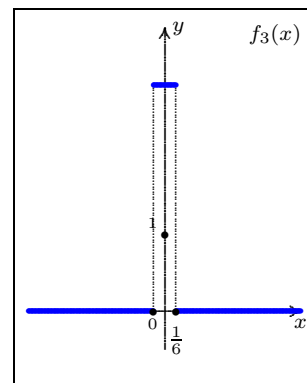
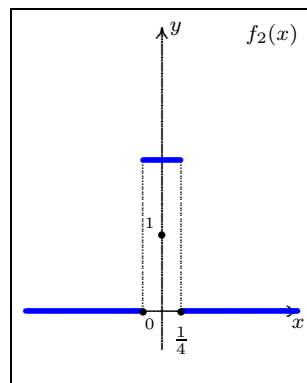
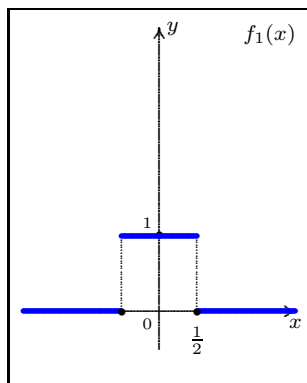


Complementi di Analisi per Informatica

Capitolo 7 Distribuzioni

SERGIO BENENTI

Prima versione settembre 2017. Revisione gennaio 2020.



Indice

7.1	Premessa	1
7.2	Funzioni test	1
7.3	Funzioni generalizzate o distribuzioni	2
7.4	La delta di Dirac	2
7.5	Il gradino di Heaviside	4
7.6	Derivata di una distribuzione	5

7.1 Premessa

Nella prima metà del 1900 sorsero alcuni problemi che non potevano essere trattati nell'ambito dell'ordinaria *Analisi delle Funzioni*. Vediamone due esempi.

Primo. Nei punti di discontinuità non si può definire la derivata di una funzione. Due esempi sono il gradino di Heaviside $H(x)$ e l'impulso rettangolare $\text{rect}_a(x)$. Eppure esse intervengono in molte equazioni differenziali di notevole interesse applicativo.

Secondo. Il fisico Dirac aveva fatto uso, con notevole successo, di un 'tipo di funzione' veramente strano: valeva 0 su tutto l'asse reale salvo l'origine, dove le veniva attribuito il valore $+\infty$. Non solo: si pretendeva che l'area sottostante al suo diagramma, tra $-\infty$ e $+\infty$, valesse 1.

Da questi esempi, ma non solo da questi, risultò chiaro che il concetto 'ordinario' di funzione non bastava più. Il matematico francese Laurent Schwartz introdusse e sviluppò il concetto di **funzione generalizzata** o **distribuzione**, in un articolo del 1944, seguito da un suo libro del 1951.

7.2 Funzioni test

L'approccio di Schwartz si basa sull'introduzione di un particolare insieme \mathcal{D} formato da tutte le funzioni $\phi(x)$, a valori nel campo complesso, soddisfacenti alle seguenti proprietà:

1. $\phi(x)$ è definita su tutto l'asse x , quindi su $(-\infty, +\infty)$.
2. $\phi(x)$ ammette derivata di ogni ordine n in ogni punto x .
3. $\phi(x)$ ha **supporto compatto**, vale a dire l'insieme dei punti in cui non è nulla è contenuto in un intervallo limitato.
4. Ogni successione di funzioni $\phi_n(x) \in \mathcal{D}$ convergente ad una funzione $\phi(x) \in \mathcal{D}$ è tale che per ogni intero positivo k la successione delle derivate k -esime $D^k \phi_n(x)$ converge alla derivata k -esima $D^{(k)} \phi(x)$.

Queste funzioni sono dette **funzioni test** o **funzioni di prova**. L'insieme è uno **spazio vettoriale**, nel senso che per ogni coppia di funzioni (ϕ, ψ) di \mathcal{D} , si ha

$$\alpha\phi + \beta\psi \in \mathcal{D}$$

per ogni scelta dei numeri complessi α e β . Si noti che tali funzioni sono continue ed integrabili su tutto \mathbb{R} , nel senso che l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx,$$

che equivale ad un integrale proprio posto che la $\phi(x)$ ha supporto compatto, esiste ed è finito.

7.3 Funzioni generalizzate o distribuzioni

Definizione 7.3.1 – Chiamiamo **funzionale** ogni regola \mathcal{F} che associa ad ogni funzione test $\phi \in \mathcal{D}$ un ben definito numero $\mathcal{F}(\phi)$, reale o complesso.

Per esempio, la legge che associa ad ogni ϕ il suo integrale tra $-\infty$ e $+\infty$ è un funzionale. Così dicasi della legge che associa l'integrale su di un prefissato intervallo chiuso $[a, b]$.

Definizione 7.3.2 – Un funzionale \mathcal{F} si dice **lineare** se

$$\mathcal{F}(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha \mathcal{F}(\phi) + \beta \mathcal{F}(\psi).$$

Un funzionale \mathcal{F} si dice **continuo** se per ogni successione $\phi_n \rightarrow 0$ (convergente, secondo quanto detto sopra, alla funzione nulla) si ha pure $\mathcal{F}(\phi_n) \rightarrow 0$.

Definizione 7.3.3 – Chiamiamo **distribuzione o funzione generalizzata** ogni funzionale lineare e continuo su \mathcal{D} . Il loro insieme forma uno spazio vettoriale (secondo una naturale definizione di somma e di prodotto per un numero) denotato con \mathcal{D}' .

Le funzioni ordinarie che siamo abituati a considerare generano una particolare sotto-classe di distribuzioni, secondo la definizione seguente.

Definizione 7.3.4 – Una distribuzione \mathcal{F} si dice **regolare** se può esprimersi nella forma integrale, cioè se esiste una funzione $f(x)$ per cui

$$(7.1) \quad \mathcal{F}(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x) dx.$$

In questo caso adottiamo la notazione

$$(7.2) \quad \mathcal{F}(\phi) = \langle f, \phi \rangle.$$

7.4 La delta di Dirac

Definizione 7.4.1 – La **delta di Dirac** δ è il funzionale che associa ad ogni ϕ il suo valore nell'origine:

$$(7.3) \quad \boxed{\delta(\phi) \doteq \phi(0)}$$

La **delta traslata** δ_a associa invece ad ogni ϕ il suo valore $\phi(a)$:

$$(7.4) \quad \boxed{\delta_a(\phi) \doteq \phi(a)}$$

Si dimostra che la delta di Dirac definita dalla (7.11) è un funzionale lineare e continuo, dunque una distribuzione. La delta di Dirac non è però regolare: non esiste nessuna funzione $\delta(x)$, nel senso ordinario, tale che

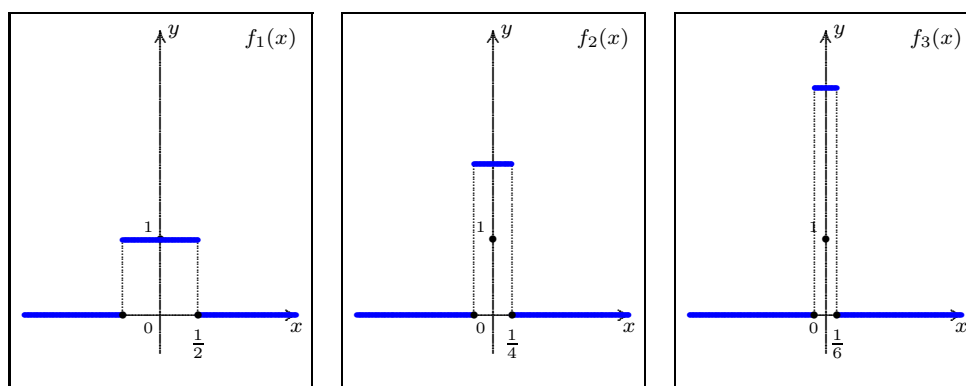
$$(7.5) \quad \delta(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \delta(x) dx = \phi(0)$$

Analogamente per la delta-traslata:

$$(7.6) \quad \langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \delta(x - a) dx$$

Osservazione 7.4.1 – Si consideri la successione di funzioni f_n definite da

$$(7.7) \quad f_n(x) = \begin{cases} n, & |x| < \frac{1}{2n}, \\ 0, & |x| \geq \frac{1}{2n}. \end{cases}$$



Ognuna di queste funzioni ha “area” uguale a 1, nel senso che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} n dx = 1.$$

Ovviamente questa successione non è convergente. Ogni funzione f_n genera però un funzionale regolare $\mathcal{F}_n(\phi)$:

$$(7.8) \quad \mathcal{F}_n(\phi) = \langle f_n, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) \phi(x) dx = n \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \phi(x) dx.$$

Data una qualunque funzione test $\phi(x)$ risulta di conseguenza definita la successione numerica

$$(7.9) \quad z_n = \mathcal{F}_n(\phi).$$

Per il teorema del valor medio delle funzioni continue, quest'ultimo integrale vale $\phi(\xi_n)$ dove ξ_n è un punto interno all'intervallo d'integrazione $[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]$, di ampiezza $1/n$. Dunque

$$z_n = n \frac{1}{n} \phi(\xi_n) = \phi(\xi_n).$$

Ma, sempre per la continuità di $\phi(x)$, questo implica:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \phi(0) = \delta(\phi).$$

È a questo punto interessante e importante osservare che, pur essendo la successione f_n non convergente, quando passiamo alla successione delle distribuzioni regolari \mathcal{F}_n vediamo che la successione numerica $z_n = \mathcal{F}_n(\phi)$, associata ad una qualunque funzione test, è sempre convergente al numero $\phi(0) = \delta(\phi)$. Possiamo formalizzare questo fatto con la scrittura

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_n = \delta.$$

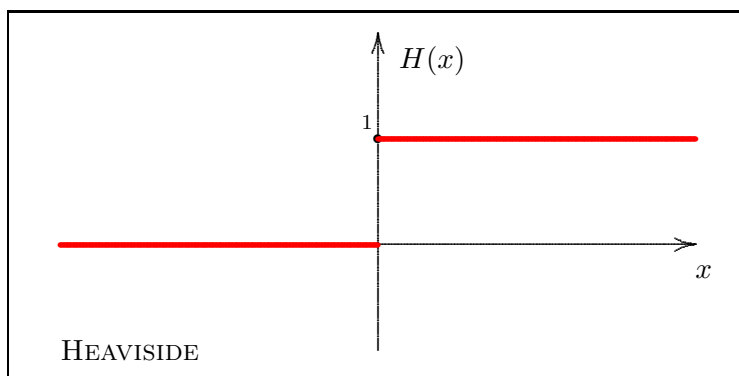
In altri termini: *la delta di Dirac, che non è una distribuzione regolare, può essere intesa come il limite di una successione di distribuzioni regolari*, cioè associate ad una successione di funzioni $f_n(x)$, che peraltro non è convergente. Una tale successione non è unica; si possono considerare altre successioni f_n che portano allo stesso risultato. •

7.5 Il gradino di Heaviside

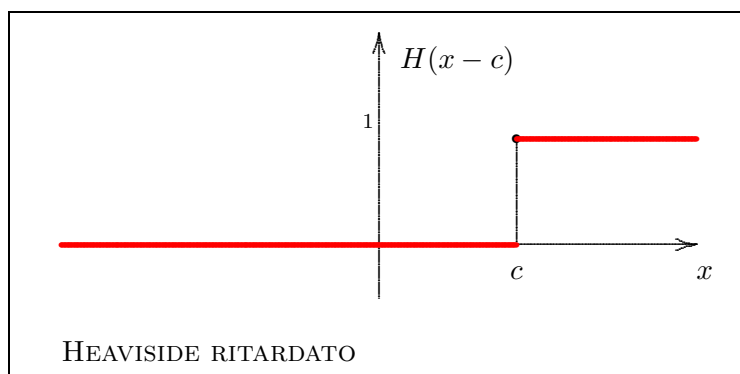
Ricordiamo che il **gradino unitario di Heaviside** è la funzione definita da

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Questo è il suo diagramma:



Questo è il diagramma del gradino di Heaviside ritardato:



Il gradino di Heaviside $H(x)$ genera una distribuzione regolare \mathcal{H} definita da:

$$(7.10) \quad \mathcal{H}(\phi) = \langle H, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) H(x) dx$$

7.6 Derivata di una distribuzione

L'estensione delle usuali operazioni sulle funzioni ordinarie alle distribuzioni comporta la soppressione di molte restrizioni. Per questa ragione le distribuzioni estendono in maniera considerevole le proprietà del calcolo differenziale. Un esempio per tutti: in base alla definizione che ora andiamo a dare, ogni distribuzione (regolare o no) ammette *sempre* la derivata.

Definizione 7.6.1 – La **derivata** di una distribuzione \mathcal{F} è il funzionale $\mathcal{F}' = D\mathcal{F}$ definito dall'uguaglianza

$$(7.11) \quad \mathcal{F}'(\phi) = -\mathcal{F}(\phi')$$

dove con ϕ' è la derivata della funzione test ϕ .

Ricordiamo che le funzioni test, per definizione, sono indefinitamente derivabili e che quindi anche ϕ' è una funzione test. Allora il secondo membro di questa uguaglianza ha sempre senso, è sempre ben definito. Questo vuol dire che:

Teorema 7.6.1 – Ogni distribuzione ammette sempre la derivata.

Osservazione 7.6.1 – Perché il segno ‘-’ nella definizione (7.11)? Non sarebbe più naturale porre per definizione $\mathcal{F}'(\phi) = \mathcal{F}(\phi')$? Per giustificare questa scelta occorre pensare alle distribuzioni regolari e precisamente a questo fatto: una distribuzione regolare \mathcal{F} associata ad una funzione $f(x)$ è definita secondo la (7.1); è allora spontaneo

definire la distribuzione derivata \mathcal{F}' come distribuzione regolare associata alla funzione derivata $f'(x)$ e quindi porre, per definizione,

$$\mathcal{F}'(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \phi(x) dx.$$

Per il teorema di integrazione per parti abbiamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \phi(x) dx = \left[f(x) \phi(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \phi'(x) dx.$$

Ma

$$\left[f(x) \phi(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

perché una funzione test è nulla all'esterno di un intervallo finito. Risulta quindi

$$\mathcal{F}'(\phi) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \phi'(x) dx = - \mathcal{F}(\phi').$$

Ecco che è comparso il segno '-'. In conclusione, affinché la definizione di derivata di una generica distribuzione sia coerente con una distribuzione regolare occorre per forza introdurre il segno - nella (7.11). •

Ecco un esempio notevole.

Teorema 7.6.2 – La derivata della distribuzione gradino di Heaviside \mathcal{H} è la delta di Dirac:

$$\boxed{\mathcal{H}' = \delta}$$

Dimostrazione. Per la definizione di derivata di una distribuzione abbiamo in questo caso:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H}', \phi \rangle &= - \langle \mathcal{H}, \phi' \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(x) H(x) dx = - \int_0^{+\infty} \phi'(x) dx \\ &= - \int_0^{+\infty} d\phi(x) = - [\phi(x)]_0^{+\infty} = \phi(0). \end{aligned}$$

Siccome $\phi(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0$ perché $\phi(x)$ è a supporto compatto, segue che

$$\dots = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle. \quad \square$$