Complementi di Analisi per Informatica

***

Capitolo 4
Trasformata di Fourier e Teorema del Campionamento

Sergio Benenti

Harry Nyquist

Claude Elwood Shannon

Indice

4.1 Definizioni

La trasformata di Fourier (TdF) opera su funzioni $x(t)$ (che chiameremo correntemente **segnali**) definite su tutto l'asse reale e restituisce una funzione $\widehat{x}(\omega)$ di variabile reale ω definita da

$$\boxed{\widehat{x}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-i\omega t} dt} \tag{4.1}$$

Quando quest'integrale esiste ed è finito per ogni valore di ω si dice che $x(t)$ è **Fourier-trasformabile**. Si usa dire che con la TdF si passa dal **dominio del tempo** t al **dominio delle frequenze** ω.[1]

La filosofia della TdF è questa: se un problema formulato nel dominio del tempo t si presenta difficilmente abbordabile, si può provare a tradurlo nel dominio della variabile ω dove, si spera, esso sia risolubile. Una volta risolto però, occorrerà ritornare al dominio del tempo, per esplicitarne la soluzione nel contesto originale.

Questo 'ritorno' comporta la definizione di una **antitrasformata di Fourier**, definita dalla seguente **formula di inversione**:[2]

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega} \tag{4.2}$$

La TdF trova applicazione in vari settori, tra i quali:

- Trattamento di equazioni differenziali.
- Trasmissione ed elaborazione di segnali.
- Trattamento di dati grafici.
- Elaborazione dati in apparecchiature di analisi scientifiche e medicali (TAC, RMN, spettrografia, ecc.).

Per la formula di Euler l'integrale (4.1) si spezza nella somma di due integrali,

$$\boxed{\widehat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \cos(\omega t)\, dt + i \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \sin(\omega t)\, dt} \tag{4.3}$$

che prendono rispettivamente il nome di **trasformata coseno** e **trasformata seno**.

[1] In molti problemi dove la TdF trova applicazione la variabile ω ha il significato di *pulsazione*, legato a quello di *frequenza* f dalla relazione

$$\omega = 2\,\pi\, f.$$

[2] Le costanti 1 e $1/2\pi$ che compaiono davanti agli integrali delle definizioni (4.1) e (4.2) possono essere sostituite, in altri testi sulla TdF, da due altre costanti il cui prodotto è però sempre $1/2\pi$. La convenzione qui adottata è motivata dal fatto che, le definizioni (4.1) e (4.2) possono dedursi con un passaggio al limite della serie di Fourier complessa per l'intervallo $[-L, L]$ che tende a $(-\infty, +\infty)$.

4.2 Proprietà della TdF

Per esprimere le proprietà fondamentali dells TdF conviene adottare una simbologia alternativa a quella della definizione (4.1) sostituendo $\widehat{x}(\omega)$ con

$$\boxed{\mathscr{F}[x(t)](\omega)} \tag{4.4}$$

$\boxed{1}$ **Linearità**. La TdF di una combinazione lineare (a coefficienti costanti) di segnali è la combinazione lineare delle loro trasformate:

$$\boxed{\mathscr{F}[\alpha x(t) + \beta y(t)](\omega) = \alpha\,\mathscr{F}[x(t)](\omega) + \beta\,\mathscr{F}[y(t)](\omega)} \tag{4.5}$$

$\boxed{2}$ **Riscalamento**:

$$\boxed{\mathscr{F}[x(at)](\omega) = \frac{1}{|a|}\,\mathscr{F}[x]\left(\frac{\omega}{a}\right)} \tag{4.6}$$

Il cambiamento di variabile $t \mapsto at$, cioè il riscalamento del tempo t, comporta un riscalamento $\omega \mapsto \omega/a$ di ω e poi una moltiplicazione per $1/|a|$.

$\boxed{3}$ **Traslazione** o **sfasamento nel tempo**:

$$\boxed{\mathscr{F}[x(t-\tau)](\omega) = e^{-i\tau\omega}\,\mathscr{F}[x](\omega)} \tag{4.7}$$

Il cambiamento di variabile $t \mapsto t - \tau$, cioè la traslazione del tempo t, comporta la moltiplicazione per $e^{i\omega\tau}$ della trasformata $\widehat{x}(\omega)$.

$\boxed{4}$ **Derivazione**:

$$\boxed{\mathscr{F}\left[\frac{dx}{dt}\right] = i\,\omega\,\mathscr{F}[x]} \tag{4.8}$$

La TdF della derivata di un segnale si traduce nella moltiplicazione per $i\omega$ della TdF del segnale stesso.[3] In simboli:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \leftrightarrow i\omega} \tag{4.9}$$

[3] Dimostrazione. Per definizione,

$$\mathscr{F}\left[\frac{dx}{dt}\right](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{dt}\,e^{-i\omega t}\,dt.$$

Integriamo per parti:

$$\int \frac{dx}{dt}\,e^{-i\omega t}\,dt = \int e^{-i\omega t}\,dx(t) = e^{-i\omega t}\,x(t)\; - \int x(t)\,de^{-i\omega t}$$
$$= e^{-i\omega t}\,x(t) + i\,\omega \int x(t)\,e^{-i\omega t}\,dt.$$

Se in particolare prendiamo la TdF di $y(t) = t\,x(t)$,

$$\mathscr{F}[y](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\,x(t)\,e^{-i\omega t}\,dt,$$

e deriviamo rispetto ad ω la trasformata di $x(t)$, troviamo

$$\frac{d\mathscr{F}[x]}{d\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-i\omega t}\,dt = -i\int_{-\infty}^{+\infty} t\,x(t)\,e^{-i\omega t}\,dt = -i\,\mathscr{F}[y] = \mathscr{F}[-itx].$$

Questo mostra che la derivata rispetto a ω della TdF di $x(t)$ è uguale alla TdF del prodotto di $x(t)$ per $-it$. In simboli:

$$\boxed{\frac{d}{d\omega} \leftrightarrow -it} \tag{4.10}$$

$\boxed{5}$ **Integrazione**. Se $X(t)$ è una primitiva di $x(t)$, cioè se

$$\frac{dX}{dt} = x(t),$$

allora per la (4.8)

$$\mathscr{F}\left[\frac{dX}{dt}\right](\omega) = i\,\omega\,\mathscr{F}[X]$$

e quindi

$$\boxed{\mathscr{F}[X](\omega) = -\frac{i}{\omega}\,\mathscr{F}[x](\omega)} \tag{4.11}$$

$\boxed{6}$ **Convoluzione**. Dati due segnali $x(t)$ e $y(t)$ di cui si conoscono le TdF, $\widehat{x}(\omega)$ e $\widehat{y}(\omega)$, si può calcolare la TdF del loro prodotto numerico $x(t)\cdot y(t)$ con la formula

$$\boxed{\mathscr{F}[x\cdot y](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(\tau)\,\widehat{y}(\omega-\tau)\,d\tau} \tag{4.12}$$

che va così interpretata:

(i) si prende la TdF $\widehat{x}(\omega)$ e si sostituisce la variabile ω con la variabile τ (è una banale sostituzione grafica, che però serve a evitare confusioni);

(ii) si prende la TdF $\widehat{y}(\omega)$ e si sostituisce la variabile ω con la variabile $\omega-\tau$;

(iii) si esegue l'integrale indicato dalla (4.12). Si trova una funzione nella variabile ω che è proprio la TdF del prodotto $x\cdot y$.

Passando ai limiti di integrazione $+\infty$ e $-\infty$, osserviamo che: (i) la funzione $e^{-i\omega t}\,x(t)$ deve annullarsi, altrimenti il segnale $x(t)$ non sarebbe Fourier-trasformabile; (ii) l'integrale coincide con la Tdf di $x(t)$. Quindi $\widehat{\dot{x}}(\omega) = i\,\omega\,\widehat{x}(\omega)$. ∎

L'integrale nella (4.12) definisce un'operazione tra due trasformate $\widehat{x}(\omega)$ e $\widehat{y}(\omega)$ denotata con $\widehat{x}(\omega) * \widehat{y}(\omega)$,

$$\boxed{\widehat{x}(\omega) * \widehat{y}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(\tau)\, \widehat{y}(\omega - \tau)\, d\tau} \tag{4.13}$$

chiamata **convoluzione**. Il simbolo $*$ prende il nome di **prodotto convolutivo**.

Il prodotto convolutivo soddisfa alle tipiche regole dell'ordinario prodotto numerico:

$$\begin{aligned} &x * y = y * x && \text{propr. commutativa} \\ &x * (a\, y + b\, z) = a\, x * y + b\, x * z && \text{propr. distributiva} \\ &x * (y * z) = (x * y) * z && \text{propr. associativa} \end{aligned} \tag{4.14}$$

La (4.12) può riscriversi

$$\boxed{\mathscr{F}[x \cdot y] = \mathscr{F}[x] * \mathscr{F}[y]} \tag{4.15}$$

oppure, con la notazione 'cappello',[4]

$$\boxed{\widehat{x \cdot y} = \widehat{x} * \widehat{y}} \tag{4.16}$$

Se invece consideriamo prima la convoluzione $x * y$ dei due segnali e poi eseguiamo la TdF, otteniamo la formula

$$\boxed{\mathscr{F}[x * y](\omega) = \mathscr{F}[x](\omega) \cdot \mathscr{F}[y](\omega)} \tag{4.17}$$

ovvero

$$\boxed{\widehat{x * y} = \widehat{x} \cdot \widehat{y}} \tag{4.18}$$

***

• (Utile esercizio) Dimostrazione della (4.12). Eseguiamo l'antitrasformata del secondo membro dell'uguaglianza

$$\widehat{x}(\omega) * \widehat{y}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(\tau)\, \widehat{y}(\omega - \tau)\, d\tau \tag{4.19}$$

che definisce il prodotto convolutivo $\widehat{x}(\omega) * \widehat{y}(\omega)$.

$$\mathscr{F}^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(\tau)\, \widehat{y}(\omega - \tau)\, d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(\tau)\, \widehat{y}(\omega - \tau)\, d\tau \right] e^{i\omega t}\, d\omega = ...$$

[4] Dimostrazione a fine paragrafo.

Esplicitiamo la trasformata di $\widehat{y}(\omega-\tau)$ utilizzando nuove variabili ω' e t':

$$\widehat{y}(\omega') = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t')\, e^{-i\omega' t'}\, dt', \quad \omega' = \omega - \tau.$$

Dunque:

$$\widehat{y}(\omega-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t')\, e^{-i(\omega-\tau)t'}\, dt'.$$

Segue:

$$... = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t')\, e^{-i(\omega-\tau)t'}\, dt' \right) d\tau \right] e^{i\omega t}\, d\omega = ...$$

Spezzo l'esponenziale, $e^{-i(\omega-\tau)t'} = e^{-i\omega\, t'}\, e^{i\tau\, t'}$, e riordino gli integrandi:

$$... = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\widehat{x}(\tau)\, e^{i\tau t'}\, d\tau \right) \left(y(t')\, e^{-i\omega t'}\, dt' \right) e^{i\omega t}\, d\omega = ...$$

Il primo integrando tra parentesi è l'antitrasformata di $\widehat{x}(\tau)$:

$$x(t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(\tau)\, e^{i\tau t'}\, d\tau.$$

Segue:

$$... = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\, y(t')\, e^{-i\omega t'}\, dt'\, e^{i\omega t}\, d\omega = ...$$

L'integrale in dt' è la trasformata di $x(t') \cdot y(t')$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\, y(t')\, e^{-i\omega t'}\, dt' = \widehat{x \cdot y}(\omega).$$

Segue:

$$... = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x \cdot y}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = ...$$

Quest'ultimo integrale è l'antitrasformata di $\widehat{x \cdot y}$:

$$... = x(t) \cdot y(t).$$

Dunque, ritornando alla (4.19), abbiamo dimostrato che

$$\mathscr{F}^{-1} \left(\widehat{x}(\omega) * \widehat{y}(\omega) \right) = x(t) \cdot y(t),$$

quindi che

$$\widehat{x}(\omega) * \widehat{y}(\omega) = \mathscr{F}[x(t) \cdot y(t)]. \quad \blacksquare$$

4.3 Le gaussiane

Una **gaussiana** è una funzione del tipo

$$G(t) = \beta\, e^{-\alpha t^2} \tag{4.20}$$

con α e β costanti reali positive. Osserviamo che $G(0) = \beta$ e che

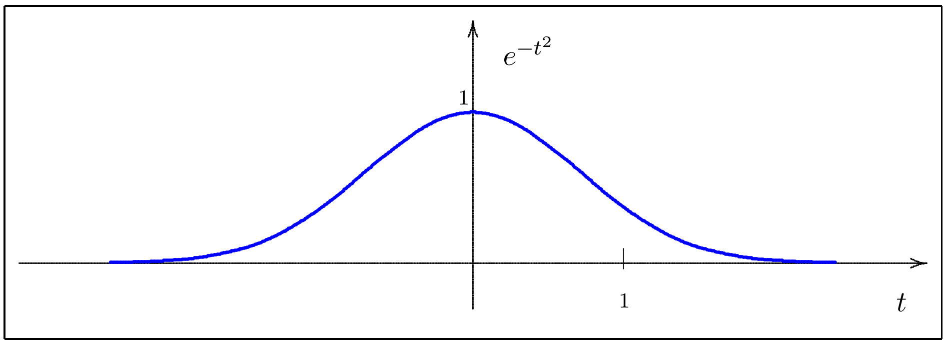
$$\frac{dG}{dt} = -2\,\beta\,\alpha\,t\,e^{-\alpha t^2} = -2\,\alpha\,t\,G. \tag{4.21}$$

Pertanto, la $G(t)$ può essere definita come quell'*unica* funzione che risolve il seguente problema di Cauchy:

$$\boxed{\frac{dG}{dt} + 2\,\alpha\,t\,G = 0, \quad G(0) = \beta} \tag{4.22}$$

La più semplice delle gaussiane è evidentemente

$$G(t) = e^{-t^2}.$$



Per questa gaussiana vale la formula[5]

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}} \tag{4.23}$$

Una delle tante proprietà rimarchevoli delle gaussiane è la seguente:

[5] Dimostrazione. Partiamo dall'integrale doppio

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\right)^2.$$

D'altra parte, in coordinate polari,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r\, e^{-r^2}\, dr$$
$$= 2\pi \int_0^{+\infty} \tfrac{1}{2}\, e^{-r^2}\, dr^2 = -\pi\, [e^{-r^2}]_0^{+\infty} = \pi. \quad \square$$

Teorema 4.3.1 – *La TdF di una gaussiana è ancora una gaussiana,*

$$G(t) = \beta\, e^{-\alpha t^2} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{G}(\omega) = \beta \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\alpha}\right) \tag{4.24}$$

Dimostrazione. La TdF di $G(t)$ è per definizione

$$\widehat{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t)\, e^{-i\omega t}\, dt. \tag{4.25}$$

Eseguiamo la derivata *sotto il segno di integrale* rispetto a ω:

$$\frac{d\widehat{G}}{d\omega} = -\, i \int_{-\infty}^{+\infty} t\, G(t)\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

Ricorrendo all'equazione caratteristica (4.22) quest'ultima uguaglianza diventa

$$\frac{d\widehat{G}}{d\omega} = \frac{i}{2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dG}{dt}\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

Ma l'integrale a secondo membro è la TdF della derivata dG/dt e, per la proprietà (4.8), possiamo scrivere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dG}{dt}\, e^{-i\omega t}\, dt = i\, \omega\, \widehat{G}(\omega)$$

per concludere che

$$\frac{d\widehat{G}}{d\omega} = \frac{i}{2\alpha}\, i\, \omega\, \widehat{G}(\omega) = -\frac{1}{2\alpha}\, \omega\, \widehat{G}(\omega),$$

cioè che

$$\frac{d\widehat{G}}{d\omega} + \frac{1}{2\alpha}\, \omega\, \widehat{G}(\omega) = 0.$$

Dunque la $\widehat{G}(\omega)$ soddisfa all'equazione caratteristica delle gaussiane (4.22): è essa stessa una gaussiana

$$\widehat{G}(\omega) = \beta'\, e^{-\alpha'\, \omega^2}$$

con

$$\alpha' = \frac{1}{2\alpha}.$$

Il coefficiente β' è dato, tenuto conto della (4.25), da

$$\beta' = \widehat{G}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta\, e^{-\alpha t^2}\, dt = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2}\, d(\sqrt{\alpha}\, t) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du$$

posto $u = \sqrt{\alpha} t$. Quindi, per la (4.23),

$$\beta' = \beta \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \quad \square$$

Ci sono due gaussiane di speciale importanza:

1. La **distribuzione normale di Gauss**,

$$G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\,\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\,\sigma^2}\right),$$

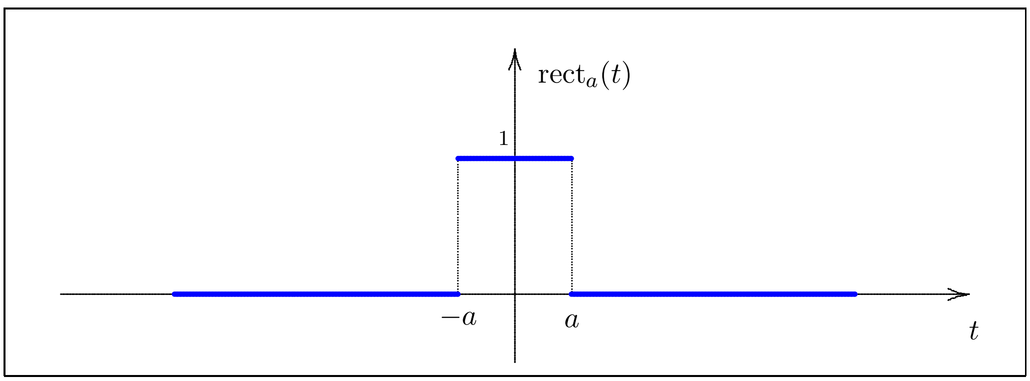
dove i parametri a e σ sono chiamati **media** e **deviazione standard**. Questa gaussiana è simmetrica rispetto a $x = a$.

2. La **distribuzione normale standard**, per cui $a = 0$ e $\sigma = 1$,

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

4.4 Impulso rettangolare e seno cardinale

Un **impulso** (**rettangolare**, **centrato**) è la funzione $\mathrm{rect}_a(t)$ rappresentata dal diagramma



Essa è definita da

$$\mathrm{rect}_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } \ |t| > a, \\ 1 & \text{per } \ |t| \le a. \end{cases}$$

La costante a è la semi-ampiezza dell'impulso. Calcoliamone la TdF. L'integrale 'improprio'

$$\mathscr{F}[\mathrm{rect}_a](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}_a(t)\,e^{-i\omega t}dt$$

si riduce all'integrale definito

$$\int_{-a}^{a} e^{-i\omega t}dt. \tag{4.26}$$

Calcoliamo il corrispondente integrale indefinito:

$$\int e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{-i\omega}\int e^{-i\omega t}d(-i\omega t) = \frac{1}{-i\omega}\int e^{u}\,du = \frac{1}{-i\omega}\,e^{u}$$

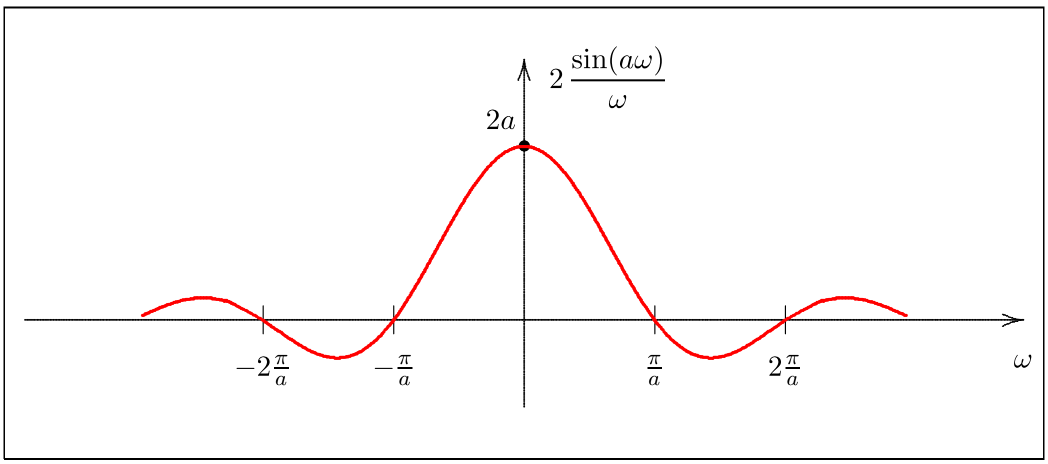
avendo posto $u = -i\,\omega\,t$. Dunque

$$\int e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{-i\omega}\, e^{-i\,\omega\,t}.$$

Ritornando all'integrale definito (4.26) vediamo che

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} e^{-i\omega t} dt &= \frac{1}{-i\omega}\,\Big[e^{-i\,\omega\,t}\Big]_{-a}^{a} = \frac{1}{-i\omega}\,\Big[e^{-i\,\omega\,a} - e^{i\,\omega\,a}\Big] \\
&= \frac{1}{-i\omega}\,\Big[\cos(-\omega a) + i\,\sin(-\omega a) - \cos(\omega a) - i\,\sin(\omega a)\Big] \\
&= \frac{1}{-i\omega}\,\Big[\cos(\omega a) - i\,\sin(\omega a) - \cos(\omega a) - i\,\sin(\omega a)\Big] \\
&= \frac{1}{-i\omega}\,\Big[-i\,\sin(\omega a) - i\,\sin(\omega a)\Big] = 2\,\frac{\sin(a\,\omega)}{\omega} = 2a\,\frac{\sin(a\,\omega)}{a\omega}.
\end{aligned}$$

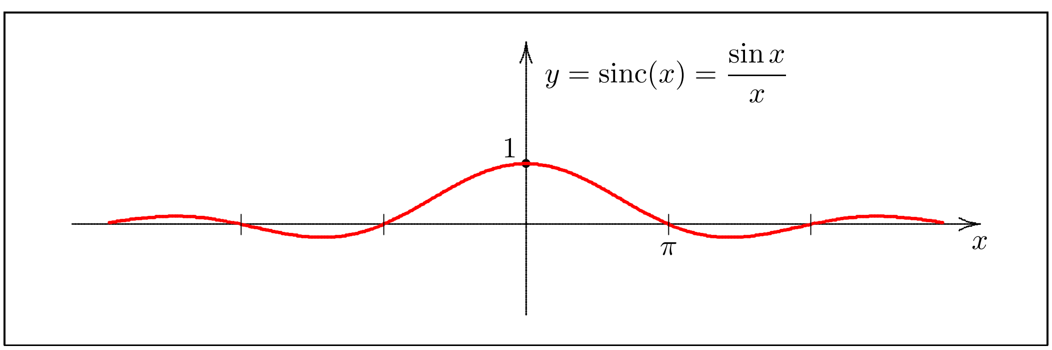
Questa è dunque la TdF di $\mathrm{rect}_a(t)$. Il suo grafico:



Questo risultato mette in evidenza la funzione **seno cardinale di** x

$$\boxed{\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}}$$

estesa per continuità a $x = 0$, dove assume valore 1, il cui grafico è



Con ciò abbiamo dimostrato che:

Teorema 4.4.1 – *La TdF della funzione impulso* $\mathrm{rect}_a(t)$ *è la funzione* $2\,a\,\mathrm{sinc}(a\omega)$*:*

$$\boxed{\mathscr{F}[\mathrm{rect}_a] = 2\,a\,\mathrm{sinc}(a\omega)} \tag{4.27}$$

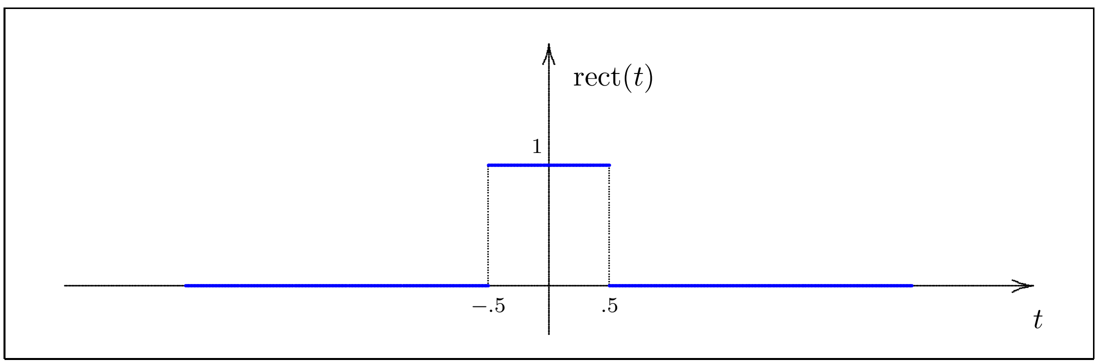
Insieme al seno cardinale si usa sovente il **seno cardinale normalizzato** definito da

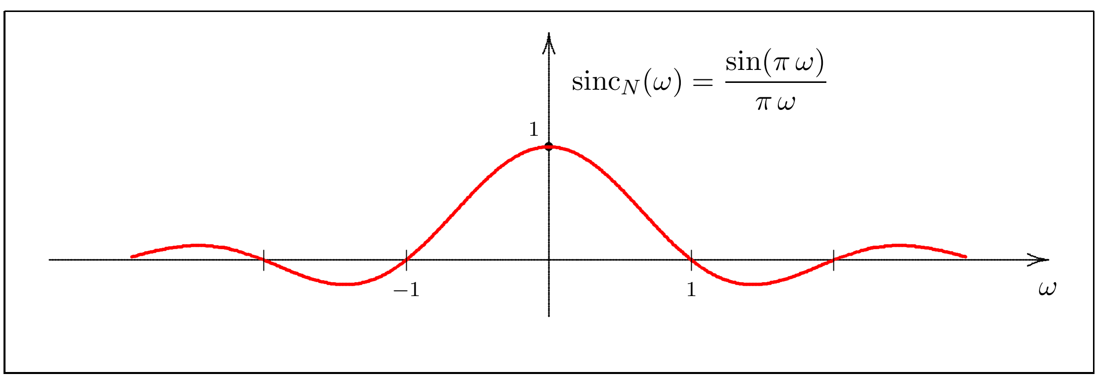
$$\boxed{\mathrm{sinc}_N(x) = \frac{\sin(\pi\,x)}{\pi\,x}}$$

Si dimostra (in maniera analoga a quanto visto sopra) che:

Teorema 4.4.2 – *La funzione* $\mathrm{sinc}_N(\omega)$ *è la TdF dell'***impulso quadrato unitario** *definito da*

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 0 & \textit{per } \ |t| > \frac{1}{2}, \\ 1 & \textit{per } \ |t| \le \frac{1}{2}. \end{cases}$$





4.5 Teorema del campionamento (Nyquist-Shannon)

Il **campionamento** di un **segnale analogico** [6] $x(t)$, definito in un intervallo di tempo t comunque esteso, consiste nella suddivisione di tale intervallo in tante **finestre** successive ed adiacenti. In ognuna di tali finestre, si preleva poi il valore del segnale ad intervalli regolari di ampiezza τ.

Nella Fig. 1 viene mostrata una **finestra** che copre il segnale $x(t)$ in un intervallo temporale $[a, b]$. Per 'snellire' alcune formule che troveremo nel seguito, e senza venir meno alla generalità, possiamo considerare un intervallo simmetrico $[a, b] = [-n_*\tau, n_*\tau]$, dove τ è l'**intervallo di campionamento** ed n_* un numero intero positivo. Fuori dalla finestra il segnale è da ritenersi nullo.

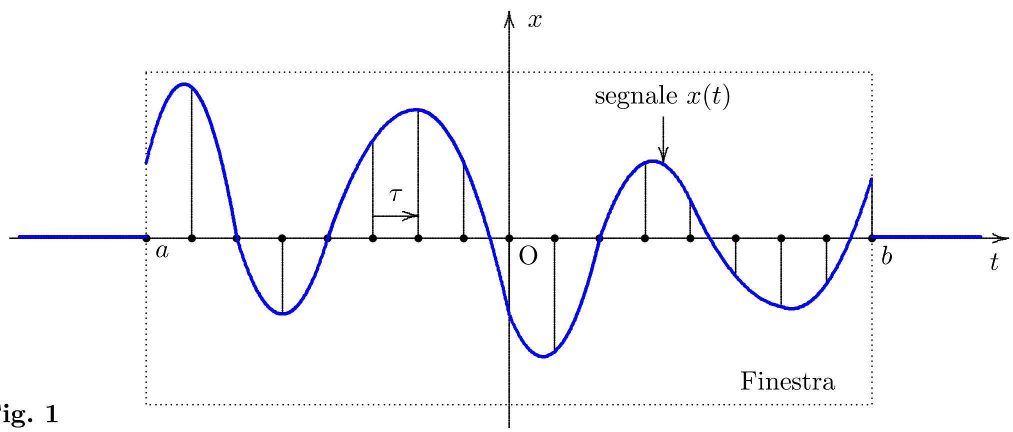


Fig. 1

Si ottiene un **segnale campionato** o **digitalizzato** costituito da soli impulsi, ovvero da una *sequenza di numeri*, Fig. 2:

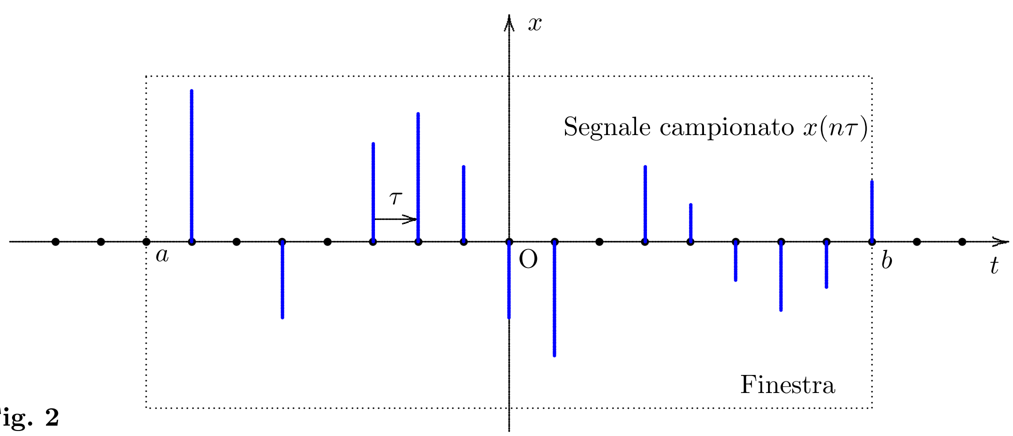


Fig. 2

[6] Cioè di una funzione continua.

Si osservi che, pur essendo interessati soltanto a ciò che avviene all'interno della finestra, sull'asse t della Fig. 2 abbiamo indicato anche alcuni campionamenti all'esterno, di valore zero. Ciò renderà più comprensibili alcuni ragionamenti che faremo in seguito.

Il campionamento è l'operazione di base nel passaggio AD, analogico/digitale, di un segnale $x(t)$. Il segnale viene elaborato in finestre adiacenti successive, di ampiezza opportuna. Per una data finestra il segnale campionato o **digitalizzato**, essendo una sequenza di numeri, può essere trasmesso (o elaborato) più facilmente e senza errori, anche in contemporanea con altri segnali. Il segnale digitalizzato dovrà poi essere riconvertito dal ricevente in un segnale analogico: passaggio DA. C'è da presumere che in questo doppio passaggio, AD/DA, si abbia una qualche *perdita di fedeltà*. Sussiste tuttavia un teorema – il teorema del campionamento, appunto[7] – che sotto certe condizioni consente la *ricostruzione sufficientemente fedele* del segnale analogico a partire da quello digitalizzato. Questo passaggio DA è basato sulla seguente definizione e sul successivo teorema.

Definizione 4.5.1 – *Un segnale $x(t)$ si dice* **a banda limitata** *se è Fourier–trasformabile e se esiste un numero positivo ω_B, detto* **limite di banda**, *tale che*

$$\widehat{x}(\omega) = 0 \qquad \text{per} \quad |\omega| > \omega_B. \tag{4.28}$$

Teorema 4.5.1 – *Sia $x(t)$ un segnale campionato nella finestra $[-\infty, +\infty]$,[8] a banda limitata con limite di banda ω_B. Se il campionamento è fatto con intervallo di campionamento*[9]

$$\boxed{\tau = \frac{\pi}{\omega_B}} \tag{4.29}$$

allora il segnale è fedelmente ricostruibile dalla sequenza dei suoi campioni $x(n\tau)$ con la **formula di ricostruzione**

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\tau)\, \mathrm{sinc}_N \left(\frac{t}{\tau} - n\right)} \tag{4.30}$$

dove sinc_N *è la funzione seno cardinale normalizzato.*

Osservazione 4.5.1 – Questa formula di ricostruzione è espressa da una serie nella quale i valori $x(n\tau)$ sono i valori digitalizzati del segnale. Se però ci riferiamo ad una finestra, i valori diditalizzati al di fuori di questa sono tutti nulli, come si è detto a proposito della Fig. 2; quindi la serie si riduce ad una somma finita. •

---

[7] *Sampling theorem.*

[8] È chiaro che il risultato del teorema che stiamo enunciando dovrà poi, per la sua concreta applicazione, essere adattato ad una finestra di ampiezza finita.

[9] O anche inferiore a questo. Lo si vede modificando leggermente la dimostrazione.

Dimostrazione. Si parte dalla TdF del segnale $x(t)$

$$\widehat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

La dimostrazione si basa sulla rappresentazione mediante la serie di Fourier complessa della funzione $\widehat{x}(\omega)$ nell'intervallo $[-\omega_B, \omega_B]$, al di fuori del quale, per l'ipotesi di banda limitata, $\widehat{x}(\omega) = 0$:[10]

$$\widehat{x}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp \frac{i\, n\, \pi\, \omega}{\omega_B}, \tag{4.31}$$

con i coefficienti definiti da

$$c_n = \frac{1}{2\omega_B} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \widehat{x}(\omega) \exp \frac{-in\pi\, \omega}{\omega_B}\, d\omega. \tag{4.32}$$

Siccome vale la (4.29) possiamo scrivere

$$\widehat{x}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{in\tau\omega}, \tag{4.33}$$

$$c_n = \frac{1}{2\omega_B} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \widehat{x}(\omega)\, e^{-in\tau\omega}\, d\omega. \tag{4.34}$$

La dimostrazione consiste in due passaggi successivi. Il primo passaggio $\boxed{1}$ consiste nel dimostrare che i coefficienti c_n sono eprimibili mediante i valori campionati del segnale $x(t)$ con la formula

$$\boxed{c_n = \tau\, x(-n\tau)} \tag{4.35}$$

Utilizzando questa formula la trasformata (4.33) assume la forma

$$\widehat{x}(\omega) = \tau \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n\tau)\, e^{in\tau\omega}. \tag{4.36}$$

Il secondo passaggio $\boxed{2}$ consiste nell'antitrasformare la funzione $\widehat{x}(\omega)$ data da (4.36), per ottenere $x(t)$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega. \tag{4.37}$$

[10] Applichiamo le formule del primo teorema del §2 del capitolo sulle serie di Fourier, dove ora è $L = \omega_B$ e $t = \omega$.

Cominciamo col dimostrare questo secondo passaggio $\boxed{2}$. Per la condizione di banda limitata (4.28) l'integrale (4.37) si può limitare all'intervallo finito $[-\omega_B, \omega_B]$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_B}^{\omega_B} \widehat{x}(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_B}^{\omega_B} \tau \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n\tau)\, e^{in\tau\omega}\, e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{\tau}{2\pi}\int_{-\omega_B}^{\omega_B} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n\tau)\, e^{in\tau\omega}\, e^{i\omega t} d\omega = ... \end{aligned}$$

Permuto la sommatoria con l'integrale:

$$... = \frac{\tau}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n\tau) \int_{-\omega_B}^{\omega_B} e^{in\tau\omega}\, e^{i\omega t} d\omega = ...$$

Accorpo gli esponenziali:

$$... = \frac{\tau}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n\tau) \int_{-\omega_B}^{\omega_B} e^{i(n\tau+t)\,\omega}\, d\omega = ... \tag{4.38}$$

Valuto l'integrale indefinito e uso la formula di Euler:

$$\begin{aligned} &\int e^{i(n\tau+t)\,\omega}\, d\omega = \frac{1}{i(n\tau+t)}\int e^{i(n\tau+t)\,\omega}\, d[i(n\tau+t)\omega] = \frac{e^{i(n\tau+t)\,\omega}}{i(n\tau+t)} + c \\ &= \frac{1}{i(n\tau+t)}\Big[\cos[(n\tau+t)\,\omega] + i\,\cos[(n\tau+t)\,\omega]\Big] + c. \end{aligned}$$

Segue, tenendo conto che il coseno è una funzione dispari e il seno è pari:

$$\begin{aligned} &\int_{-\omega_B}^{\omega_B} e^{i(n\tau+t)\,\omega}\, d\omega = \frac{1}{i(n\tau+t)}\Big[\cos[(n\tau+t)\,\omega] + i\,\sin[(n\tau+t)\,\omega]\Big]_{-\omega_B}^{\omega_B} \\ &= \frac{1}{i(n\tau+t)}\Big[2\,i\,\sin[(n\tau+t)\,\omega_B]\Big] \\ &= 2\,\frac{\sin[(n\tau+t)\,\omega_B]}{n\tau+t}. \end{aligned}$$

Inserendo questo risultato nella (4.38) troviamo che

$$x(t) = \frac{\tau}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n\tau)\,\frac{\sin[(n\tau+t)\,\omega_B]}{n\tau+t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n\tau)\,\frac{\sin[(n\tau+t)\,\omega_B]}{\frac{\pi}{\tau}\,(n\tau+t)}$$

Qui entra in gioco l'ipotesi (4.29), per cui

$$\omega_B = \frac{\pi}{\tau}, \qquad (n\tau+t)\,\omega_B = \pi\left(n + \frac{t}{\tau}\right).$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n\tau)\,\frac{\sin\left[\pi\left(n+\dfrac{t}{\tau}\right)\right]}{\pi\left(n+\dfrac{t}{\tau}\right)}.$$

Basta infine cambiare n in $-n$, cosa che è lecita perché la sommatoria su n va da $-\infty$ a $+\infty$, per ottenere la formula di ricostruzione (4.30).

Ritorniamo ora al passaggio $\boxed{1}$, dimostrazione della (4.35) a partire dalla (4.32):

$$c_n = \frac{1}{2\omega_B}\int_{-\omega_B}^{\omega_B} \widehat{x}(\omega)\,\exp\frac{-in\pi\,\omega}{\omega_B}\,d\omega.$$

Facendo intervenire ancora una volta l'ipotesi di limitazione di banda di $x(t)$, per cui $\widehat{x}(\omega)$ si annulla fuori dell'intervallo di integrazione $[-\omega_B, \omega_B]$, in questa formula l'integrazione si può estendere all'infinito:

$$c_n = \frac{1}{2\omega_B}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(\omega)\,e^{-in\tau\omega}\,d\omega. \tag{4.39}$$

Richiamiamo la definizione di antitrasformata,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(\omega)\,e^{i\omega t}d\omega, \tag{4.40}$$

e poniamo $t = -n\,\tau$. Troviamo:

$$x\,(-n\,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(\omega)\,e^{-in\tau\,\omega}\,d\omega.$$

Ma dall'uguaglianza (4.29) si trae $\pi = \tau\,\omega_B$, e quindi

$$x\,(-n\,\tau) = \frac{1}{2\tau\omega_B}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(\omega)\;e^{-in\tau\,\omega}\,d\omega,$$

Dal confronto di questo risultato con la (4.39) segue appunto la (4.35). ∎