rispetto alle (a_i) perché le (q^i, a_i) , dovendo formare un sistema di coordinate, devono potersi esprimere come funzioni (invertibili) delle coordinate (q^i, p_i) . Le $(10)_1$ mostrano che questo accade se e solo se

$$(11) \quad \boxed{\det \left(\frac{\partial^2 W}{\partial q^i \partial a_j} \right) \neq 0}$$

Una funzione $W(q^i, a_i)$ soddisfacente a questa condizione, detta **condizione di completezza**, prende il nome di **funzione generatrice della trasformazione canonica** $(q^i, p_i) \rightarrow (b^i, a_i)$. Essa infatti, tramite la (9) ovvero le equazioni (10), genera delle coordinate canoniche (b^i, a_i) a partire da coordinate canoniche (q^i, p_i) . Infatti scritte le (10), si invertano le $(10)_1$ esprimendo così le (a_i) in funzione delle (q^i, p_i) . La successiva sostituzione di queste funzioni nelle $(10)_2$ permette di esprimere anche le (b^i) in funzione delle (q^i, p_i) ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ La condizione (8) è equivalente ad una delle seguenti

$$\begin{cases} d(q^i dp_i - b^i da_i) = 0, \\ d(q^i dp_i - a_i db^i) = 0, \\ d(p_i dq^i + a_i db^i) = 0, \end{cases}$$

alle quali corrispondono altri tre tipi di funzioni generatrici:

$$\begin{cases} q^i dp_i - b^i da_i = dW_1, & W_1 = W_1(p_i, a_i), \\ q^i dp_i - a_i db^i = dW_2, & W_1 = W_1(p_i, b^i), \\ p_i dq^i + a_i db^i = dW_3, & W_1 = W_1(q^i, b^i). \end{cases}$$

La scelta qui fatta è la più conveniente per gli sviluppi successivi.

Fatta quest'osservazione sulla costruzione delle coordinate canoniche, ci si chiede quale sia la condizione da imporre alla funzione generatrice W affinché le corrispondenti coordinate canoniche soddisfino al requisito considerato all'inizio, per cui H non viene a dipendere dalle (b^i) e quindi il sistema di Hamilton è facilmente integrabile.

Per far questo è sufficiente osservare che se $H(q^i, p_i)$ è la funzione rappresentativa di H nelle coordinate (q^i, p_i) allora è

$$H(q^i, p_i) = h(a_i)$$

dove a secondo membro compare la funzione rappresentativa di H nelle coordinate (b^i, a_i) . Con l'intervento delle $(10)_1$ quest'uguaglianza assume la forma

$$(12) \quad \boxed{H \left(q^i, \frac{\partial W}{\partial q^i} \right) = h}$$

dove, in virtù delle (5), h è una costante. Possiamo allora enunciare il classico **teorema di Jacobi**:

TEOREMA. Data la rappresentazione $H(q^i, p_i)$ in coordinate canoniche (q^i, p_i) di un'hamiltoniana H , se si conosce una soluzione $W(q^i, a_i)$ dell'equazione differenziale (12) soddisfacente alla condizione di completezza (11), allora le curve integrali del campo hamiltoniano X_H sono determinabili con sole operazioni di inversione e di sostituzione.

Infatti, in base a quanto visto, la funzione W è generatrice di un sistema di coordinate canoniche (b^i, a_i) rispetto alle quali l'hamiltoniana H dipende dalle sole (a_i) e quindi X_H risulta di immediata integrazione.

Il metodo di Jacobi riconduce il problema della determinazione delle curve integrali del campo X_H , vale a dire delle soluzioni delle equazioni di Hamilton (3), all'integrazione di una sola equazione alle derivate parziali del primo ordine, l'equazione (12). Questa prende il nome di **equazione di Hamilton-Jacobi** (più precisamente di equazione di Hamilton-Jacobi **ridotta**). Una sua soluzione $W(q^i, a_i)$ soddisfacente alla condizione (11) prende il nome di **integrale completo** dell'equazione di Hamilton-Jacobi.

L'integrazione dell'equazione di Hamilton-Jacobi può talvolta rivelarsi più semplice dell'integrazione delle equazioni di Hamilton, anche se, una volta determinato un integrale completo W , può presentarsi la

difficoltà di invertire le equazioni $(10)_1$, operazione possibile in principio (in virtù della condizione (11)) ma non sempre facilmente eseguibile in pratica.

Sovente è possibile determinare un integrale completo, o almeno di ricondurre la sua determinazione alle *quadrature*, vale a dire di esprimerlo mediante integrali semplici, attraverso il metodo della **separazione delle variabili**. Questo metodo consiste nel ricercare delle coordinate (q^i) su Q per le quali l'equazione di Hamilton-Jacobi ammette un integrale completo che è somma di funzioni dipendenti ciascuna da una singola coordinata

Numerosi classici problemi sono stati studiati e risolti per questa via. Per esempio il problema delle geodetiche di un ellissoide asimmetrico, che ha in effetti condotto Jacobi all'invenzione del suo metodo, e i problemi delle geodetiche dello spazio-tempo di Schwarzschild e dello spazio-tempo di Kerr, i quali, nell'ambito della teoria einsteiniana della gravitazione (Relatività Generale), sono rispettivamente connessi con lo studio dei moti planetari e dei "buchi neri".

OSSERVAZIONE 1. Nell'integrare l'equazione di Hamilton-Jacobi è spontaneo far coincidere una delle costanti d'integrazione (a_i) con la costante h che compare a secondo membro (la costante dell'energia). Se per esempio si pone

$$(13) \quad a_n = h,$$

dalla (6) si vede che

$$(14) \quad h^i = \delta^{in}.$$

Pertanto le (7) diventano

$$(15) \quad b^i = \delta^{in} t + c^i \quad \begin{cases} b^k = c^k & (k = 1, \dots, n-1), \\ b^n = t - t_0 & (\text{posto } c^n = -t_0) \end{cases}$$

Tenuto allora conto delle $(10)_2$ si conclude che tutti i moti del sistema sono determinati, noto un integrale completo $W(q^i, a_i)$ con $a_n = h$, dalle n equazioni

$$(16) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial a_k} &= c^k & (k = 1, \dots, n-1) \\ \frac{\partial W}{\partial h} &= t - t_0 \end{aligned}}$$

dove le (c_k) e t_0 sono costanti arbitrarie. Le prime $n-1$ equazioni (16) non contengono il tempo, quindi al variare delle $2n-1$ costanti (a_i, c^k) definiscono le orbite. Il modo con cui queste orbite vengono percorse è invece descritto dall'ultima equazione (16).

Mettiamo in opera il metodo di Jacobi in due semplici problemi.

ESEMPIO 1. Si consideri la dinamica di un grave di massa m in un piano verticale. La varietà delle configurazioni Q è il piano euclideo (il piano verticale). Prendiamo su questo delle coordinate cartesiane ortonormali $(q^1, q^2) = (x, z)$ con l'asse z orientato verso l'alto. Poniamo $(p_1, p_2) = (p_x, p_z)$. L'energia cinetica e il potenziale sono

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{z}^2), \quad U = -mgz.$$

L'hamiltoniana è

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_z^2) + mgz.$$

L'equazione di Hamilton-Jacobi (12) diventa

$$(17) \quad \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] + mgz = h.$$

Cerchiamone una soluzione del tipo

$$W = ax + F(z),$$

con $a \in \mathbb{R}$. Sostituendo una tale espressione nella (17) si trova

$$\frac{1}{2m} \left[a^2 + \left(\frac{dF}{dz} \right)^2 \right] + mgz = h.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \left(\frac{dF}{dz} \right)^2 &= 2m(h - mgz) - a^2 \\ &= 2m^2 g \left(\frac{h}{mg} - z \right) - a^2 \\ &= 2m^2 g (z_0 - z), \end{aligned}$$

posto

$$(18) \quad z_0 = \frac{1}{mg} \left(h - \frac{a^2}{2m} \right).$$

Di qui segue subito che deve essere

$$z \leq z_0.$$

La costante z_0 rappresenta quindi la quota massima raggiungibile dal punto (dotato di energia h). Integrando per valori positivi della derivata di F si ha, a meno di un'inessenziale costante additiva,

$$F = m\sqrt{2g} \int \sqrt{z_0 - z} \, dz = -\frac{2}{3} m\sqrt{2g} (z_0 - z)^{\frac{3}{2}}.$$

Si trova in definitiva la soluzione

$$W = ax - \frac{2}{3} m\sqrt{2g} (z_0 - z)^{\frac{3}{2}}.$$

Ponendo $a_1 = a$ e $a_2 = h$ si verifica che questa funzione è effettivamente un integrale completo. Infatti, tenuto conto del legame (18) tra le varie costanti, si ha

$$\frac{\partial z_0}{\partial a} = -\frac{a}{m^2 g}, \quad \frac{\partial z_0}{\partial h} = \frac{1}{mg}.$$

Per cui:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial a} & \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial h} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial a} & \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial h} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial a} & \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial h} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial h} \\ &= \frac{\partial}{\partial h} \left(m\sqrt{2g} (z_0 - z)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} (z_0 - z)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Pertanto W è un integrale completo definito per $z < z_0$. Mettiamo ora in opera le equazioni (16). A conti fatti risulta:

$$\begin{cases} x + \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{a}{m} (z_0 - z)^{\frac{1}{2}} = c, \\ \sqrt{\frac{2}{g}} (z_0 - z)^{\frac{1}{2}} = t_0 - t, \end{cases}$$

con c e t_0 costanti arbitrarie. Elevando entrambe queste equazioni al quadrato (col che si elimina la doppia determinazione del segno della W) si trova in conclusione:

$$\begin{cases} z_0 - z = \frac{gm^2}{2a^2} (x - c)^2, \\ z_0 - z = \frac{g}{2} (t - t_0)^2. \end{cases}$$

La prima equazione mostra che le orbite sono delle parabole. La seconda esprime la nota legge di caduta del grave. Non resta che chiarire il significato delle costanti. Dalla seconda di queste equazioni si vede che la costante t_0 è l'istante in cui la quota massima $z = z_0$ è raggiunta, dalla prima che c è l'ordinata corrispondente. Per quel che riguarda infine la costante a , dall'equazione

$$p_x = \frac{\partial W}{\partial x} = a$$

si vede che essa coincide con la quantità di moto orizzontale, a conferma del fatto che essa è un integrale primo.

ESEMPIO 2. Si consideri l'oscillatore armonico piano: un punto mobile su di un piano ed attratto da una forza elastica centrata in un punto fisso O . Scegliendo coordinate cartesiane ortonormali $(q^1, q^2) = (x, y)$ centrate nel punto O e posto al solito $(p_1, p_2) = (p_x, p_y)$ l'hamiltoniana è

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{k}{2} (x^2 + y^2).$$

Moltiplicando per $2m$, l'equazione di Hamilton-Jacobi diventa

$$(18) \quad \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + mk(x^2 + y^2) = 2mh.$$

Anche in questo caso si provare ad integrare separando le variabili, cercando cioè una soluzione del tipo

$$W = W_1(x) + W_2(y).$$

In effetti l'equazione (18) si spezza nella *somma* di due equazioni differenziali *separate* del tutto simili:

$$\left(\frac{dW_1}{dx} \right)^2 + mkx^2 = mka_1, \quad \left(\frac{dW_2}{dy} \right)^2 + mky^2 = mka_2,$$

posto che si abbia

$$(19) \quad h = \frac{k}{2}(a_1 + a_2).$$

Si noti che le costanti arbitrarie (a_1, a_2) devono essere positive. Dalla prima equazione si vede che

$$W_1 = \pm \sqrt{mk} \int \sqrt{a_1 - x^2} dx.$$

Non è tuttavia necessario procedere al calcolo di quest'integrale, perché ciò che in effetti torna utile è conoscere le derivate parziali della funzione W rispetto alle costanti (a_1, a_2) . Derivando sotto il segno di integrale si trova allora (prendono per esempio il segno +)

$$\frac{\partial W}{\partial a_1} = \frac{\partial W_1}{\partial a_1} = \sqrt{mk} \int \frac{dx}{2\sqrt{a_1 - x^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{mk} \arccos \frac{x}{\sqrt{a_1}}.$$

Combinando ora le equazioni (7) con le equazioni $(10)_2$, tenuto conto che per la (19)

$$h_1 = \frac{\partial h}{\partial a_1} = \frac{k}{2},$$

si trova

$$\frac{1}{2} \sqrt{mk} \arccos \frac{x}{\sqrt{a_1}} = \frac{1}{2} kt - c_1.$$

Di qui, con un riaggiustamento della costante arbitraria c_1 , segue in definitiva

$$x = \sqrt{a_1} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t - c_1 \right).$$

Per la coordinata y sussiste ovviamente un'equazione analoga:

$$y = \sqrt{a_2} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t - c_2 \right).$$

Si ritrovano così i moti armonici componenti.

4. Parentesi di Poisson e integrali primi

Per un generico campo vettoriale X su T^*Q , di componenti (X^i, X_i) (si veda la (12) del §1) e per una qualunque funzione reale differenziabile F su T^*Q si ha

$$\langle X, dF \rangle = X^i \partial_i F + X_i \partial^i F.$$

Se in particolare il campo vettoriale è un campo hamiltoniano X_H , viste le (18) del §1, risulta

$$(1) \quad \langle X_H, dF \rangle = \partial^i H \partial_i F - \partial_i H \partial^i F.$$

Se allora si pone, qualunque siano le funzioni H ed F sopra T^*Q ,

$$(2) \quad \{H, F\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right)$$

l'uguaglianza (1) diventa

$$(3) \quad \langle X_H, dF \rangle = \{H, F\}$$

Parallelamente, tenuto conto della definizione (16)-§2 di campo hamiltoniano, si ha

$$\omega(X_H, X_F) = -\langle X_F, dH \rangle = \partial^i H \partial_i F - \partial_i H \partial^i F,$$

quindi

$$(4) \quad \omega(X_H, X_F) = \{H, F\}$$

Da queste formule emerge l'importanza dell'operazione definita dalla (2).

DEFINIZIONE 1. L'operazione binaria interna $\{\cdot, \cdot\}$ sullo spazio delle funzioni reali differenziabili sopra T^*Q definita dalla (2) prende il nome di **parentesi di Poisson**. Due funzioni F e G si dicono **in involuzione** se $\{F, G\} = 0$ ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Nei testi di Meccanica Analitica le parentesi di Poisson sono in genere definite con segno opposto a quello qui adottato.

Le parentesi di Poisson istituiscono sullo spazio vettoriale delle funzioni differenziabili sopra il fibrato cotangente T^*Q una struttura di algebra di Lie, che prende il nome di **algebra di Poisson**. Esse infatti sono anticommutative, bilineari e soddisfano all'**identità di Jacobi**:

$$(5) \quad \begin{cases} \{F, G\} = -\{G, F\}, \\ \{aF + bG, H\} = a\{F, H\} + b\{G, H\} \quad (a, b \in \mathbb{R}), \\ \{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0. \end{cases}$$

Le prime due proprietà sono immediate, la verifica dell'identità di Jacobi richiede invece qualche calcolo. Di immediata verifica sono anche le seguenti proprietà differenziali: la **regola di Leibniz** (per entrambi i fattori)

$$(6) \quad \{F, GH\} = \{F, G\}H + \{F, H\}G,$$

e la **regolarità**,

$$(7) \quad \{F, G\} = 0, \forall G \in \mathcal{F}(T^*Q) \implies dF = 0.$$

Le parentesi di Poisson svolgono un ruolo cruciale nella trattazione degli integrali primi di un campo hamiltoniano. Infatti, richiamata la definizione di derivata di una funzione rispetto ad un campo vettoriale,

$$\langle X_H, dF \rangle = \frac{dF}{dt},$$

si vede dalla (3) che la derivata di una funzione F lungo le curve integrali del campo hamiltoniano X_H è data da

$$(8) \quad \boxed{\frac{dF}{dt} = \{H, F\}}$$

Di qui si trae subito la notevole proprietà che

PROPOSIZIONE 1. Una funzione F è un integrale primo del campo hamiltoniano X_H se e solo se $\{H, F\} = 0$, cioè se e solo se essa è in involuzione con l'hamiltoniana H del campo.

Siccome è ovviamente $\{H, H\} = 0$ si ha anche che

PROPOSIZIONE 2. L'hamiltoniana H è un integrale primo del campo vettoriale X_H .

È inoltre un'immediata conseguenza dell'identità di Jacobi il seguente classico **teorema di Poisson sugli integrali primi**:

PROPOSIZIONE 3. Se F e G sono due integrali primi del campo X_H , allora la loro parentesi di Poisson $\{F, G\}$ è anche un integrale primo.

Dalle condizioni $\{H, F\} = 0$ e $\{H, G\} = 0$ segue infatti, per l'identità di Jacobi, $\{H, \{F, G\}\} = 0$. Si ha così un semplice metodo di costruzione di nuovi integrali primi a partire da integrali primi noti, il cui utilizzo però è limitato dal fatto che la parentesi di Poisson $\{F, G\}$ può essere funzionalmente dipendente da F e G e quindi non dare luogo a nessun integrale primo essenzialmente nuovo, o essere addirittura nulla.

Come sappiamo, la conoscenza di integrali primi facilita l'analisi e la determinazione delle curve integrali di un campo vettoriale. Se, nel migliore dei casi, si conoscono $m - 1$ integrali primi indipendenti (dove m è la dimensione della varietà su cui il campo è definito) allora risultano determinate le orbite e le curve integrali sono almeno ricondotte alle quadrature. Tuttavia è notevole il fatto che per l'integrabilità di un sistema hamiltoniano X_H è sufficiente conoscere n integrali primi indipendenti (con $n = \frac{1}{2} \dim(T^*Q) = \dim(Q)$), tra i quali possiamo sempre includere l'hamiltoniana H , purché questi siano in involuzione. Si tratta del notevole **teorema di integrabilità di Liouville**:

PROPOSIZIONE 4. Se di un campo hamiltoniano X_H su di un fibrato cotangente T^*Q di dimensione $2n$ si conoscono n integrali primi indipendenti ed in involuzione allora le sue curve integrali sono ricondotte alle quadrature e ad operazioni di inversione.

Questo teorema, su cui si ritornerà al §6, è una conseguenza diretta del fatto che la conoscenza di un sistema di n integrali primi in involuzione equivale alla conoscenza di un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi, come mostrato dalla proposizione seguente.

PROPOSIZIONE 5. (i) Se (F_i) sono n integrali primi verticalmente

indipendenti⁽²⁾ ed in involuzione di un campo hamiltoniano X_H allora, risolte le n equazioni

$$(9) \quad F_i(q^j, p_k) = a_i$$

rispetto alle (p_i) , si ottengono delle funzioni

$$(10) \quad p_i = W_i(q^j, a_k)$$

tali che, per ogni valore dei parametri (a_k) , la 1-forma $W_i dq^i$ è chiusa. Esiste quindi localmente una funzione $W(q^j, a_k)$ per cui

$$(11) \quad p_i = \frac{\partial W}{\partial q^i}.$$

Questa è un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi. (ii) Viceversa, se si conosce un integrale completo $W(q^i, a_j)$ dell'equazione di Hamilton-Jacobi allora risolvendo le equazioni (11) rispetto alle costanti (a_j) si trovano delle funzioni (9) che sono integrali primi in involuzione di X_H .

Come si vede, si passa dalle (F_i) alle (W_i) con operazioni di inversione, dalle (W_i) alla W con uno o più integrali semplici⁽³⁾ e infine dalla W alle curve integrali con le operazioni viste al § precedente (Oss. 1). L'integrazione delle equazioni di Hamilton è dunque ricondotta ad operazioni di inversione e a quadrature, per cui il teorema di Liouville è dimostrato.

Resta comunque da dimostrare la Prop. 5 la quale peraltro, come si vedrà al prossimo paragrafo, risulta un'immediata conseguenza dell'interpretazione geometrica di integrale completo come fogliettamento di *sottovarietà lagrangiane*.

⁽²⁾ La definizione di indipendenza verticale è data nell'Oss. 1 seguente. L'ipotesi di verticale indipendenza degli integrali primi può essere omessa; la dimostrazione del teorema di Liouville richiederebbe però in questo caso ulteriori considerazioni sulle trasformazioni di coordinate canoniche. Il significato di verticale indipendenza sarà chiarito nel prossimo paragrafo.

⁽³⁾ Infatti W è ottenibile integrando la forma differenziale $W_i dq^i$ sul piano coordinato $(q^i) = \mathbb{R}^n$, o lungo una retta uscente dall'origine, oppure lungo una spezzata di segmenti di rette parallele agli assi coordinati (si vedano i corsi di Analisi).

OSSERVAZIONE 1. Per definizione, le n funzioni $F_i(q^j, p_k)$ sono indipendenti se i loro differenziali dF_i sono ovunque linearmente indipendenti. Questa proprietà è caratterizzata dalla massimalità del rango della matrice $2n \times n$ delle derivate parziali

$$(12) \quad \left(\frac{\partial F_i}{\partial q^j}, \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \right).$$

Le funzioni (F_i) si dicono in particolare **verticalmente indipendenti** se

$$(13) \quad \det \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_k} \right) \neq 0.$$

Questa è proprio la condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità delle (9) rispetto alle (p_i) .

5. Sottovarietà lagrangiane

DEFINIZIONE 1. Una sottovarietà $\Lambda \subset T^*Q$ è detta **sottovarietà lagrangiana** se la sua dimensione è n (cioè uguale alla dimensione di Q) e se inoltre la 2-forma simplettica $\omega = d\theta$ si annulla sui vettori tangenti a Λ : $\forall p \in \Lambda, \forall u, v \in T_p\Lambda, \omega(u, v) = 0$.

Vediamo ora di caratterizzare le sottovarietà lagrangiane attraverso le loro possibili rappresentazioni.

Una sottovarietà $\Lambda \subset T^*Q$ di dimensione n può essere descritta (almeno localmente) da un numero complementare, quindi ancora uguale a n , di equazioni

$$(1) \quad F_i(q^j, p_k) = 0,$$

dove le (F_i) sono n funzioni indipendenti su T^*Q , quindi tale che la matrice $n \times 2n$ delle derivate parziali

$$(2) \quad \left(\frac{\partial F_i}{\partial q^j}, \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \right)$$

ha rango massimo. La stessa sottovarietà può essere anche descritta (sempre localmente) da equazioni parametriche in n parametri (u^h)

$$(3) \quad \begin{cases} q^i = q^i(u^h), \\ p_i = p_i(u^h), \end{cases}$$

con la matrice $n \times 2n$ delle derivate parziali

$$(4) \quad \left(\frac{\partial q^i}{\partial u^h}, \frac{\partial p_i}{\partial u^h} \right)$$

di rango massimo.

Cominciamo con l'esaminare questa seconda rappresentazione.

PROPOSIZIONE 1. La sottovarietà Λ rappresentata dalle equazioni parametriche (3) è lagrangiana se e solo se valgono le uguaglianze (somma sottintesa sull'indice ripetuto i)⁽¹⁾

$$(5) \quad \frac{\partial p_i}{\partial u^h} \frac{\partial q^i}{\partial u^k} - \frac{\partial p_i}{\partial u^k} \frac{\partial q^i}{\partial u^h} = 0.$$

Dimostrazione. Sostituendo le equazioni parametriche (3) nell'espressione $\omega = dp_i \wedge dq^i$ della forma symplettica troviamo

$$(6) \quad dp_i \wedge dq^i = \frac{\partial p_i}{\partial u^h} \frac{\partial q^i}{\partial u^k} du^h \wedge du^k.$$

Quindi, stante l'antisimmetria del prodotto esterno $du^h \wedge du^k$, l'annullarsi del primo membro equivale alle condizioni (5). D'altra parte va osservato che la (6) esprime proprio la restrizione di ω ai vettori tangenti a Λ , o come si usa dire più brevemente, la *restrizione di ω a Λ* , denotata con $\omega|_{\Lambda}$ (si veda l'osservazione seguente). ■

OSSERVAZIONE 1. Si tratta di una proprietà generale delle forme differenziali ristrette alle sottovarietà. Sia M una varietà di dimensione m e sia $S \subset M$ una sottovarietà di dimensione n . Siano (x^A) coordinate su di un dominio U di M a intersezione non vuota con S e siano

$$x^A = x^A(u^i)$$

⁽¹⁾ I primi membri delle (5) sono le cosiddette **parentesi di Lagrange**.

delle equazioni parametriche di S nei parametri (u^i) ($i = 1, \dots, n$). Derivando formalmente queste equazioni si ottengono le componenti (v^A) dei vettori v tangenti a S ,

$$v^A = \dot{x}^A = \frac{\partial x^A}{\partial u^i} \dot{u}^i,$$

come funzioni di altri n parametri reali $(\dot{u}^i)$, che possono essere interpretati come le componenti di un vettore $u \in \mathbb{R}^n$. Sia allora $\theta = \theta_A dx^A$ una 1-forma su M (il ragionamento che qui facciamo si estende al caso di una qualunque p -forma). Il valore di θ su di un generico vettore $v \in TS$ è dato da

$$\langle v, \theta \rangle = \theta_A \langle v, dx^A \rangle = \theta_A v^A = \theta_A \frac{\partial x^A}{\partial u^i} \dot{u}^i.$$

Possiamo d'altra parte interpretare le componenti $\dot{u}^i$ come il valore dei differenziali du^i sul generico vettore $u \in \mathbb{R}^n$:

$$\dot{u}^i = \langle u, du^i \rangle.$$

Allora la formula precedente mostra che la restrizione di θ ai vettori tangenti a S , che denotiamo semplicemente con $\theta|_S$ (anziché, come sarebbe più corretto, con $\theta|_{TS}$), si ottiene semplicemente sostituendo nella sua espressione $\theta_A dx^A$ le equazioni parametriche di S :

$$\theta|_S = \theta_A \frac{\partial x^A}{\partial u^i} du^i.$$

Applicando questa regola alla 2-forma symplettica ω e alla sottovarietà Λ si trova

$$\omega|_{\Lambda} = (dp_i \wedge dq^i)|_{\Lambda} = \left(\frac{\partial p_i}{\partial u^h} du^h \right) \wedge \left(\frac{\partial q^i}{\partial u^k} du^k \right),$$

cioè la (6).

Consideriamo ora la rappresentazione (1).

PROPOSIZIONE 2. La sottovarietà Λ definita dalle equazioni (1) è lagrangiana se e solo se le funzioni (F_i) sono in involuzione sopra Λ , cioè

$$(7) \quad \{F_i, F_j\}|_{\Lambda} = 0.$$

Dimostrazione. Si considerino i campi vettoriali hamiltoniani (X_i) generati dalle (F_i) (usiamo la notazione X_i , più semplice di X_{F_i}) e quindi definiti dalle equazioni

$$(8) \quad \omega(X_i, \cdot) = -dF_i.$$

Dalle formule (2) e (3) del § precedente seguono le uguaglianze

$$(9) \quad \begin{cases} \langle X_i, dF_j \rangle = \{F_i, F_j\}, \\ \omega(X_i, X_j) = \{F_i, F_j\}. \end{cases}$$

Se valgono le (7) allora segue dalle (9) che sui punti di Λ valgono le uguaglianze

$$(10) \quad \begin{cases} \langle X_i, dF_j \rangle = 0, \\ \omega(X_i, X_j) = 0. \end{cases}$$

La prima afferma che ogni campo X_i è tangente a Λ . Siccome questi campi sono punto per punto indipendenti, la seconda mostra che ω ristretto a tutte le coppie di vettori tangenti a Λ è nulla⁽²⁾. Dunque Λ è lagrangiana. Viceversa, dimostriamo che le (7) sono necessarie per la lagrangianità cominciando con l'osservare che, valendo le (1), un generico vettore tangente v a Λ è caratterizzato dalle equazioni $\langle v, dF_i \rangle = 0$, quindi dalle equazioni

$$\omega(X_i, v) = 0.$$

Quest'equazione, valida per ogni $v \in T\Lambda$, mostra che anche ogni campo vettoriale X_i è a sua volta tangente a Λ (si veda l'Oss. 2 seguente). Pertanto, per la lagrangianità di Λ , su Λ è $\omega(X_i, X_j) = 0$ e quindi $\{F_i, F_j\} = 0$ per la (3)-§4. ■

Nell'ultima parte di questa dimostrazione si è utilizzata una proprietà notevole, di natura algebrico-lineare, oggetto dell'osservazione seguente.

OSSERVAZIONE 2. Chiamiamo **spazio vettoriale simplettico** una coppia (E, ω) costituita da uno spazio vettoriale E (reale e a dimensione finita) e da una forma bilineare antisimmetrica ω su E a valori in

⁽²⁾ I vettori (X_i) sono indipendenti perché dalla (8) segue $\omega(a^i X_i, \cdot) = -a^i dF_i$ e quindi da $a^i X_i = 0$ segue $a^i dF_i = 0$. Ma i differenziali (dF_i) sono indipendenti, dunque $a^i = 0$.

$\mathbb{R}$ e regolare, cioè tale da soddisfare all'implicazione $\omega(u, v) = 0, \forall v \in E \implies u = 0$. Se si considera una base qualsiasi (e_A) di E , le componenti $\omega_{AB} = \omega(e_A, e_B)$ di ω soddisfano alle condizioni di antisimmetria $\omega_{AB} = -\omega_{BA}$ e di regolarità $\det(\omega_{AB}) \neq 0$. Siccome una matrice antisimmetrica ha determinante diverso da zero solo se è di ordine pari, lo spazio vettoriale E ha necessariamente dimensione pari $m = 2n$. In analogia con quanto si fa per gli spazi euclidei, si definisce l'ortogonale (simplettico) di un sottospazio $K \subset E$ ponendo

$$K^\perp = \{v \in E \mid \omega(u, v) = 0, \forall u \in K\}.$$

La dimensione di $K^\perp$ è complementare a quella di K . Si osservi che ogni vettore è ortogonale a se stesso, quindi isotropo. Un sottospazio $L \subset E$ è detto **lagrangiano** se ha dimensione n (la metà di E) e se su di esso si annulla ω : $\omega(u, v) = 0$ per ogni $u, v \in L$ (si può dimostrare che in effetti n è la dimensione massima dei sottospazi su cui si annulla ω). È allora interessante osservare che $L^\perp = L$. Infatti da $u \in L$ segue $u \in L^\perp$ (perché per la lagrangianità è $\omega(u, v) = 0$ per ogni $v \in L$), dunque $L \subset L^\perp$. Ma poiché L ha la stessa dimensione di $L^\perp$, segue l'uguaglianza dei due sottospazi. Si può allora affermare che un vettore ortogonale a L sta in L . Questa è appunto la proprietà usata alla fine della dimostrazione precedente. Occorre a questo proposito ancora osservare che in ogni punto $p \in T^*Q$ la forma simplettica ω si riduce ad una forma bilineare antisimmetrica regolare (Oss. 1, §1), per cui $T_p(T^*Q)$ è uno spazio vettoriale simplettico. Inoltre se $\Lambda \subset T^*Q$ è una sottovarietà lagrangiana, allora per ogni $p \in \Lambda$ lo spazio tangente $T_p\Lambda$ è un sottospazio lagrangiano di $T_p(T^*Q)$.

Consideriamo ora una classe particolare di sottovarietà lagrangiane.

DEFINIZIONE 2. Una sottovarietà lagrangiana $\Lambda \subset T^*Q$ si dice **trasversa alle fibre** se in ogni suo punto p lo spazio tangente $T_p\Lambda$ è complementare allo spazio $V_p(T^*Q)$ dei vettori verticali in p . Un vettore di $T(T^*Q)$, cioè un vettore tangente a T^*Q , si dice **verticale** se le sue componenti $(\dot{q}^i)$ sono nulle⁽³⁾.

⁽³⁾ Una definizione equivalente è: un vettore $v \in T_p(T^*Q)$ è verticale se è una classe di equivalenza di curve su T^*Q la cui immagine sta tutta nello spazio T_q^*Q (cioè nella fibra) contenente p .

PROPOSIZIONE 3. Una sottovarietà $\Lambda \subset T^*Q$ rappresentata da n equazioni (1) è trasversa alle fibre se e solo se le funzioni (F_i) sono verticalmente indipendenti.

Dimostrazione. I vettori tangenti a Λ hanno componenti $(\dot{q}^i, \dot{p}_i)$ soddisfacenti alle equazioni lineari

$$(11) \quad \partial_k F_i \dot{q}^k + \partial^k F_i \dot{p}_k = 0,$$

ottenute derivando formalmente le (1). I vettori verticali di $T\Lambda$ soddisfano quindi alle equazioni

$$(12) \quad \partial^k F_i \dot{p}_k = 0.$$

La sottovarietà è trasversa alle fibre se e solo se in ogni suo punto i vettori tangenti e verticali si riducono al vettore nullo, quindi se e solo se il sistema lineare omogeneo (12) ammette come unica soluzione quella nulla. Ciò equivale alla condizione $\det(\partial^k F_i) \neq 0$. ■

PROPOSIZIONE 4. Una sottovarietà $\Lambda \subset T^*Q$ di dimensione n è trasversa alle fibre se e solo se ammette (localmente) una rappresentazione parametrica del tipo

$$(13) \quad p_i = W_i(q^j),$$

cioè tale che i momenti (p_i) sono funzioni delle coordinate (q^j) di Q ⁽⁴⁾.

Dimostrazione. Ritornando alla proposizione precedente, si osserva che la verticale indipendenza delle funzioni (F_i) , equivalente alla trasversalità, equivale a sua volta alla risolubilità delle equazioni (1) rispetto alle (p_i) , quindi alla possibilità di scrivere delle equazioni del tipo (13). ■

È essenziale ai fini che ci siamo proposti il fatto che

PROPOSIZIONE 5. Le equazioni (13) definiscono una sottovarietà lagrangiana se e solo se la 1-forma su Q

$$(14) \quad W = W_i dq^i$$

⁽⁴⁾ Le (q^j) hanno dunque il ruolo di parametri.

è chiusa.

Dimostrazione. Si può utilizzare la Prop. 1. In questo caso è $u^h = q^h$ quindi la condizione di lagrangianità (5) diventa semplicemente

$$\partial_h p_k - \partial_k p_h = 0,$$

ovvero

$$\partial_h W_k - \partial_k W_h = 0,$$

cioè $dW = 0$. ■

OSSERVAZIONE 3. La chiusura della forma W equivale alla sua locale esattezza: per ogni punto di Q su cui W è definita esiste un intorno $U \subset Q$ ed una funzione $W: U \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $dW = W|_U$. Ciò significa che $W_i = \partial_i W$ quindi che le (13) assumono la forma

$$(15) \quad p_i = \frac{\partial W}{\partial q^i}.$$

Queste funzioni, che sulle intersezioni dei loro domini di definizione differiscono per delle costanti, si chiamano **funzioni generatrici** della sottovarietà lagrangiana Λ . Concludiamo pertanto che ogni sottovarietà lagrangiana trasversa alle fibre di T^*Q è generata (almeno localmente) da funzioni generatrici, le quali sono funzioni sopra la varietà delle configurazioni Q .

OSSERVAZIONE 4. Siamo ora in grado di dare una notevole interpretazione geometrica di integrale completo. Un'integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi di un'hamiltoniana H è la funzione generatrice di un

- (i) fogliettamento lagrangiano di T^*Q ,
- (ii) trasverso alle fibre,
- (iii) compatibile con H .

Per fogliettamento s'intende una partizione di un aperto V di T^*Q in sottovarietà. Per la condizione (i) queste sottovarietà sono lagrangiane; per la (ii) sono trasverse alle fibre. Con la (iii) s'intende che su ognuna di esse H è costante.

Infatti, per ogni prefissato valore dei parametri $a = (a_j)$, la funzione $W(q^i, a_j)$ definisce con le equazioni (10)₁₋₃ (ovvero (15)) una sottovarietà lagrangiana Λ_a trasversa alle fibre. La condizione di completezza

(11)-§3, assicurando la risolubilità delle suddette equazioni rispetto alle α , permette di affermare che per ogni punto di V passa una ed una sola di tali sottovarietà, perché le α vengono ad essere funzioni delle (q^i, p_j) ,

$$(16) \quad a_i = F_i(q^j, p_h).$$

Le sottovarietà lagrangiane costituiscono pertanto un fogliettamento. L'equazione di Hamilton-Jacobi (13)-§3 afferma infine che l'hamiltoniana H calcolata attraverso le suddette equazioni, per ogni prefissato valore delle α è costante ($= h$), vale a dire che $H|_{\Lambda_\alpha} = \text{costante}$ per ogni Λ_α .

Ciò detto, va ulteriormente osservato che le equazioni (16), essendo del tutto equivalenti alle (10)₁-§3, rappresentano ancora il fogliettamento lagrangiano. Allora le funzioni (F_i) sono in involuzione per la Prop. 2, nonché verticalmente indipendenti per la Prop. 3. Inoltre, per quanto visto nella dimostrazione della Prop. 2, i campi vettoriali (X_i) generati dalle funzioni (F_i) sono tangenti a ciascuna delle Λ_α , e siccome su queste H è costante segue

$$0 = \langle X_i, dH \rangle = \{F_i, H\}.$$

Dunque le (F_i) sono integrali primi di X_H . Concludiamo pertanto che *un fogliettamento lagrangiano trasverso compatibile con H è anche caratterizzato da un sistema di n integrali primi di X_H , in involuzione e verticalmente indipendenti*. Il legame tra i due tipi di rappresentazione ora descritto è proprio il contenuto della Prop. 5 del §4, che risulta pertanto dimostrata.

Osserviamo ancora a titolo di complemento, che la condizione che H sia costante sulle sottovarietà lagrangiane equivale alla tangenza del campo hamiltoniano X_H a queste. Per riconoscerlo basta osservare che

$$\langle X_H, dF_i \rangle = \{H, F_i\} = 0.$$

Possiamo allora anche affermare che la compatibilità del fogliettamento con H coincide con l'invarianza di ogni sottovarietà lagrangiana rispetto al flusso generato da X_H .

6. Varietà simplettiche e sistemi hamiltoniani integrabili

L'interpretazione geometrica di integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi suggerisce di collocare tutta la materia riguardante le

equazioni di Hamilton in un contesto più ampio, che vede sostituita la struttura di fibrato cotangente da una struttura più generale: quella di *varietà simplettica*.

DEFINIZIONE 1. Dicesi **varietà simplettica** una coppia (M, ω) costituita da una varietà differenziabile M e da una 2-forma ω su M , chiusa ($d\omega = 0$) e regolare, cioè tale che in ogni punto $p \in M$ vale l'implicazione $\omega(u, v) = 0, \forall u \in T_p M \Rightarrow v = 0$. Una 2-forma soddisfacente a queste condizioni prende il nome di **forma simplettica**.

Rappresentata ω in un qualunque sistema di coordinate (x^A) di M , $\omega = \frac{1}{2} \omega_{AB} dx^A \wedge dx^B$, la condizione di regolarità equivale a $\det(\omega_{AB}) \neq 0$. Pertanto, per l'antisimmetria della matrice delle componenti (ω_{AB}) , la dimensione di M è necessariamente pari $m = 2n$ (si veda l'Oss. 2 - §5).

OSSERVAZIONE 1. Un fibrato cotangente è una varietà simplettica. Infatti la forma simplettica canonica ω , essendo esatta perché definita come il differenziale della 1-forma fondamentale di Liouville, è chiusa. Inoltre essa è regolare per quanto visto nell'Oss. 1 - §1. Esistono però varietà simplettiche che non sono fibrati cotangenti. Si consideri per esempio una qualunque superficie bidimensionale compatta immersa nello spazio affine euclideo ed orientabile (per esempio una sfera). La forma $\sigma = *N$ aggiunta di un campo N di versori ortogonali alla superficie, cioè l'elemento d'area della superficie (Oss. 5 - §12 - Cap. II), è una 2-forma regolare. Siccome $d\sigma$ è una 3-forma, essa è identicamente nulla (perché la varietà ha dimensione 2). Pertanto l'elemento d'area è una forma simplettica. Certamente una tale superficie non può identificarsi con un fibrato cotangente tramite un diffeomorfismo (che per giunta trasformi la forma volume nella forma simplettica canonica) per il semplice motivo che i fibrati cotangenti non sono compatti.

Le definizioni di campo vettoriale hamiltoniano (quindi di sistema dinamico hamiltoniano), di parentesi di Poisson e di sottovarietà lagrangiana, viste per i fibrati cotangenti, si estendono immediatamente alle varietà simplettiche. Infatti esse richiedono l'intervento della sola forma simplettica ω (si vedano, rispettivamente, l'equazione (1)-§3 per i campi hamiltoniani, la formula (3) o la (4) del §4 per le parentesi di Poisson e infine la Def. 1 - §5 per le sottovarietà lagrangiane). Le condizioni di regolarità e di chiusura imposte ad ω sono poi indispensabili per estendere

alle varietà simplettiche le proprietà fondamentali di questi oggetti. Si può infatti dimostrare che la regolarità di ω equivale alla regolarità delle parentesi di Poisson e che la chiusura di ω equivale all'identità di Jacobi. Inoltre resta valida la proprietà che una sottovarietà rappresentata da n equazioni indipendenti $F_i = 0$ è lagrangiana se e solo se le funzioni (F_i) sono in involuzione (Prop. 2 - §5).

In questo contesto si colloca il **teorema di Darboux** (Gaston Darboux, 1842 - 1917) il quale afferma che, assegnata una forma simplettica ω su M , allora nell'intorno di ogni punto di M esistono delle **coordinate canoniche** (q^i, p_j) per cui si ha

$$(1) \quad \omega = dp_i \wedge dq^i.$$

Pertanto in queste coordinate le equazioni differenziali del primo ordine di un campo hamiltoniano X_H sono ancora le equazioni di Hamilton (8)-§1 e le parentesi di Poisson sono ancora esprimibili con la formula (2)-§4.

Nel contesto più generale delle varietà simplettiche il teorema di Jacobi e il parallelo teorema di Liouville, formulati e dimostrati per i fibrati cotangenti, perdono in tutto o in parte il loro significato. Infatti, sebbene la Def. 1 - §5 di sottovarietà lagrangiana richieda solo l'uso della forma simplettica e sia quindi senz'altro estendibile alle varietà simplettiche, viene però a decadere il concetto di trasversalità, proprio dei fibrati cotangenti, concetto usato sistematicamente (insieme a quello di verticale indipendenza) sia per la formulazione del teorema di Jacobi sia per la dimostrazione del teorema di Liouville.

Tuttavia per i sistemi hamiltoniani sulle varietà simplettiche il teorema di integrabilità di Liouville, opportunamente riformulato, assume un notevole significato geometrico globale. Si tratta del fondamentale **teorema di Arnold-Liouville** (Vladimir Iliic Arnold (1937), Istituto Steklov, Mosca) relativo ai **sistemi hamiltoniani integrabili**.

DEFINIZIONE 2. Un sistema hamiltoniano (M, ω, H) , generato da una funzione H sopra una varietà simplettica (M, ω) di dimensione $2n$, si dice **integrabile** se ammette un sistema di n integrali primi indipendenti ed in involuzione $(F_i)^{(1)}$.

⁽¹⁾ Uno di questi può essere la stessa hamiltoniana H . Questa definizione si estende anche al caso in cui i punti in cui gli integrali primi non sono indipendenti formano un insieme chiuso Ω (eventualmente di misura nulla) detto **insieme critico**.

TEOREMA. Se un sistema hamiltoniano è integrabile allora le equazioni $F_i = a_i$ ($=$ costante) definiscono un fogliettamento lagrangiano (Λ_a) a cui X_H è tangente. Se i campi hamiltoniani generati dalle (F_i) sono completi⁽²⁾, allora ogni Λ_a è diffeomorfa a $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{T}_k$ con $0 \leq k \leq n$.⁽³⁾ Secondo tale diffeomorfismo su ogni Λ_a la restrizione del campo X_H è un **campo quasi-periodico**.

La prima parte dell'enunciato è un'immediata estensione alle varietà simplettiche di quanto visto all'Oss. 4 del § precedente.

La seconda parte, la cui dimostrazione è materia di corsi superiori, fonda la sua importanza sul significato di campo quasi periodico. Si ricordi che il toro $\mathbb{T}_k$ è il quoziente di $\mathbb{R}^k$ rispetto a $\mathbb{Z}^k$. Si consideri ora su $\mathbb{R}^n$ un campo vettoriale costante $\bar{X}$ di componenti $(\omega_i) \in \mathbb{R}^n$. Per effetto del quozientamento rispetto a $\mathbb{Z}^k$ che riduce $\mathbb{R}^n$ alla varietà $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{T}_k$, questo campo si riduce ad un campo X . Un campo siffatto si dice **quasi-periodico**. È particolarmente interessante il caso $k = n$, cioè il caso in cui le varietà lagrangiane Λ_a sono dei tori. In questo caso le componenti (ω_i) , che sono costanti su ogni toro ma che variano da toro a toro (sono funzioni delle (a_i)), prendono il nome di **frequenze**.

Per comprendere la ragione di questi termini conviene porsi nel caso di $n = 2$ (toro bidimensionale). Si vede facilmente che se le frequenze (ω_1, ω_2) sono commensurabili, cioè soddisfano ad un'uguaglianza del tipo $z^1 \omega_1 + z^2 \omega_2 = 0$ con (z^1, z^2) interi, allora le curve integrali di X sono periodiche. Si può invece dimostrare che in caso contrario le curve integrali sono **dense** sul toro: ciò significa che considerata una qualunque curva integrale massimale⁽⁴⁾ $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}_2$ per ogni prefissato punto $p \in \mathbb{T}_2$ e per ogni suo intorno U esiste almeno un $t_* \in \mathbb{R}$ tale che $\gamma(t_*) \in U$. In altri termini una curva integrale passa vicino quanto si vuole ad un qualunque punto prefissato. Il teorema di Arnold-Liouville fornisce pertanto una notevole descrizione qualitativa del comportamento delle curve integrali dei sistemi hamiltoniani integrabili.

⁽²⁾ Ipotesi senz'altro soddisfatta se le Λ_a sono compatte

⁽³⁾ Si ha necessariamente $\Lambda \simeq \mathbb{T}_n$, se la sottovarietà lagrangiana è compatta.

⁽⁴⁾ Essendo il toro una varietà compatta ogni suo campo vettoriale è completo.

LA MECCANICA DI EINSTEIN

(Meccanica Relativistica)

*Le equazioni del campo elettromagnetico di Maxwell prescrivono per le onde elettromagnetiche nel vuoto una velocità di propagazione costante. Questa velocità risulta essere indipendente dalla scelta del riferimento, in evidente contrasto con la meccanica classica e la legge di composizione delle velocità. Le soluzioni proposte nel 1904 dal fisico Hendrik Antoon Lorentz (Arnhem 1853 - Haarlem 1928) e dal matematico Jules Henri Poincaré (Nancy 1854 - Parigi 1912) per superare questo contrasto, soluzioni basate su di una radicale modifica dei concetti primitivi di tempo e di spazio, vengono nel 1905 raccolte, rielaborate e sintetizzate da Albert Einstein (Ulm 1879 - Princeton 1955) in elementari ma, per quel tempo, rivoluzionari principi per una nuova meccanica. Tre anni dopo, Hermann Minkowski (Alexotas, Lituania 1864 - Gottin-
ga 1909) mostra come questi principi possano tradursi in una nitida e semplice struttura geometrica: lo spazio-tempo di Minkowski.*

1. Lo spazio-tempo di Minkowski

La meccanica classica (o newtoniana) postula con il **principio d'inerzia** l'esistenza di un tempo assoluto e di una classe particolare di riferimenti (i riferimenti inerziali o galileiani) e con il **principio di relatività** l'invarianza delle leggi meccaniche rispetto alla scelta di tali riferimenti. Questi principi si traducono nell'assioma che tutte le leggi della meccanica devono avere una formulazione assoluta, cioè indipendente dalla scelta del riferimento, nell'insieme degli eventi. Quest'insieme, detto **spazio-tempo di Newton**, è dotato di una struttura affine a quattro dimensioni. I moti inerziali, cioè i moti dei punti liberi e non soggetti a sollecitazioni, sono rappresentati da rette ed il tempo assoluto

definisce un fogliettamento di sottospazi affini tridimensionali di eventi contemporanei.

La meccanica relativistica (o einsteiniana) accetta ancora il principio dell'esistenza dei riferimenti inerziali ed il principio di relatività, ma estendendo quest'ultimo anche ai fenomeni elettromagnetici, abbandona l'idea di un tempo assoluto. All'invarianza rispetto alla scelta del riferimento dell'intervallo temporale $t(P) - t(O)$ di due eventi (O, P) viene sostituita l'invarianza della quantità

$$(1) \quad \|OP\| = |OP|_s^2 - c^2 |OP|_t^2,$$

detta **intervallo spazio-temporale**. Qui il simbolo $|OP|_s$ indica la **distanza spaziale relativa** al riferimento dei due eventi e il simbolo $|OP|_t = t(P) - t(O)$ il loro **intervallo temporale relativo**. Inoltre c è una **costante universale** (la velocità della luce nel vuoto). Più precisamente, se in due riferimenti (o laboratori) inerziali diversi $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ si misurano con strumenti dello stesso tipo distanze spaziali s ed s' e tempi relativi t e t' rispettivamente, allora si ha

$$\begin{aligned} |OP|_t &= |OP|_{t'} && \text{in meccanica newtoniana,} \\ |OP|_s^2 - c^2 |OP|_t^2 &= |OP|_{s'}^2 - c^2 |OP|_{t'}^2 && \text{in meccanica einsteiniana.} \end{aligned}$$

Assunta anche per lo spazio-tempo M della meccanica einsteiniana una struttura di spazio affine a quattro dimensioni, l'intervallo spazio-temporale (1) può essere interpretato come *norma* del vettore OP secondo un opportuno tensore metrico (o prodotto scalare). Infatti un riferimento inerziale $\mathcal{R}$ può essere caratterizzato da tre assi cartesiani ortonormali (x, y, z) , di origine un punto O e versori (i, j, k) , e da un tempo relativo t segnato da un orologio che possiamo pensare puntiforme e posto nell'origine O degli assi. Questi dati si traducono nello spazio affine M in un sistema di coordinate cartesiane (t, x, y, z) aventi origine nell'evento O coincidente con l'istante $t = 0$ segnato dall'orologio posto nell'origine e corrispondenti ad una base (c, i, j, k) . Considerato quindi un generico altro evento $P \in M$, del vettore OP sussiste la rappresentazione

$$(2) \quad OP = t c + x i + y j + z k.$$

Risulta allora conveniente introdurre sullo spazio affine M la metrica univocamente determinata dalla condizione di ortogonalità dei quattro vettori della base,

$$i \cdot j = i \cdot k = i \cdot c = j \cdot k = j \cdot c = k \cdot c = 0,$$

e dalle condizioni di normalizzazione⁽¹⁾

$$(3) \quad \|i\| = \|j\| = \|k\| = 1, \quad \|c\| = -c^2.$$

In tal caso si ha infatti

$$(4) \quad \|OP\| = OP \cdot OP = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2,$$

da cui segue l'espressione (1), posto che

$$(5) \quad |OP|_s^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad |OP|_t^2 = t^2.$$

La metrica così introdotta è di segnatura $(-+++)$, cioè iperbolica. Va osservato che nelle precedenti considerazioni è del tutto indifferente la scelta dei versori ortogonali (i, j, k) purché essi siano ortogonali al vettore c . Possiamo allora tradurre l'assioma dell'invarianza dell'intervallo spazio-temporale nel seguente principio:

PRINCIPIO I. Lo spazio-tempo M della relatività ristretta (o **spazio di Minkowski**) è uno spazio affine iperbolico a quattro dimensioni. Un riferimento inerziale $\mathcal{R}$ è individuato da un vettore del genere tempo c la cui norma è per convenzione pari a $-c^2$.

OSSERVAZIONE 1. Un qualunque riferimento cartesiano ortonormale $(O; c, i, j, k)$ prende il nome di **riferimento cartesiano adattato** al riferimento $\mathcal{R}$. Le corrispondenti coordinate $(O; t, x, y, z)$ si dicono quindi **adattate** al riferimento.

Resta da precisare il comportamento delle storie delle particelle.

DEFINIZIONE 1. Per **storia di una particella** s'intende una curva nello spazio-tempo, di classe C^1 almeno, di rappresentazione vettoriale parametrica

$$(6) \quad OP = R(\tau),$$

⁽¹⁾ In queste lezioni chiamiamo **norma** di un vettore v il numero $\|v\| = v \cdot v$. Un vettore v è detto del **genere tempo** o del **genere spazio** se la sua norma è negativa o rispettivamente positiva. Se è nulla, il vettore si dice del **genere luce** o **isotropo** (si veda il §12 - Cap. I). Questa terminologia troverà giustificazione nel seguito.

con τ parametro opportuno, detto **tempo proprio**, interpretabile come orologio posseduto dalla particella medesima. Il vettore tangente, vale a dire la derivata della curva rispetto al tempo proprio, è la **velocità assoluta**:

$$(8) \quad \boxed{V = \frac{dR}{d\tau}}$$

Fissato un riferimento $(O; c, i, j, k)$, si consideri la seguente **decomposizione relativa** del vettore posizione

$$(7) \quad \boxed{R = r + t c, \quad (r = x i + y j + z k)}$$

Si noti che nella (7) il vettore r , che rappresenta la **posizione relativa** al riferimento del punto P , è ortogonale al vettore c :

$$r \cdot c = 0.$$

Se si pensa R funzione del tempo proprio attraverso il tempo relativo t , si trova

$$V = \frac{dR}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \left(\frac{dr}{dt} + c \right),$$

cioè

$$(9) \quad \boxed{V = \gamma (v + c)}$$

posto

$$(10) \quad \boxed{v = \frac{dr}{dt}}$$

e

$$(11) \quad \boxed{\gamma = \frac{dt}{d\tau}}$$

Il vettore v è la **velocità relativa** al riferimento $\mathcal{R}$ della particella. Lo scalare γ prende il nome di **fattore di Lorentz**. Si noti che nella (9)

il vettore velocità relativa $\mathbf{v}$ è ortogonale al vettore $\mathbf{c}$ ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{c} = 0$) e che quindi

$$(12) \quad \boxed{\gamma = -\frac{1}{c^2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{c}}$$

La formula (9) rappresenta la **decomposizione relativa** della velocità assoluta. Sul concetto di decomposizione relativa si ritornerà più avanti (Def. 2, §2).

Si osserva dalla (7) che se la particella è in quiete nel riferimento considerato (cioè se $\mathbf{r}$ è costante) la sua storia è una retta parallela al vettore $\mathbf{c}$. Possiamo allora precisare la natura del tempo proprio di una particella assumendo in maniera del tutto naturale che:

PRINCIPIO II. Il tempo proprio di una particella in quiete in un riferimento inerziale coincide (modulo una costante) col tempo relativo a quel riferimento.

Dalla (11) si vede che in questo caso è identicamente $\gamma = 1$. Più in generale:

PROPOSIZIONE 1. Se in un evento della sua storia una particella ha velocità nulla rispetto al riferimento $\mathcal{R}$ allora in corrispondenza a quell'evento si ha $\gamma = 1$.

Dimostrazione. Si supponga che in corrispondenza ad un suo evento, per esempio quello corrispondente a $\tau = 0$, la particella sia in quiete rispetto ad un riferimento $\mathcal{R}$. Possiamo allora pensare di mantenere in quiete tale particella anche per tutti i valori $\tau > 0$ del tempo proprio. Per una tale storia si ha, tenuto conto del Principio II e vista la (11), $\gamma = 1$ per ogni $\tau > 0$ e quindi per continuità anche $\gamma = 1$ per $\tau = 0$. ■

Ciò posto, diciamo che una particella è una **particella materiale** se per ogni evento della sua storia esiste un riferimento in cui essa è istantaneamente in quiete. Il concetto di particella materiale sarà meglio precisato nel seguito. Osserviamo però subito che nell'interpretazione particellare della luce una particella luminosa, o **fotone**, non soddisfa a questa proprietà; si assume infatti che nel vuoto un fotone abbia sempre velocità scalare pari alla costante c rispetto ad un qualunque riferimento (si veda l'Oss. 5 più avanti).

Dalla (9), tenuto conto delle (3) e del fatto che $\mathbf{v} \cdot \mathbf{c} = 0$, segue che per una generica particella (anche non materiale) vale in un qualunque riferimento inerziale l'uguaglianza

$$(13) \quad \|\mathbf{V}\| = \gamma^2 (v^2 - c^2).$$

Nell'ipotesi che la particella sia materiale, se si fissa un evento della sua storia e si considera il riferimento in cui essa è istantaneamente in quiete allora in quell'evento è $\gamma = 1$ e $v = 0$, per cui dalla formula generale (13) si trae

$$(14) \quad \boxed{\|\mathbf{V}\| = -c^2}$$

Ma nella semplice formula (14) non vi è traccia né dell'istante considerato né del riferimento. Sia a primo che a secondo membro compaiono solo delle entità assolute. Essa è allora una condizione assoluta. Si noti che la (14) mostra in particolare che la velocità assoluta $\mathbf{V}$ di una particella è del genere tempo. Si può pertanto affermare che:

PROPOSIZIONE 2. La storia di una particella materiale è una **curva del genere tempo** (cioè tale che in ogni suo punto il vettore tangente è del genere tempo) ed il tempo proprio è quel parametro, definito a meno di una costante additiva, per cui la velocità assoluta definita dalla (8) soddisfa alla condizione (14), chiamata **condizione di normalizzazione**.

OSSERVAZIONE 2. Occorre aggiungere un'ulteriore convenzione: che tutte le particelle abbiano velocità assolute **ortocrone**, appartengano cioè all'interno di una medesima falda del cono di luce dello spazio vettoriale soggiacente, che chiamiamo **futuro** e denotiamo con T^+ . Ciò significa che due velocità assolute (di due particelle), oltre alla condizione (14), soddisfano anche alla **condizione di ortocronismo** (si veda il §12 - Cap. I)

$$(15) \quad \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 < 0.$$

Dalla formula generale (9) si vede che le particelle costituenti un riferimento inerziale (sono tutte le particelle in quiete rispetto a tale riferimento) hanno velocità assoluta uguale a $\mathbf{c}$. Dalla convenzione di ortocronismo segue allora per la velocità assoluta di ogni particella la condizione $\mathbf{V} \cdot \mathbf{c} < 0$. Di qui, per la (12), si trae $\gamma > 0$.

Siamo ora in grado di stabilire l'espressione del fattore di Lorentz γ .

PROPOSIZIONE 3. Per ogni particella materiale è

$$(16) \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

dove v è la velocità scalare relativa al riferimento inerziale scelto.

Dimostrazione. Dalla combinazione della (13) con la condizione di normalizzazione (14) segue subito

$$\gamma^2 (c^2 - v^2) = c^2$$

e quindi la (16), posto che $\gamma > 0$. ■

OSSERVAZIONE 3. Dalla relazione precedente segue anche la notevole limitazione

$$(17) \quad v < c$$

imposta alle velocità scalari relative delle particelle materiali. Si vede inoltre dalla (16) che

$$(18) \quad \gamma \geq 1$$

avendosi $\gamma = 1$ solo per gli eventi di istantanea quiete relativa al riferimento.

OSSERVAZIONE 4. **Il paradosso dei gemelli.** Si noti bene che il tempo relativo ad un riferimento è una funzione reale definita su tutto lo spazio-tempo, $t: M \rightarrow \mathbb{R}$, e che invece il tempo proprio di una particella può essere visto come una funzione reale lungo la storia di questa. Dalla (11) e dalla (18) segue che

$$\frac{dt}{d\tau} \geq 1.$$

Ciò mostra che lungo la storia di una particella non in quiete rispetto ad un riferimento inerziale $\mathcal{R}$ il tempo relativo al riferimento cresce più

rapidamente del tempo proprio della particella. Una conseguenza è che al ritorno sulla Terra, dopo un viaggio interplanetario di lunga durata e ad alta velocità, un astronauta risulta essere più giovane del fratello gemello rimasto sul pianeta: il suo orologio, sincronizzato al momento della partenza con un orologio di egual tipo posseduto dal gemello, segna un tempo trascorso $\Delta\tau$ pari a

$$\Delta\tau = \frac{1}{\gamma} \Delta t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t$$

dove Δt è il tempo trascorso sulla Terra. Si suppone, per la validità di questa formula, che il viaggio avvenga a velocità scalare costante v rispetto al riferimento inerziale definito dal sistema solare, nel quale la Terra si muove con velocità decisamente trascurabile rispetto a quella della luce. Nel caso di una velocità pari a $v = \frac{c}{10} = 30.000 \text{ Km/sec}$ il fattore di Lorentz è di circa $\gamma = 1,005$ e quindi $\gamma^{-1} = 0,99498$ circa. Se l'intervallo di tempo Δt è di 50 anni (~ 18.262 giorni) la differenza con $\Delta\tau$ è comunque soltanto di ~ 91 giorni. L'andamento del fattore di Lorentz è illustrato in Fig. 1.1.

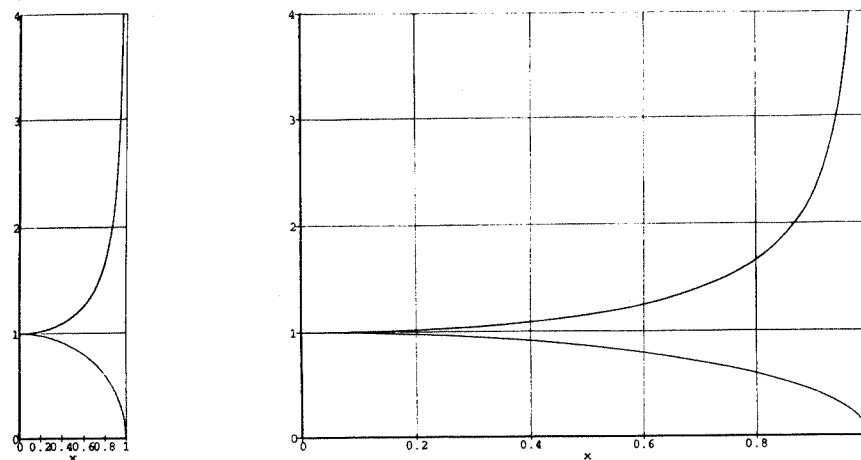


Fig. 1.1: il fattore di Lorentz γ (grafico superiore) e la funzione inversa γ^{-1} (graf. inferiore), con $x = \frac{v}{c}$ (a destra con asse x dilatato).

OSSERVAZIONE 5. Consideriamo infine brevemente il caso di un fotone, cioè di una particella non materiale la cui velocità relativa ad un qualunque riferimento è sempre pari a c . Dalla (13) si vede che la condizione $v = c$ è soddisfatta in ogni riferimento inerziale se e solo se la velocità assoluta è un **vettore isotropo**,

$$(19) \quad \|V\| = 0,$$

cioè se e solo se la storia è una **curva isotropa**. In tal caso svanisce la nozione di tempo proprio come parametro privilegiato.

OSSERVAZIONE 6. Si supponga che l'evento O di cui alle precedenti considerazioni corrisponda all'accensione di una lampada puntiforme posta nell'origine degli assi al tempo $t = 0$. Si consideri un secondo evento P posto sul fronte d'onda luminoso al tempo generico t . Il fronte d'onda è una sfera centrata nell'origine e di raggio ct , dove c è la velocità della luce. Esso ha quindi equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0.$$

Nello spazio-tempo questa è l'equazione di un cono di vertice l'origine e asse l'asse t . Questo cono è il luogo degli eventi P che stanno sui vari fronti d'onda, perciò prende il nome di **cono di luce dell'evento O** . Segue dalla (4) che l'intervallo spazio-temporale tra l'evento O ed il generico evento P sul fronte d'onda è nullo:

$$(20) \quad \|OP\| = 0.$$

Il vettore OP è cioè isotropo. Si noti che questa è una condizione assoluta, cioè indipendente dal riferimento, per l'assioma dell'invarianza dell'intervallo spazio-temporale. Si osservi inoltre che ogni retta generatrice del cono rappresenta un *raggio di luce* emesso dall'evento O e che quindi la condizione (20) caratterizza quelle coppie di eventi che stanno su di un medesimo raggio di luce. Pertanto: nello spazio-tempo i raggi luminosi nel vuoto sono rappresentate da **rette isotrope**.

2. Il tempo relativo

Possiamo ora precisare meglio la nozione di riferimento e di tempo relativo. Un *riferimento fisico* $\mathcal{R}$ è identificabile con un insieme continuo di particelle materiali ideali invadente tutto o in parte l'universo. Le storie di queste particelle vengono a formare nello spazio-tempo M una *congruenza di curve*, cioè un fascio di curve non intersecantisi, ricoprenti M in tutto o in parte. I vettori velocità assoluta di queste particelle definiscono pertanto un campo vettoriale X su M soddisfacente alla condizione di normalizzazione

$$(1) \quad \|X\| = -c^2.$$

Possiamo allora assumere come definizione che: un *riferimento* è un *campo vettoriale X soddisfacente alla (1)*. Le curve integrali di X sono le storie delle particelle del riferimento. In particolare abbiamo che un *riferimento* è *inerziale* se e solo se X è *costante*. Infatti questa condizione è verificata se e solo se tutte le particelle del riferimento hanno storie rettilinee. Nel caso di un riferimento inerziale si ha, in conformità con il Principio I, $X = c$, inteso il vettore c come campo vettoriale costante sullo spazio-tempo.

Diamo ora la generale definizione di tempo relativo ad un riferimento.

DEFINIZIONE 1. Il tempo relativo ad un riferimento X è una funzione $t: M \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$(2) \quad \boxed{dt = -\frac{1}{c^2} \xi, \quad \xi = X^b}$$

Questa definizione ha senso perché, essendo lo spazio-tempo dotato di un tensore metrico, ad ogni campo vettoriale X corrisponde una 1-forma $\xi = X^b$ tale che per ogni vettore u

$$(3) \quad \langle u, \xi \rangle = u \cdot X.$$

Naturalmente affinché esista la funzione t , nel qual caso essa è definita modulo una costante, è necessario e sufficiente che la 1-forma ξ sia chiusa (lemma di Poincaré: si osservi che M è identificabile con $\mathbb{R}^4$):

$$(4) \quad d\xi = 0.$$

Questa condizione è senz'altro soddisfatta se $\mathbf{X}$ è costante, cioè se il riferimento è inerziale.

Le proposizioni seguenti mostrano che la nozione di tempo relativo ora introdotta è coerente con quella già utilizzata nei ragionamenti precedenti.

PROPOSIZIONE 1. Lungo le storie delle particelle del riferimento il tempo relativo t coincide col tempo proprio τ (modulo una costante).

Dimostrazione. Si ha successivamente, in base alle precedenti definizioni:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= \langle \mathbf{X}, dt \rangle = -\frac{1}{c^2} \langle \mathbf{X}, \boldsymbol{\xi} \rangle \\ &= -\frac{1}{c^2} \mathbf{X} \cdot \mathbf{X} = 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

PROPOSIZIONE 2. Le varietà di contemporaneità $t = \text{costante}$ sono ortogonali al campo $\mathbf{X}$ cioè alle storie delle particelle del riferimento. Esse sono varietà tridimensionali riemanniane, con metrica definita positiva.

Dimostrazione. Ogni vettore $\mathbf{u}$ tangente ad una superficie $t = \text{costante}$ è caratterizzato dalla condizione $\langle \mathbf{u}, dt \rangle = 0$ che per la (2) e la (3) equivale a $\mathbf{u} \cdot \mathbf{X} = 0$. Per dimostrare la seconda parte della proposizione basta ricordare che in uno spazio vettoriale iperbolico un sottospazio ortogonale ad un vettore del genere tempo è strettamente euclideo. ■

PROPOSIZIONE 3. Se il riferimento rappresentato dal campo $\mathbf{X}$ è inerziale allora il tempo relativo definito dalla (2) è tale che per ogni coppia (O, P) di eventi vale l'uguaglianza

$$(5) \quad \boxed{t(P) - t(O) = -\frac{1}{c^2} OP \cdot \mathbf{X}}$$

Gli spazi affini tridimensionali ortogonali a $\mathbf{X}$ sono strettamente euclidei e rappresentano gli insiemi degli eventi contemporanei rispetto al tempo relativo t .

Dimostrazione. Si consideri un qualunque sistema di coordinate cartesiane (x^α) ($\alpha = 0, 1, 2, 3$). Per $\boldsymbol{\xi}$ sussiste la rappresentazione

$$\boldsymbol{\xi} = \xi_\alpha dx^\alpha,$$

con le componenti ξ_α costanti. Si consideri su M la funzione

$$t = -\frac{1}{c^2} \xi_\alpha x^\alpha.$$

Differenziando si trova

$$dt = -\frac{1}{c^2} \xi_\alpha dx^\alpha = -\frac{1}{c^2} \boldsymbol{\xi},$$

quindi t è un tempo relativo. Inoltre, per ogni coppia di eventi (O, P) ,

$$t(P) - t(O) = -\frac{1}{c} \xi_\alpha (x^\alpha(P) - x^\alpha(O)) = -\frac{1}{c} \langle OP, \boldsymbol{\xi} \rangle$$

e la (5) è soddisfatta. La seconda parte è conseguenza diretta della proposizione precedente. ■

OSSERVAZIONE 1. Per i riferimenti inerziali nello spazio-tempo di Minkowski si possono ripetere considerazioni analoghe a quelle svolte per i riferimenti inerziali nello spazio-tempo di Newton. (i) Le storie delle particelle costituenti un riferimento inerziale $\mathcal{R}$ (definito da un vettore $\mathbf{c}$) formano un fascio di rette parallele (al vettore $\mathbf{c}$). (ii) Le varietà M_s costituite dagli eventi contemporanei ($t = s$) nel tempo relativo a quel riferimento sono gli spazi affini tridimensionali euclidei ortogonali a $\mathbf{c}$ (Prop. 3). (iii) L'insieme $M_{\mathcal{R}}$ delle rette del fascio è uno spazio affine euclideo tridimensionale rappresentante l'universo osservato dal riferimento $\mathcal{R}$. (iv) Lo spazio-tempo di Minkowski risulta così identificabile nel prodotto di due spazi affini euclidei: $M \simeq M_{\mathcal{R}} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Appare evidente dalle considerazioni precedenti, in particolare dall'osservazione (iii), che la contemporaneità degli eventi è un concetto relativo, non assoluto. Questo fatto è discusso nei dettagli più avanti (Prop. 5).

Nella discussione che segue si considerano solo riferimenti inerziali. Un riferimento sarà quindi identificato con un vettore $\mathbf{c} \in T^+$ e norma uguale a $-c^2$.

DEFINIZIONE 2. Diciamo **decomposizione relativa** ad un riferimento $\mathbf{c}$ di un vettore $\mathbf{U}$ nello spazio tempo la scrittura

$$(6) \quad \mathbf{U} = \mathbf{u} + \alpha \mathbf{c},$$

dove u è ortogonale a c :

$$u \cdot c = 0.$$

Il vettore u prende il nome di **parte** o **componente spaziale** di U relativa a c , lo scalare α di **componente temporale**. In generale un vettore ortogonale a c si dice **vettore spaziale** rispetto al riferimento. Si denoterà con $\mathcal{S}_c$ lo spazio (tridimensionale, strettamente euclideo) dei vettori ortogonali a c , cioè dei vettori spaziali rispetto a c .

Nel § precedente sono già state esaminate le decomposizioni relative di una storia e di una velocità assoluta.

Si consideri ora la decomposizione relativa di un **intervallo assoluto** OP di due eventi di M . Si ponga cioè

$$(7) \quad OP = r + \theta c, \quad r \cdot c = 0.$$

Il vettore r è l'**intervallo spaziale relativo** al riferimento c , lo scalare θ è l'**intervallo temporale relativo**. Infatti, moltiplicando scalarmente la (7) per c si trova $OP \cdot c = -\theta c^2$ e quindi per la (2),

$$(8) \quad \theta = -\frac{1}{c^2} OP \cdot c = t(P) - t(O).$$

Se $r = 0$ i due eventi O e P sono **spazialmente coincidenti**, avvengono cioè nel medesimo luogo rispetto al riferimento. Se $\theta = 0$ allora essi sono **contemporanei** rispetto al riferimento. Se $\theta > 0$, cioè se $t(P) > t(O)$, si dice che P segue (o è successivo a) O nella cronologia determinata dal riferimento. Consideriamo i casi in cui l'intervallo assoluto OP è del genere tempo oppure del genere spazio.

PROPOSIZIONE 4. Se OP è del genere tempo ed orientato verso il futuro ($OP \in T^+$) allora esiste un riferimento in cui i due eventi avvengono nel medesimo luogo e inoltre l'evento P è successivo a O in ogni riferimento (si dice che P appartiene al **futuro assoluto** di O).

Dimostrazione. Si può porre $OP = \theta c$ con $c \in T^+$, $\|c\| = -c^2$ e $\theta > 0$. Allora c definisce un riferimento inerziale in cui $r = 0$, nel quale cioè gli eventi occorrono nel medesimo luogo. Per ogni altro riferimento c' si ha, tenuto conto della (8),

$$\theta' = t'(P) - t'(O) = -\frac{1}{c'^2} OP \cdot c' = -\frac{1}{c^2} \theta c \cdot c' > 0$$

essendo $\theta > 0$ e $c \cdot c' < 0$ per l'ipotesi di ortocronismo dei vettori rappresentanti i riferimenti. Ciò prova che P segue O in ogni riferimento. ■

PROPOSIZIONE 5. Se OP è del genere spazio allora esiste un riferimento rispetto al quale gli eventi O e P sono contemporanei. La relazione temporale tra i due eventi dipende dal riferimento: a seconda della scelta di questo l'evento P può precedere o essere contemporaneo o seguire l'evento O .

Dimostrazione. Se OP è del genere spazio esiste certamente un vettore del genere tempo ad esso ortogonale, quindi un riferimento c tale che $OP \cdot c = 0$. Quindi rispetto al riferimento c i due eventi sono contemporanei. Nel 2-piano iperbolico generato dai vettori OP e c si può sempre scegliere un vettore c' rappresentante un riferimento, quindi tale che $c \cdot c' < 0$ e $\|c'\| = c^2$, tale da soddisfare alla condizione $OP \cdot c' < 0$, così come se ne può scegliere un altro c'' tale che $OP \cdot c'' > 0$. ■

Nella Fig. 2.1 le linee tratteggiate rappresentano il fogliettamento M''_s ortogonale a c'' degli eventi contemporanei secondo questo riferimento; quelle a punto e tratto rappresentano il fogliettamento M'_s ortogonale a c' . Seguendo il fogliettamento M'_s con s crescente si osserva che O precede P nella cronologia relativa a c' . Seguendo invece il fogliettamento M''_s si osserva che O segue P .

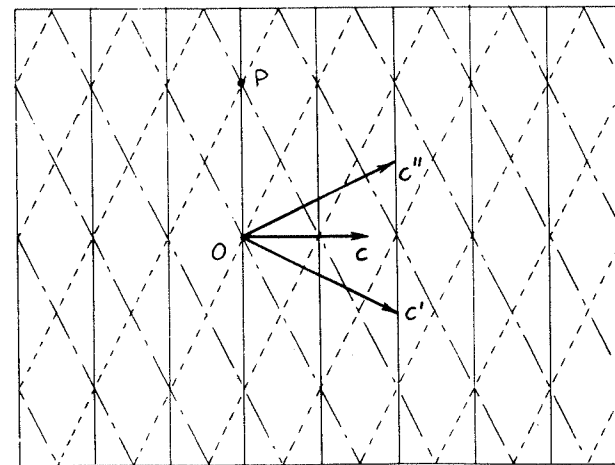


Fig. 2.1

In questo secondo caso, la circostanza che i due eventi (O, P) possano avere relazione cronologica invertita a seconda della scelta del riferimento può suscitare perplessità per la possibile esistenza di una relazione di causa-effetto tra gli eventi stessi. Una tale relazione è tuttavia impossibile se si assume il seguente **principio di causalità**: due eventi (O, P) sono in relazione di causa-effetto se e solo se sono connessi da storie, cioè da archi di curve del genere tempo. Da questo principio, del tutto ragionevole, segue che se due eventi O e P sono collegati da storie allora il vettore OP è necessariamente del genere tempo e quindi, per la Prop. 4, vi è una relazione cronologica assoluta fra i due eventi. Sia infatti $\sigma: I \rightarrow M$ una curva del genere tempo tale che $O = \sigma(\tau_0)$ e $P = \sigma(\tau_1)$ con $\tau_1 > \tau_0$. Allora, posto che la velocità assoluta $V(\tau)$ è il vettore derivata prima della curva, si ha

$$OP = \sigma(\tau_1) - \sigma(\tau_0) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} V(s) ds.$$

D'altra parte la somma di due vettori V_1 e V_2 del genere tempo ed entrambi orientati nel futuro è ancora un vettore del genere tempo ed orientato nel futuro⁽¹⁾. Quindi anche l'integrale precedente dà luogo ad un vettore del genere tempo orientato nel futuro. Alla stessa conclusione si giunge se O e P sono congiunti da più storie: l'evento P appartiene al futuro assoluto di O , cioè sta all'interno del cono di luce originato in O (Fig. 2.2).

⁽¹⁾ Infatti, essendo $\|V_1\| < 0$, $\|V_2\| < 0$ perché i vettori sono del genere tempo e $V_1 \cdot V_2 < 0$ perché i vettori sono ortocroni, risulta

$$\|V_1 + V_2\| = \|V_1\| + \|V_2\| + 2V_1 \cdot V_2 < 0,$$

e quindi $V_1 + V_2$ è del genere tempo. Inoltre

$$(V_1 + V_2) \cdot V_1 = \|V_1\| + V_1 \cdot V_2 < 0.$$

Ciò mostra che $V_1 + V_2$ è ortocrono a V_1 e quindi ancora orientato nel futuro.

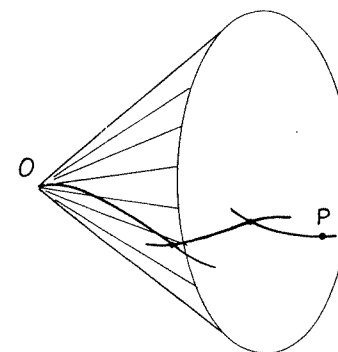


Fig. 2.2

3. Le trasformazioni di Lorentz

Si considerino nello spazio-tempo di Minkowski due riferimenti inerziali $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$, determinati dai vettori c e c' . Questi vettori rappresentano le velocità assolute delle particelle inerziali dei rispettivi riferimenti. Si può allora considerare la decomposizione relativa a c della velocità assoluta c' ponendo, in analogia con la (9), la (12) e la (16) del §1,

$$(1) \quad c' = \rho(u + c), \quad u \cdot c = 0$$

dove

$$(2) \quad \rho = -\frac{1}{c^2} c' \cdot c = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

con $u^2 = \|u\| = u \cdot u$.

La velocità relativa u , essendo la velocità delle particelle del riferimento $\mathcal{R}'$ rispetto a $\mathcal{R}$, ha il significato di **velocità di trascinamento**.

Scambiando il ruolo dei due riferimenti, posto cioè

$$(1') \quad c = \rho'(u' + c'), \quad u' \cdot c' = 0,$$

con

$$(2') \quad \rho' = -\frac{1}{c'^2} c \cdot c' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c'^2}}},$$

si osserva che

$$(3) \quad \rho = \rho'$$

e quindi che

$$(4) \quad \boxed{u^2 = u'^2}$$

Pertanto:

PROPOSIZIONE 1. Le due velocità di trascinamento determinate da due riferimenti hanno uguale intensità.

OSSERVAZIONE 1. Si noti che a questo risultato, ovvio nell'ambito della cinematica classica, non corrisponde l'analoga classica relazione tra le velocità di trascinamento, una opposta all'altra: $\mathbf{u} = -\mathbf{u}'$. L'eliminazione del vettore $\mathbf{c}'$ dal sistema di equazioni (1) e (1') porta infatti all'uguaglianza

$$(5) \quad -\mathbf{u}' = \rho \mathbf{u} + \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \mathbf{c}.$$

Poiché per la (2) si ha

$$(6) \quad 1 - \frac{1}{\rho^2} = \frac{u^2}{c^2},$$

si può anche scrivere

$$(7) \quad -\mathbf{u}' = \rho \left(\mathbf{u} + \frac{u^2}{c^2} \mathbf{c} \right).$$

La (5) mostra che $\mathbf{u}$ e $-\mathbf{u}'$ sono indipendenti. La (6) mostra che $-\mathbf{u}'$ à componente positiva rispetto a $\mathbf{c}$.

Si consideri ora l'intervallo assoluto OP di sue eventi decomposto rispetto ai due riferimenti:

$$(8) \quad \boxed{OP = \mathbf{r} + \theta \mathbf{c} = \mathbf{r}' + \theta' \mathbf{c}'}$$

Moltiplicando scalarmente quest'uguaglianza con la (1),

$$\mathbf{c}' \cdot (\mathbf{r}' + \theta' \mathbf{c}') = \rho (\mathbf{u} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{r} + \theta \mathbf{c}),$$

si deduce la formula

$$(9) \quad \boxed{\theta' = \rho \left(\theta - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \right)}$$

Se si introduce la **distanza nella direzione di trascinamento** dei due eventi

$$(10) \quad \boxed{\delta = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{u}}$$

con

$$u = |\mathbf{u}| = \sqrt{|\mathbf{u}|^2} > 0,$$

allora la relazione precedente si scrive

$$(11) \quad \boxed{\theta' = \rho \left(\theta - \frac{u \delta}{c^2} \right)}$$

Si ha così il legame tra gli intervalli temporali relativi dei due eventi.

OSSERVAZIONE 2. La dilatazione dei tempi. Si supponga che gli eventi O e P avvengano nel medesimo luogo rispetto a $\mathcal{R}$, cioè che sia $\mathbf{r} = 0$. Allora dalla (8) segue

$$(12) \quad \theta' = \rho \theta.$$

Siccome $\rho > 1$ (infatti $\rho = 0$ è escluso perché $\mathbf{c} \neq \mathbf{c}'$) dalla (12) segue

$$\theta' > \theta.$$

Pertanto: l'intervallo temporale di due eventi relativo al riferimento in cui sono spazialmente coincidenti (perché questo esista deve essere OP del genere tempo, Prop. 2, §2) è sempre inferiore all'intervallo temporale relativo ad un qualunque altro riferimento. Questo fenomeno relativistico è chiamato *dilatazione dei tempi*.

ESEMPIO 1. Un'astronave viaggia di moto inerziale nel cosmo con velocità $\mathbf{u}$ costante rispetto al riferimento inerziale solare (Sole e stelle "fisse") $\mathcal{R}'$. Anche l'astronave definisce un riferimento inerziale $\mathcal{R}$. Su questa viene osservato un fenomeno o un processo della durata di θ

secondi. Gli eventi finali ed iniziali di questo processo avvengono praticamente nello stesso luogo rispetto al riferimento $\mathcal{R}$. Osservati dal riferimento solare (per esempio dalla Terra) questi due eventi hanno un intervallo temporale pari a $\theta' = \rho\theta > \theta$.

Dalla (11) per simmetria segue, tenuto conto della (3) e della (4),

$$(11') \quad \theta = \rho \left(\theta' - \frac{u \delta'}{c^2} \right)$$

e quindi

$$\theta' = \frac{\theta}{\rho} + \frac{u \delta'}{c^2}.$$

Combinando quest'uguaglianza con la (11) si trova

$$\rho \left(\left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) \theta - \frac{u \delta}{c^2} \right) = \frac{u \delta'}{c^2}.$$

Stante l'identità (6) si conclude che

$$(13) \quad \boxed{\delta' = \rho(u\theta - \delta)}$$

Si ottiene così il legame tra le distanze spaziali dei due eventi nella direzione delle velocità di trascinamento.

OSSERVAZIONE 3. Contrazione delle lunghezze. Si supponga che gli eventi siano contemporanei in $\mathcal{R}$: $\theta = 0$. Dalla (13) segue

$$(14) \quad \delta' = -\rho\delta,$$

e quindi

$$|\delta'| > |\delta|.$$

Pertanto: la distanza spaziale di due eventi contemporanei in un riferimento $\mathcal{R}$, misurata nella direzione della velocità di trascinamento di un qualunque altro riferimento $\mathcal{R}'$, è inferiore all'analoga distanza spaziale misurata in $\mathcal{R}'$. Questo fenomeno relativistico è chiamato *contrazione delle lunghezze*.

ESEMPIO 2. Un'esperienza "ideale" classica che di solito si cita per illustrare il fenomeno della contrazione delle lunghezze è la seguente.

Un'asta rigida si muove lungo una guida rettilinea di moto uniforme con velocità u . La guida è fissa in un riferimento inerziale $\mathcal{R}$ e quindi anche l'asta definisce un riferimento inerziale $\mathcal{R}'$. Uno sperimentatore fermo nel riferimento $\mathcal{R}$ della guida misura la lunghezza dell'asta in moto. Per far questo rileva la posizione contemporanea dei due estremi dell'asta in un dato istante, considerando due eventi per lui contemporanei collocati in tali estremi (per esempio, l'accensione di due lampade) e ne misura la distanza δ . Per un osservatore posto nel riferimento in moto $\mathcal{R}'$, dove l'asta è però in quiete, la distanza spaziale dei due eventi è la **lunghezza propria** dell'asta. Siamo nelle condizioni di poter applicare la (14). Pertanto: la lunghezza dell'asta misurata da un osservatore rispetto al quale l'asta è in moto (rettilineo uniforme) risulta sempre minore della sua lunghezza propria.

OSSERVAZIONE 4. Si considerino due riferimenti cartesiani adattati ai due riferimenti ed aventi entrambi origine in O : $(O, \mathbf{c}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ e $(O, \mathbf{c}', \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$. Siano (t, x, y, z) e (t', x', y', z') le rispettive coordinate. Si scelgano i vettori $\mathbf{i}$ e $\mathbf{i}'$ nel 2-spazio (iperbolico) generato dai vettori $\mathbf{c}$ e $\mathbf{c}'$ ed inoltre

$$(15) \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}', \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}'.$$

Siccome $\mathbf{c}'$ è complanare alla coppia di vettori ortogonali $(\mathbf{i}, \mathbf{c})$ (Fig. 3.1.a), la decomposizione relativa (1) mostra che il vettore $\mathbf{u}$, che è ortogonale a $\mathbf{c}$ deve essere parallelo a $\mathbf{i}$. Supponiamo che sia

$$(16) \quad \mathbf{u} = u \mathbf{i}$$

con $u > 0$ (se non è così basta invertire $\mathbf{i}$). Ciò significa che la velocità di trascinamento di $\mathcal{R}$ rispetto a $\mathcal{R}'$ è parallela e concorde al versore $\mathbf{i}$. Tenuto inoltre conto che il vettore $-\mathbf{u}'$, che deve essere parallelo a $\mathbf{i}'$, ha componente positiva rispetto a $\mathbf{c}$ (Oss. 1), si può scegliere $\mathbf{i}'$ in modo che si abbia (si veda ancora la Fig. 3.1.a)

$$(16') \quad \mathbf{u}' = -u \mathbf{i}'.$$

La scelta così fatta per i due riferimenti cartesiani adattati equivale, nella visione tridimensionale, a scegliere gli assi omologhi fra loro paralleli ed equiorientati, con l'asse x scorrevole su se stesso con velocità positiva u (Fig. 3.1.b). Si noti però che mentre nella visione spazio-temporale, a cui per principio dobbiamo attenerci, gli assi x e x' non coincidono,

nella visione tridimensionale (che è imperfetta) gli assi coordinati x e x' sono paralleli. Per quel che riguarda i tempi, siccome per definizione si ha $t(O) = t'(O) = 0$, posto genericamente $t = t(P)$ e $t' = t'(P)$ per un qualunque evento P , risulta $\theta = t(P) - t(O) = t$ ed analogamente $\theta' = t'$. Inoltre, stante la (16), dalla definizione (10) e da $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ segue $\delta = x$. Analogamente dalla (16') segue $\delta' = -u$. Le relazioni (11) e (13) diventano pertanto

$$(17) \quad \begin{cases} t' = \rho \left(t - \frac{ux}{c^2} \right) \\ x' = \rho (x - ut) \end{cases}$$

Queste equazioni, insieme alle uguaglianze

$$(18) \quad \begin{cases} y' = y, \\ z' = z \end{cases}$$

dovute alle (15), forniscono i legami tra le coordinate cartesiane relative ai due riferimenti scelti. Nel loro complesso esse prendono il nome di **trasformazioni standard di Lorentz**.

OSSERVAZIONE 5. Si noti che gli intervalli spaziali relativi $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ che compaiono nella doppia decomposizione relativa (8) non sono direttamente confrontabili perché appartenenti a spazi tridimensionali (euclidei) distinti $\mathcal{S}_c$ e $\mathcal{S}_{c'}$ (ortogonali a $\mathbf{c}$ e $\mathbf{c}'$ rispettivamente). C'è tuttavia la possibilità di un confronto diretto tra il vettore $\mathbf{r}$ ed il vettore immagine di $\mathbf{r}'$ attraverso la rotazione $\mathbf{Q}$ che trasforma la base $(\mathbf{c}', \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ nella base $(\mathbf{c}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Questa rotazione mantiene invariate le due coppie di vettori $(\mathbf{j}', \mathbf{k}')$ e $(\mathbf{j}, \mathbf{k})$ e quindi si riduce essenzialmente ad una rotazione sul piano $(\mathbf{c}, \mathbf{i})$ tale che

$$(19) \quad \mathbf{Q}(\mathbf{i}') = \mathbf{i}, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{c}') = \mathbf{c}.$$

Inoltre, dovendo conservare la norma dei vettori, è tale da aversi (si veda la Fig. 3.1.a e si ricordi la Prop. 1)

$$(20) \quad \mathbf{Q}(\mathbf{u}') = -\mathbf{u}$$

Il modo di operare di $\mathbf{Q}$ è descritto dalla seguente

PROPOSIZIONE 2. Se $\mathbf{s}' \in \mathcal{S}_{c'}$ (cioè se $\mathbf{s}'$ è un vettore spaziale rispetto a $\mathbf{c}'$, ovvero ortogonale a $\mathbf{c}'$) e se esso è posto nella forma

$$(21) \quad \mathbf{s}' = \mathbf{s} + \alpha \mathbf{c}, \quad \mathbf{s} \cdot \mathbf{c} = 0$$

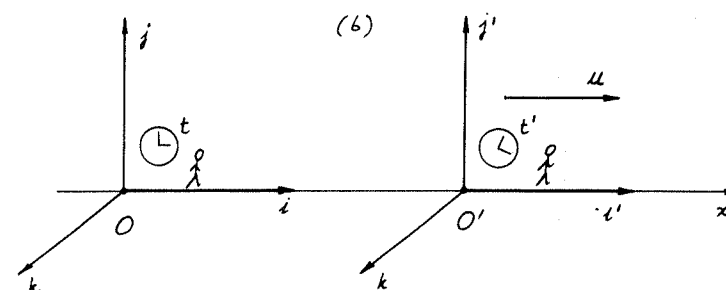
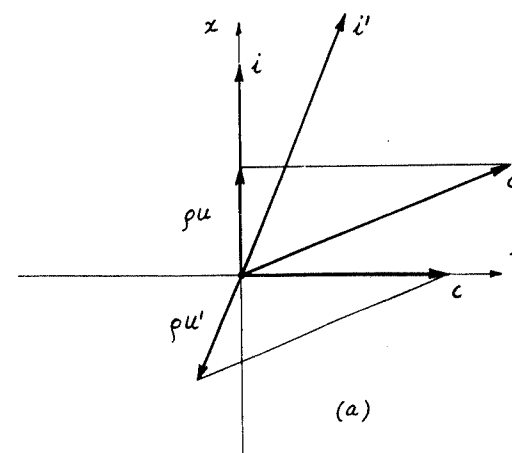


Fig. 3.1: Cambiamento di riferimenti: $\mathbf{c} \leftrightarrow \mathbf{c}'$.

- (a) Il piano $(\mathbf{c}, \mathbf{c}')$ nello spazio-tempo
(gli assi $y = y'$ e $z = z'$ sono ortogonali a questo piano).
(b) Figura equivalente nello spazio tridimensionale.

allora

$$(22) \quad \mathbf{Q}(\mathbf{s}') = \mathbf{s} - \alpha \frac{\rho}{1 + \rho} \mathbf{u}$$

Dimostrazione. Per ogni $\mathbf{s}' \in \mathcal{S}_{c'}$ sussiste, oltre alla (21), anche una decomposizione del tipo

$$(23) \quad \mathbf{s}' = \mathbf{s}_0 + \mu \mathbf{u}'$$

con $s_0 \in \mathcal{S}_c \cap \mathcal{S}_{c'}$. Tenuto conto delle formule (23), (21) e (5) si ha successivamente:

$$\begin{aligned} s_0 &= s' - \mu u' = s + \alpha c + \mu \left(\rho u + \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) c \right) \\ &= s + \mu \rho u + \left(\alpha + \mu \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \right) c. \end{aligned}$$

Imponendo la condizione $s_0 \cdot c = 0$ si trova

$$(24) \quad \mu = \alpha \frac{\rho}{1 - \rho^2}, \quad s_0 = s + \mu \rho u.$$

D'altra parte, tenuto conto che $Q(s_0) = s_0$, dalla (23) segue per la (20)

$$Q(s') = s_0 - \mu u.$$

Di qui, utilizzando le (24), si trova la (22). ■

La formula (22) può essere applicata al caso della decomposizione relativa di un intervallo assoluto. Dalla (8) segue infatti, tenuto conto della (1),

$$r' = r - \rho \theta' u + (\theta - \rho \theta') c.$$

Si pone allora nella (22), tenuto conto della (21),

$$s = r - \rho \theta' u, \quad \alpha = \theta - \rho \theta'.$$

Si trova dopo qualche calcolo, tenuto anche conto della (6), la formula finale

$$(25) \quad \boxed{Q(r') = r + \left((\rho - 1) \frac{u \cdot r}{u^2} - \rho \theta \right) u}$$

che esprime l'intervallo spaziale relativo $r' \in \mathcal{S}_{c'}$ trasferito nello spazio euclideo $\mathcal{S}_c$ e che insieme alla (6) fornisce il completo legame tra le componenti relative (r, θ) e (r', θ') di un intervallo assoluto OP in due riferimenti diversi. Di qui si può ritrovare la seconda delle (17) osservando che, essendo $i = Q(i')$, si ha $x' = i' \cdot r' = Q(i') \cdot Q(r') = i \cdot Q(r')$.

OSSERVAZIONE 6. La rotazione Q è ortocrona perché i vettori c' e $c = Q(c')$ sono ortocroni. Siccome

$$c' \cdot Q(c') = c' \cdot c = -c^2 \rho,$$

si vede che Q è una rotazione di pseudoangolo χ tale che (si veda il §12, Cap. I)

$$\rho = \tanh \chi.$$

4. Le trasformazioni delle velocità

Si considerino, come nel § precedente, due riferimenti inerziali $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$, determinati dai vettori c e c' . Si consideri quindi la storia di una particella. Per il vettore velocità assoluta sussiste la doppia decomposizione relativa

$$(1) \quad V = \gamma(v + c) = \gamma'(v' + c').$$

Ricordata la definizione (12) - §3 del fattore di Lorentz, si ha successivamente:

$$\begin{aligned} \gamma' &= -\frac{1}{c^2} V \cdot c' = -\frac{\rho}{c^2} V \cdot (u + c) \\ &= -\frac{\rho}{c^2} (\gamma(v + c) \cdot u + V \cdot c) \\ &= \rho \gamma \left(1 - \frac{u \cdot v}{c^2} \right). \end{aligned}$$

Di qui, per la definizione (11) - §2 del fattore di Lorentz, segue l'uguaglianza

$$(2) \quad \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{dt}{dt'} = \frac{\sigma}{\rho},$$

valida lungo la storia della particella, posto

$$(3) \quad \sigma = \frac{1}{1 - \frac{u \cdot v}{c^2}}.$$

Alle (2) e (3) corrispondono per simmetria le uguaglianze analoghe

$$(2') \quad \frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{dt'}{dt} = \frac{\sigma'}{\rho}$$

e

$$(3') \quad \sigma' = \frac{1}{1 - \frac{u' \cdot v'}{c^2}}.$$

Dalle (2) e (2') segue:

$$(4) \quad \sigma \sigma' = \rho^2.$$

Ciò premesso, si osserva che dalla trasformazione di Lorentz (17)₂ del §3 segue, derivando rispetto a t' :

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{dx'}{dt} = \frac{\sigma}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho(x - ut)) = \sigma \left(\frac{dx}{dt} - u \right).$$

Operando allo stesso modo sulle (16) si vede che tra le componenti cartesiane delle velocità relative ai due riferimenti intercorrono i seguenti legami,

$$(5) \quad \boxed{v'_x = \sigma(v_x - u), \quad v'_y = \frac{\sigma}{\rho} v_y, \quad v'_z = \frac{\sigma}{\rho} v_z}$$

posto

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}' = v'_x \mathbf{i}' + v'_y \mathbf{j}' + v'_z \mathbf{k}'.$$

OSSERVAZIONE 1. Dalla (1) segue

$$(5) \quad \mathbf{v}' = \frac{\sigma}{\rho} \mathbf{v} - \rho \mathbf{u} + \left(\frac{\sigma}{\rho} - \rho \right) \mathbf{c}.$$

Possiamo allora applicare al vettore $\mathbf{v}'$ la Prop. 2 del § precedente ed ottenere così la formula

$$(6) \quad \boxed{\mathbf{Q}(\mathbf{v}') = \frac{\sigma}{\rho} \mathbf{v} - \frac{\rho}{1 + \rho} \left(1 + \frac{\sigma}{\rho} \right) \mathbf{u}}$$

che esprime il **teorema dei moti relativi** in relatività ristretta. Questa formula è equivalente a

$$(6') \quad \boxed{\mathbf{Q}(\mathbf{v}') = \sigma \left\{ \frac{1}{\rho} \mathbf{v} + \left[\left(1 - \frac{1}{\rho} \right) \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{u^2} - 1 \right] \mathbf{u} \right\}}$$

Si ha infatti:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{1 + \rho} \left(1 + \frac{\sigma}{\rho} \right) &= \frac{\sigma \rho}{1 + \rho} \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\rho} \right) = \frac{\sigma \rho}{1 + \rho} \left(1 + \frac{1}{\rho} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right) \\ &= \sigma \left(1 - \frac{\rho}{1 + \rho} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right) = \sigma \left(1 - \frac{\rho}{1 + \rho} \frac{u^2}{c^2} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{u^2} \right) \\ &= \sigma \left(1 - \frac{\rho}{1 + \rho} \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{u^2} \right) = \sigma \left(1 - \frac{\rho - 1}{\rho} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{u^2} \right). \end{aligned}$$

Dalla (6) o dalla (6') si possono far seguire le (5) moltiplicando scalarmente per i tre versori ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$). La (6') può anche ottenersi derivando rispetto a t la (25) del §3.

5. Dinamica di una particella materiale

Anche in relatività ristretta lo schema dinamico più semplice, adatto allo studio del moto di corpi poco estesi, è quello di **punto** o **particella materiale**. Un punto materiale è caratterizzato da un numero positivo m detto **massa propria**. Come in meccanica newtoniana assumiamo come principio che i moti di un punto materiale siano governati da una **equazione dinamica assoluta**

$$(1) \quad \boxed{m \frac{d\mathbf{V}}{d\tau} = \mathbf{F}}$$

dove per la **forza assoluta** $\mathbf{F}$ è postulata una **legge di forza**, cioè una dipendenza dalla posizione del punto nello spazio-tempo e dalla sua velocità assoluta:

$$(2) \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{R}, \mathbf{V}).$$

La legge (1) può anche scriversi

$$(1') \quad m \mathbf{A} = \mathbf{F},$$

dove il vettore

$$(3) \quad \mathbf{A} = \frac{d\mathbf{V}}{d\tau}$$

è l'**accelerazione assoluta**. Essendo $\mathbf{V}$ a norma costante, questo vettore è sempre ortogonale a $\mathbf{V}$

$$(4) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = 0$$

e quindi necessariamente del genere spazio. Pertanto:

PROPOSIZIONE 1. La legge di forza (2) deve essere tale da rendere il vettore forza assoluta $\mathbf{F}$ sempre ortogonale alla velocità assoluta $\mathbf{V}$:

$$(5) \quad \mathbf{F}(\mathbf{R}, \mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} = 0.$$

Non sono ammissibili leggi di forza puramente posizionali, cioè non dipendenti da $\mathbf{V}$.

La legge di forza più semplice da considerarsi è una legge di forza lineare in $\mathbf{V}$, cioè del tipo

$$(6) \quad \boxed{\mathbf{F} = \frac{1}{c} \varphi(\mathbf{V})}$$

dove φ è un endomorfismo lineare dipendente dal punto $P \in M$, vale a dire un campo di tensori del tipo $(1,1)$ (che supponiamo C^∞). La presenza del coefficiente $\frac{1}{c}$ sarà giustificata dalle considerazioni che seguiranno. Rispetto ad un qualunque sistema di coordinate cartesiane $(x^\alpha) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ la (6) si traduce nelle equazioni

$$(6') \quad F^\beta = \frac{1}{c} \varphi_\alpha^\beta V^\alpha.$$

Siccome si è in uno spazio pseudo-euclideo la φ può anche essere interpretata come forma bilineare (cioè come campo tensoriale di tipo $(0,2)$) ponendo

$$(7) \quad \varphi(\mathbf{V}, \mathbf{U}) = \mathbf{U} \cdot \varphi(\mathbf{V}).$$

Ciò significa che le componenti $(\varphi_{\alpha\beta})$ della forma bilineare φ sono ottenute dalle (φ_α^β) con la solita regola dell'abbassamento degli indici:

$$(7') \quad \varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha^\gamma g_{\gamma\beta}.$$

La (5) si traduce in questo caso nell'uguaglianza

$$(8) \quad \varphi(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = 0$$

valida per ogni vettore $\mathbf{V}$. Questa mostra che φ è necessariamente antisimmetrica. In componenti:

$$(8') \quad \varphi_{\alpha\beta} = -\varphi_{\beta\alpha}.$$

Si è così dimostrato che

PROPOSIZIONE 2. La più generale legge di forza lineare nelle velocità è del tipo (6) dove φ è una 2-forma (cioè una forma bilineare antisimmetrica).

Il tipo di forza ora considerato si ritrova effettivamente in natura: è la forza che viene esercitata sopra una particella dotata di carica elettrica

da un campo elettromagnetico rappresentato (nel vuoto) dalla 2-forma φ . Per riconoscerlo occorre esprimere l'equazione assoluta del moto (1) e la legge di forza (6) in termini relativi ad un generico riferimento inerziale. Cominciamo con l'esaminare la legge di forza (6).

PROPOSIZIONE 3. Assegnato un riferimento inerziale $\mathcal{R}$ rappresentato dal vettore $\mathbf{c}$, ogni 2-forma φ sullo spazio-tempo di Minkowski M è equivalente ad una coppia $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ di vettori spaziali rispetto ad $\mathcal{R}$ (cioè ortogonali a $\mathbf{c}$). Assegnata φ , i due vettori sono definiti da

$$(9) \quad \mathbf{E} = \frac{1}{c} \varphi(\mathbf{c}), \quad \mathbf{B} = - * \beta,$$

dove β è la restrizione di φ al sottospazio $\mathcal{S}_c$ dei vettori ortogonali a $\mathbf{c}$ e $*$ è l'operatore di aggiunzione in $\mathcal{S}_c$ ⁽¹⁾. Viceversa, assegnata una coppia di vettori spaziali $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ e considerato un qualunque vettore $\mathbf{V}$ decomposto nella somma

$$(10) \quad \mathbf{V} = \mathbf{s} + \gamma \mathbf{c}, \quad \mathbf{s} \cdot \mathbf{c} = 0,$$

la 2-forma φ è definita dall'uguaglianza

$$(11) \quad \varphi(\mathbf{V}) = c \gamma \mathbf{E} - \mathbf{B} \times \mathbf{s} + \frac{1}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{s} \mathbf{c},$$

dove $\times$ è il prodotto vettoriale in $\mathcal{S}_c$.

Dimostrazione. Si osservi che il vettore $\mathbf{E}$ definito dalla $(9)_1$ è spaziale: $\mathbf{E} \cdot \mathbf{c} = \frac{1}{c} \varphi(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{c} = \frac{1}{c} \varphi(\mathbf{c}, \mathbf{c}) = 0$. Inoltre $\mathbf{B}$ è spaziale per definizione. Viceversa, si osservi che, qualunque siano i vettori $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ dalla (11) e dalla (10) segue

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot \varphi(\mathbf{V}) &= (\mathbf{s} + \gamma \mathbf{c}) \cdot (c \gamma \mathbf{E} - \mathbf{B} \times \mathbf{s} + \frac{1}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{s} \mathbf{c}) \\ &= c \gamma \mathbf{E} \cdot \mathbf{s} - \gamma c \mathbf{E} \cdot \mathbf{s} = 0. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ L'operatore di aggiunzione $*$, così come il conseguente prodotto vettoriale $\times$ nella formula successiva (11), dipende dall'orientamento scelto su $\mathcal{S}_c$. La presenza del segno $-$ nella $(9)_2$ è quindi del tutto inessenziale. Essa tuttavia è dovuta a ragioni formali, stante l'interpretazione fisica di $\mathbf{B}$ che sarà illustrata più avanti. La presenza del fattore $\frac{1}{c}$ nella $(9)_1$ ha le stesse motivazioni della (6). Si noti che se $\mathbf{V} = \mathbf{c}$ allora $\mathbf{F} = \mathbf{E}$.

Ciò mostra che φ definita dalla (11) è effettivamente antisimmetrica. Occorre allora dimostrare che, assunte le (9), con la (11) si ritrova la stessa φ . Per ogni vettore s spaziale (cioè tale che $s \cdot c = 0$) vale la decomposizione

$$\varphi(s) = \beta(s) + \kappa c$$

con $\beta(s)$ vettore spaziale e κ coefficiente opportuno. Questo coefficiente si determina moltiplicando scalarmente per c la precedente uguaglianza: $c \cdot \varphi(s) = -\kappa c^2$. Di qui segue:

$$\kappa = -\frac{1}{c^2} c \cdot \varphi(s) = \frac{1}{c^2} s \cdot \varphi(c) = \frac{1}{c} s \cdot E.$$

Ricordato ora il legame tra aggiunta e prodotto vettoriale, per cui $\beta(s) = * \beta \times s$, la (9)₂ equivale a

$$(9') \quad \beta(s) = -B \times s, \quad s \cdot c = 0.$$

Si ha allora, applicando φ alla decomposizione (10):

$$\begin{aligned} \varphi(V) &= \varphi(s) + \gamma \varphi(c) \\ &= \beta(s) + \kappa c + c \gamma E \\ &= -B \times s + \frac{1}{c} E \cdot s c + c \gamma E. \end{aligned}$$

Si trova così la (11). ■

OSSERVAZIONE 1. Interpretata la (10) come decomposizione relativa di una velocità assoluta V ,

$$V = \gamma(v + c),$$

e tenuto conto della legge di forza (6), la (11) esprime la **decomposizione relativa della forza assoluta F** ,

$$(12) \quad F = \gamma \left(E - \frac{1}{c} B \times v + \frac{1}{c^2} E \cdot v c \right)$$

in una parte spaziale $\gamma(E - \frac{1}{c} B \times v)$ ed in una parte temporale $\frac{\gamma}{c^2} E \cdot v$.

Se si riportano le decomposizioni relative (10) e (12) nell'equazione dinamica (1) si prova che:

PROPOSIZIONE 4. L'equazione dinamica assoluta (1) si spezza nelle equazioni dinamiche relative

$$(13) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= E - \frac{1}{c} B \times v \\ \frac{dm_r}{dt} &= \frac{1}{c^2} E \cdot v \end{aligned}}$$

dove

$$(14) \quad \boxed{p = m_r v, \quad m_r = \gamma m = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

Dimostrazione. Tenuto conto che

$$\gamma = \frac{dt}{d\tau}$$

e del fatto che la massa propria m è costante, risulta

$$m \frac{dV}{d\tau} = \gamma \left(\frac{d}{dt}(m\gamma v) + \frac{d}{dt}(m\gamma) c \right).$$

Stante la (12) l'equazione (1) si spezza nelle (13). ■

OSSERVAZIONE 2. Lo scalare positivo m_r prende il nome di **massa relativa** della particella. Si noti che $m_r \geq m$, con $m_r = m$ se e solo se la velocità relativa è nulla. Il vettore spaziale p prende il nome di **impulso relativo** della particella (o anche di **momento relativo**). Al vettore

$$(15) \quad P = m V = p + m_r c$$

si dà il nome di **impulso assoluto** (o **momento assoluto**)⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Nei testi di Fisica la massa propria o "massa di quiete" di una particella è di solito denotata con m_0 , mentre la massa relativa, chiamata semplicemente "massa", è denotata con m . L'uguaglianza (14)₂, scritta $m = \gamma m_0$, viene interpretata come fenomeno di crescita della massa col crescere della velocità della particella.

OSSERVAZIONE 3. Il secondo membro dell'equazione $(13)_1$, cioè il vettore

$$(16) \quad \boxed{\mathbf{F}_r = \mathbf{E} - \frac{1}{c} \mathbf{B} \times \mathbf{v}}$$

prende il nome di **forza relativa** o **forza di Lorentz**. È di questo tipo la forza che un **campo elettrico** $\mathbf{E}$ ed un **campo magnetico** $\mathbf{B}$ esercitano su di una particella dotata di carica unitaria. Qualora si vogliano interpretare le equazioni trovate come equazioni della dinamica di una particella di carica elettrica e non unitaria (e massa propria m) occorre sostituire i vettori $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ con $(e\mathbf{E}, e\mathbf{B})$, vale a dire la 2-forma φ con $e\varphi$.

OSSERVAZIONE 4. L'equazione scalare $(13)_2$ è conseguenza dell'equazione vettoriale $(13)_1$. Infatti per la (15) tra $\mathbf{p}$ ed m_r sussiste il legame

$$(17) \quad m_r^2 - m^2 = \frac{p^2}{c^2}.$$

Derivando e tenendo conto della $(13)_1$ si trova

$$m_r \frac{dm_r}{dt} = \frac{1}{c^2} \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m_r \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}.$$

OSSERVAZIONE 5. Se si introduce la quantità

$$(18) \quad \boxed{E_r = m_r c^2}$$

la $(13)_2$ diventa

$$(19) \quad \frac{dE_r}{dt} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}.$$

Siccome il secondo membro è la potenza della forza relativa,

$$\mathbf{F}_r \cdot \mathbf{v} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{v},$$

la quantità E_r ha il significato di **energia relativa** della particella. Se la particella è in quiete quest'energia si riduce alla **energia propria**

$$(20) \quad \boxed{E = m c^2}$$

OSSERVAZIONE 6. L'equazione di moto $(13)_1$ è equivalente al seguente sistema dinamico

$$(21) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v} \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{1}{m} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(\mathbf{E} - \frac{1}{c} \mathbf{B} \times \mathbf{v} - \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} \right) \end{aligned}}$$

nelle incognite $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ posizione e velocità relative della particella, funzioni del tempo relativo t . In queste equazioni i vettori $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ devono intendersi come funzioni assegnate di $(\mathbf{r}, t)$. Per riconoscerlo basta derivare la $(14)_1$ rispetto a t :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \frac{dm_r}{dt} + m_r \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Di qui, isolando la derivata di $\mathbf{v}$ e tenendo conto di entrambe le (13) si ricavano le (21) . Il sistema dinamico (21) descrive dunque il moto di una particella materiale relativistica in un qualunque riferimento inerziale, nel caso in cui la forza assoluta dipende linearmente dalla velocità assoluta.

ESEMPIO 1. Si consideri il caso in cui $\mathbf{E} = \text{costante}$ e $\mathbf{B} = 0$. La seconda equazione (21) coinvolge la sola funzione incognita $\mathbf{v}(t)$:

$$(22) \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{m\gamma} \left(\mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} \right).$$

Di qui, moltiplicando vettorialmente per $\mathbf{E}$, si ricava

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{E} \times \mathbf{v}) = -\frac{1}{m\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \mathbf{E} \times \mathbf{v}.$$

Ciò mostra che la condizione $\mathbf{E} \times \mathbf{v} = 0$ è invariante, cioè che se è soddisfatta all'istante iniziale è sempre soddisfatta. Ciò significa che se $\mathbf{v}$ è inizialmente parallela a $\mathbf{E}$, lo è sempre. Si consideri per semplicità questo caso. L'equazione (22) si riduce allora ad una sola equazione scalare

$$(23) \quad m \frac{dv}{dt} = E \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}},$$

posto

$$\mathbf{E} = E \mathbf{i}, \quad E > 0, \quad \mathbf{v} = v \mathbf{i}$$

(non si confonda, qui e nelle formule seguenti, la componente $E = \sqrt{\|\mathbf{E}\|}$ di $\mathbf{E}$ con l'energia propria!). Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili. Posto $v = c \sin \vartheta$ la (23) diventa

$$mc \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} = E \cos^3 \vartheta,$$

cioè

$$d \tan \vartheta = \frac{E}{mc} dt.$$

L'equazione (23) è pertanto risolta implicitamente dalle equazioni

$$(24) \quad v(t) = c \sin \vartheta(t), \quad c(\tan \vartheta(t) - \tan \vartheta_0) = \frac{E}{m} t.$$

È conveniente rappresentare questo risultato come nella Fig. 5.1 che mostra come cresce la velocità v al crescere di $\frac{1}{m}Et$ (si tenga presente che se l'unità di misura del tempo è il secondo, il raggio del cerchio goniometrico è di circa 300.000 Km). La velocità tende asintoticamente al valore c . Dalla similitudine dei due triangoli di vertice il centro del cerchio goniometrico si trae

$$(25) \quad v(t) = \frac{Et}{\sqrt{m^2 c^2 + E^2 t^2}}.$$

Questa è la soluzione della (23) con la condizione iniziale $v(0) = 0$. Posto ancora $\mathbf{r} = x \mathbf{i}$ con un'integrazione si ottiene

$$(26) \quad x(t) = \frac{mc}{E} (\sec \vartheta - \sec \vartheta_0).$$

Infatti:

$$d \sec \vartheta = d \frac{1}{\cos \vartheta} = \sin \vartheta d \tan \vartheta = \frac{v}{c} \frac{E}{mc} dt = \frac{E}{mc^2} dx,$$

per cui

$$dx = \frac{mc^2}{E} d \sec \vartheta.$$

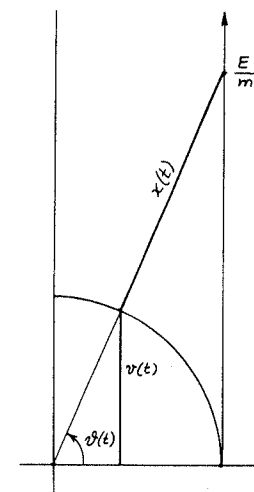


Fig. 5.1

Se si pone $x(0) = 0$ e quindi $\vartheta_0 = 0$ dalla (26) si trae

$$(27) \quad x(t) = \frac{mc^2}{E} (\sec \vartheta(t) - 1) = \frac{mc^2}{E} \left(\sqrt{1 + \frac{E^2 t^2}{m^2 c^2}} - 1 \right).$$

Si è così completamente determinato il moto della particella inizialmente in quiete.

ESEMPIO 2. Si consideri il caso $\mathbf{B} = \text{costante}$ e $\mathbf{E} = 0$. La seconda delle (21) diventa

$$(28) \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{mc\gamma} \mathbf{B} \times \mathbf{v}.$$

Moltiplicando scalarmente per $\mathbf{v}$ si vede che sussiste l'integrale primo della velocità

$$(29) \quad v^2 = \text{costante}.$$

Dunque i moti sono tutti uniformi. Moltiplicando invece scalarmente per $\mathbf{B}$, che è costante, si trova l'integrale primo

$$(30) \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = \text{costante}.$$

Si noti che essendo la base spaziale (e_i) canonica, le componenti covarianti e contravarianti dei vettori spaziali coincidono. Per quel che riguarda le componenti contravarianti ($\varphi^{\alpha\beta}$) della 2-forma φ va invece osservato che quelle della prima riga e della prima colonna (cioè con indice 0) cambiano di segno rispetto a quelle covarianti:

$$\varphi^{0i} = g^{0\alpha} g^{i\beta} \varphi_{\alpha\beta} = g^{00} g^{ij} \varphi_{0j} = -\varphi_{0i}.$$

Si ha pertanto

$$(5) \quad (\varphi^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

DEFINIZIONE 1. Dicesi **codifferenziale** di una p -forma φ la $p-1$ -forma $\delta\varphi$ le cui componenti contravarianti cartesiane sono

$$(6) \quad (\delta\varphi)^{\beta\ldots\gamma} = \partial_\alpha \varphi^{\alpha\beta\ldots\gamma}$$

Questa definizione è valida per ogni p -forma su di uno spazio affine euclideo di dimensione e segnatura qualsiasi e non dipende dalla scelta delle coordinate cartesiane (x^α). Essa si può estendere alle p -forme (o ai tensori contravarianti antisimmetrici) su varietà riemanniane o pseudoriemanniane. Per una 0-forma (cioè una funzione) f si pone per definizione $\delta f = 0$. Nel caso di un campo vettoriale $\mathbf{X}$ si ha $\delta\mathbf{X} = \partial_\alpha \mathbf{X}^\alpha$ quindi

$$\delta\mathbf{X} = \text{div}\mathbf{X}.$$

Dalla definizione segue immediatamente che il codifferenziale è nilpotente:

$$(7) \quad \delta^2\varphi = 0$$

DEFINIZIONE 2. Dicesi **operatore di Laplace** o **laplaciano** l'operatore

$$(8) \quad \Delta = d\delta + \delta d$$

Il laplaciano $\Delta\varphi$ di una p -forma φ è ancora una p -forma. Nel caso di una funzione si ha

$$(9) \quad \Delta f = \delta df = \text{div grad } f = g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta f.$$

Una p -forma è detta **armonica** se soddisfa all'**equazione di Laplace**

$$(10) \quad \Delta\varphi = 0.$$

Un'equazione del tipo

$$(11) \quad \Delta\varphi = \psi$$

è detta **equazione di Poisson**. La teoria dell'integrazione delle equazioni di Laplace e Poisson è un importante capitolo della Fisica Matematica.

PROPOSIZIONE 1. Sia φ una 2-forma sullo spazio-tempo di Minkowski equivalente, rispetto ad un assegnato riferimento, alla coppia di vettori spaziali ($\mathbf{E}, \mathbf{B}$). Le condizioni

$$(12) \quad \boxed{d\varphi = 0} \quad \boxed{\delta\varphi = 0}$$

sono rispettivamente equivalenti alle due coppie di equazioni

$$(13) \quad \boxed{\begin{aligned} \text{div } \mathbf{B} &= 0 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{E} &= 0 \end{aligned}} \quad \boxed{\begin{aligned} \text{div } \mathbf{E} &= 0 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \text{rot } \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}}$$

Dimostrazione. (i) La condizione di chiusura (12)₁ equivale in componenti alle equazioni

$$\partial_\alpha \varphi_{\beta\gamma} + \partial_\beta \varphi_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma \varphi_{\alpha\beta} = 0.$$

Con la scelta $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, i, j)$ si trova l'equazione

$$0 = \partial_0 \varphi_{ij} + \partial_i \varphi_{j0} + \partial_j \varphi_{0i} = \partial_0 \beta_{ij} - \partial_i E_j + \partial_j E_i.$$

In forma intrinseca quest'ultima equazione si scrive

$$\partial_0 \beta - d\mathbf{E}^b = 0.$$

Operando con l'aggiunzione e ricordando che $*d\mathbf{E}^b = \text{rot}\mathbf{E}$, si trova la seconda delle (13)₁, osservato che

$$\partial_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Con la scelta $(\alpha, \beta, \gamma) = (h, i, j)$ si trova la condizione

$$\partial_h \beta_{ij} + \partial_i \beta_{jh} + \partial_j \beta_{hi} = 0,$$

cioè $d\beta = 0$, la quale è equivalente a $d * \mathbf{B} = 0$ cioè a $\text{div}\mathbf{B} = 0$.

(ii) La condizione $\delta\varphi = 0$ equivale in componenti alle equazioni

$$0 = \partial_\alpha \varphi^{\alpha\beta} = \partial_0 \varphi^{0\beta} + \partial_i \varphi^{i\beta}.$$

Con la scelta $\beta = 0$ l'equazione diventa $\partial_i E^i = 0$ cioè $\text{div}\mathbf{E} = 0$. Con la scelta $\beta = j$ si ha invece

$$0 = \partial_0 \varphi^{0j} + \partial_i \varphi^{ij} = -\partial_0 E^j - \partial_i (\varepsilon^{kij} B_k) = -\partial_0 E^j + \varepsilon^{jik} \partial_i B_k,$$

quindi

$$\partial_0 \mathbf{E} - *d\mathbf{B}^b = 0,$$

per cui anche l'ultima equazione (13) è trovata. ■

OSSERVAZIONE 1. Le equazioni (13) sono le ben note **equazioni di Maxwell** per il campo elettromagnetico nel vuoto e senza cariche sorgenti (in particolare le (13)₁ formano la cosiddetta **prima coppia** e le (13)₂ la **seconda coppia** di equazioni di Maxwell). Le (12) implicano $\Delta\varphi = 0$ cioè che φ è una forma armonica. In presenza di materia carica sorgente del campo, alla seconda delle (12) va sostituita l'equazione

$$(14) \quad \boxed{\delta\varphi = \mathbf{J}}$$

dove a secondo membro compare il campo vettoriale $\mathbf{J}$ **flusso di corrente** (si sottintende qui l'equivalenza tra campi vettoriali e 1-forme, si aboliscono cioè i simboli b e $\sharp$). Questo campo è a sua volta espresso da

$$(15) \quad \mathbf{J} = \rho_0 \mathbf{V},$$

dove $\mathbf{V}$ è la velocità assoluta delle particelle cariche e ρ_0 è la **densità di carica propria**. La decomposizione relativa ad un riferimento è del tipo

$$(16) \quad \mathbf{J} = \rho(\mathbf{v} + \mathbf{c}),$$

dove $\mathbf{v}$ è la velocità relativa delle cariche e

$$(17) \quad \rho = \gamma \rho_0$$

è la **densità relativa di carica**. La seconda coppia delle equazioni di Maxwell diventa pertanto

$$(18) \quad \boxed{\begin{aligned} \text{div}\mathbf{E} &= \rho \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \text{rot}\mathbf{B} &= \frac{\rho}{c} \mathbf{v} \end{aligned}}$$

OSSERVAZIONE 2. Essendo $\delta^2 = 0$, dalla (14) segue l'equazione

$$(19) \quad \delta \mathbf{J} = 0$$

che prende il nome di **equazione di continuità** della carica. In un riferimento inerziale assume la forma

$$(20) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

Questa è immediata conseguenza della decomposizione relativa di una velocità assoluta:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\alpha J^\alpha = \partial_\alpha (\rho_0 V^\alpha) = \partial_0 (\rho_0 V^0) + \partial_i (\rho_0 V^i) \\ &= \partial_0 (\rho_0 \gamma c) + \partial_i (\rho_0 \gamma v^i). \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 3. La condizione di chiusura $d\varphi = 0$ sopra un dominio semplicemente connesso implica, per il Lemma di Poincaré, l'esistenza di una 1-forma **potenziale** α tale che

$$(21) \quad \varphi = d\alpha.$$

In coordinate canoniche

$$(22) \quad \alpha = \alpha_i dx^i + \alpha_0 dx^0.$$

Il campo vettoriale corrispondente ammette una decomposizione relativa del tipo

$$(23) \quad \alpha^\sharp = \mathbf{A} - \frac{1}{c} \varphi \mathbf{c}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = 0.$$

Il campo scalare $\varphi = \alpha_0$ prende il nome di **potenziale scalare**. Il campo vettoriale spaziale $\mathbf{A}$ di componenti covarianti (α_i) prende il nome di **potenziale vettore**. Da queste posizioni seguono le equazioni⁽¹⁾

(24)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad} \varphi \\ \mathbf{B} &= -\text{rot} \mathbf{A} \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 4. Dato il campo elettromagnetico, il potenziale α è determinato modulo il differenziale di un campo scalare f . Il passaggio da un potenziale α ad un altro equivalente

$$(25) \quad \alpha' = \alpha + df$$

prende il nome di **trasformazione di gauge**. La corrispondente trasformazione dei potenziali vettore e scalare mostra che

$$(26) \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad} f, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}.$$

La seconda di queste equazioni mostra che è sempre possibile rendere nullo il potenziale scalare rispetto ad un prefissato riferimento perché l'equazione

$$\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

è sempre risolubile: basta prendere f uguale all'integrale rispetto al tempo di $c\varphi$. La prima equazione (26) mostra che è possibile rendere nulla la divergenza del potenziale vettore, risolvendo l'equazione

$$\text{div} \mathbf{A} + \Delta f = 0,$$

che è un'equazione di Poisson. Entrambe queste condizioni possono ottenersi simultaneamente. Dalla (25) segue anche $\delta\alpha' = \delta\alpha + \delta df$. Di qui si vede che risolvendo l'equazione

$$\delta\alpha + \Delta f = 0,$$

⁽¹⁾ Nei testi di fisica si può trovare una convenzione che vede α e quindi la coppia $(\mathbf{A}, \varphi)$ cambiata di segno.

che è ancora un'equazione di Poisson, è possibile rendere nullo il codifferenziale del potenziale.

OSSERVAZIONE 5. Un campo elettromagnetico nel vuoto ed in assenza di cariche, cioè una soluzione delle equazioni (12) o (13), prende il nome di **onda elettromagnetica**. Introducendo un potenziale, la coppia delle equazioni (12) è riassunta nell'unica equazione

(26)

$$\delta d\alpha = 0$$

che prende il nome di **equazione assoluta delle onde elettromagnetiche**. Lo studio di quest'equazione è dunque alla base della teoria delle onde elettromagnetiche nel vuoto.

Finito di stampare presso M.S./Litografia s.r.l.
Via Mazzini, 24 - Torino