

Complementi di Analisi per Informatica

Capitolo 6 Trasformata di Laplace

SERGIO BENENTI

Prima versione settembre 2013. Revisione settembre 2017.



Pierre Simon marchese di Laplace
(1749 – 1827)

Indice

6.1	Definizione	1
6.2	Convergenza dell'integrale di Laplace	1
6.3	Proprietà fondamentali della trasformata di Laplace	3
6.4	Trasformate di funzioni di uso corrente	5
6.5	L'antitrasformata di Laplace	10
6.6	Applicazioni alle equazioni differenziali	12

6.1 Definizione

La **trasformata di Laplace** (TdL) è uno strumento matematico che ha le stesse finalità della trasformata di Fourier: tradurre un problema formulato nel dominio del tempo in uno equivalente nel dominio complesso (dove, si spera, esso possa essere più facilmente affrontato e risolto).

La TdL opera su segnali $x(t)$, anche a valori complessi, definiti da $t = 0$ fino a $+\infty$: $t \in [0, +\infty)$ e restituisce una funzione $\mathcal{L}x(s)$ di variabile complessa s definita dall'integrale

$$(6.1) \quad \mathcal{L}x(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C}$$

detto **integrale di Laplace**. Se questo integrale è convergente si dice che il segnale $x(t)$ è **\mathcal{L} -trasformabile** e la funzione $\mathcal{L}x(s)$ prende il nome **trasformata di Laplace** o **\mathcal{L} -trasformata**) di $x(t)$.¹ Si usa dire che la TdL fa passare dal **dominio reale**, o **dominio del tempo**, al **dominio complesso** o **dominio di Laplace**.

Osservazione 6.1.1 – Se si confronta la definizione della trasformata di Laplace (6.1)

$$(6.2) \quad \mathcal{L}[x(t)](s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C},$$

con quella della trasformata di Fourier

$$(6.3) \quad \mathcal{F}[x(t)](\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

si osserva che:

(i) Il limite inferiore dell'integrale di Laplace (6.2) può essere portato a $-\infty$ pur di considerare il segnale $x(t) = 0$ per ogni $t < 0$. Questo è conforme al fatto che la TL nasce come *operatore su segnali che hanno un inizio* ($t = 0$).

(ii) Volendo considerare ω reale, come accade nella maggior parte delle applicazioni all'ingegneria, le due trasformate si differenziano soltanto dal fatto che nel primo esponenziale e^{-st} la variabile s è complessa, mentre nel secondo $e^{-i\omega t}$ è immaginaria. •

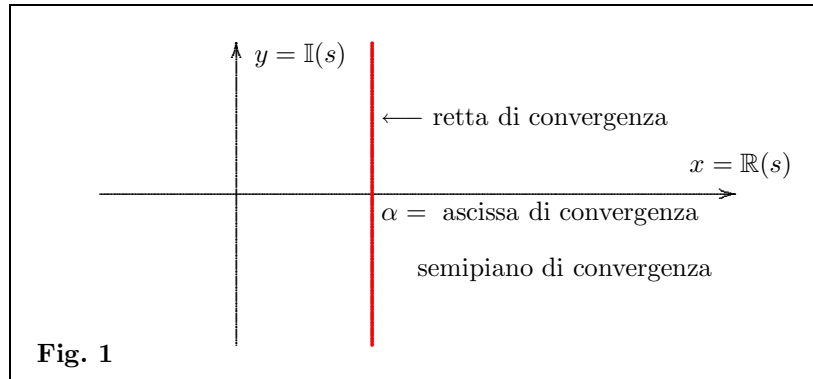
6.2 Convergenza dell'integrale di Laplace

Teorema 6.2.1 – Per ogni funzione \mathcal{L} -trasformabile $x(t)$ risulta definita una **ascissa di convergenza** α , che può essere un numero reale oppure $-\infty$, tale che l'integrale di Laplace è convergente nel semipiano $\Re(s) > \alpha$, non convergente sul semipiano $\Re(s) < \alpha$.²

¹ Nell'ambito della teoria della trasformata di Laplace è tradizione denotare la variabile complessa con s , o anche con p , anziché con z .

² Col simbolo $\Re(s)$ si denota la parte reale di s . Nulla si può dire a priori sulla convergenza nei punti dove $\Re(s) = \alpha$.

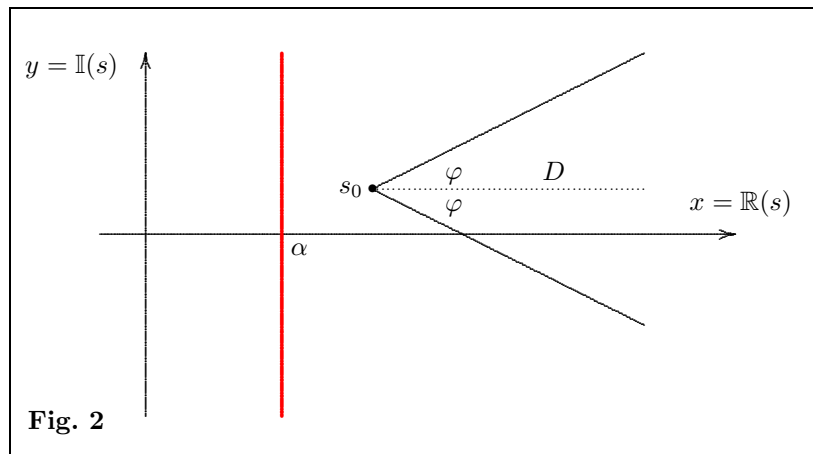
La retta $x = \alpha$ parallela all'asse immaginario y , dove $\Re(s) = \alpha$, prende il nome di **retta di convergenza** (Fig. 1).



Teorema 6.2.2 – Se l'integrale di Laplace di una funzione $x(t)$ converge in un punto s_0 allora esso converge uniformemente in ogni **campo angolare** D avente per vertice il punto s_0 ; inoltre $\hat{x}(s)$ è limitata in D , esiste cioè un numero positivo M tale da aversi

$$|\hat{x}(s)| \leq M \quad \text{per ogni } s \in D.$$

Un campo angolare D di vertice s_0 è una regione del piano complesso delimitata da due semirette uscenti da s_0 formanti con la direzione positiva dell'asse x uno stesso angolo $\varphi < \frac{1}{2}\pi$ (Fig. 2). Il dominio D comprende anche queste due semirette.



6.3 Proprietà fondamentali della trasformata di Laplace

TABELLA 1 – Proprietà fondamentali della trasformata di Laplace			
	Proprietà	$x(t)$	$\mathcal{L}x(s)$
[1]	Linearità	$\sum_{k=1}^n a_k x_k(t)$	$\sum_{k=1}^n a_k \mathcal{L}x_k(s)$
[2]	Derivazione	$\frac{dx}{dt}$	$s \mathcal{L}x(s) - x(0)$
[3]	Integrazione	$\int_0^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} \mathcal{L}x(s)$
[4]	Riscalamento	$x(at)$	$\frac{1}{ a } \mathcal{L}x\left(\frac{s}{a}\right)$
[5]	Traslazione nel tempo $\tau > 0$	$\begin{cases} x(t) = f(t - \tau) & \text{per } t \geq \tau \\ x(t) = 0 & \text{per } t < \tau \end{cases}$	$e^{-\tau s} \mathcal{L}f(s)$
[6]	Traslazione complessa	$e^{at}x(t)$	$[\mathcal{L}x](s - a)$
[7]	Derivazione complessa	$t x(t)$	$-\frac{d\mathcal{L}x}{ds}$
[8]	Integrazione complessa	$\frac{x(t)}{t}$	$\int_s^{+\infty} \mathcal{L}x(s) ds$
[9]	Convoluzione	$(x * y)(t) = \int_0^t x(\tau) y(t - \tau) d\tau$	$\mathcal{L}[x * y] = \mathcal{L}x \cdot \mathcal{L}y$

- [2] Posto che, per la definizione (6.1),

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt,$$

applicando il metodo di integrazione per parti, si ha successivamente:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt &= \int_0^{+\infty} e^{-st} df = [e^{-st} f(t)]_{0+}^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t) de^{-st} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} [e^{-st} f(t)] - f(0+) + s \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} [e^{-st} f(t)] - f(0+) + s \mathcal{L}f(s). \end{aligned}$$

4

Se

$$(6.4) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} [e^{-st} f(t)] = 0,$$

si ricava la [2].

• [3] Consideriamo una primitiva qualsiasi $F(t)$ di $f(t)$. Applicando il risultato [2] alla funzione $F(t)$ si ottiene

$$x(t) = \frac{dF}{dt} \implies \mathcal{L}x(s) = s \mathcal{L}F(s) - F(0).$$

Ma, per definizione di primitiva, è $dF/dt = f$. Otteniamo quindi l'uguaglianza

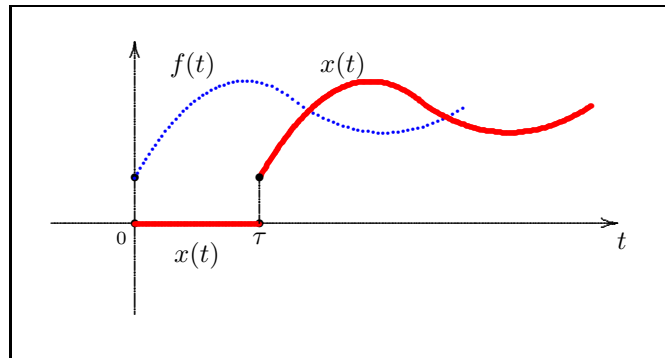
$$\mathcal{L}f(s) = s \mathcal{L}F(s) - F(0)$$

ovvero

$$(6.5) \quad \boxed{\mathcal{L}F(s) = \frac{\mathcal{L}f(s) + F(0)}{s}}$$

Nel caso in cui $F(0) = 0$ si ottiene la [3].

- [4] Esercizio.
- [5] Funzione traslata:



$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt &= \int_{\tau}^{+\infty} f(t - \tau) e^{-st} dt = \dots \quad \text{Pongo } t - \tau = u: \\ \dots &= \int_0^{+\infty} f(u) e^{-s(\tau+u)} du = e^{-s\tau} \int_0^{+\infty} f(u) e^{-su} du e^{-as} \mathcal{L}x(s). \end{aligned}$$

- [6] Esercizio.
- [7] Esercizio.
- [8] Esercizio.
- [9] Convolutione: fissato t , la convoluzione può essere intesa come la media pesata da 0 a t della funzione $x(\tau)$ con peso $y(t - \tau)$.

6.4 Trasformate di funzioni di uso corrente

La TABELLA 2 elenca le trasformate di alcune delle funzioni di più frequente utilizzo. Nell'ultima colonna è riportata l'ascissa di convergenza α .

TABELLA 2 – Trasformate di Laplace di funzioni di uso corrente.				
	Funzione	$x(t)$	$\mathcal{L}x(s)$	α
[1]	Potenza	t^p	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^2}$	0
[1a]	Caso particolare $p = n$	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0
[1b]	Caso particolare $p = 0$	1	$\frac{1}{s}$	0
[1c]	Caso particolare $p = 1$	t	$\frac{1}{s^2}$	0
[2]	Esponenziale	$e^{ct}, c \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{s-c}$	$\mathbb{R}(c)$
[2a]	Caso particolare $c = i\omega$	$e^{i\omega t}, \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{s-i\omega}$	0
[3]	Funzioni modali	$t^n e^{ct}, c \in \mathbb{C}$	$\frac{n!}{(s-c)^{n+1}}$	$\mathbb{R}(c)$
[4]	Seno	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	0
[5]	Coseno	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	0
[6]	Seno iperbolico	$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$	$ \omega $
[7]	Coseno iperbolico	$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$	$ \omega $
[8]	Seno per esponenziale	$e^{ct} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-c)^2 + \omega^2}$	
[9]	Coseno per esponenziale	$e^{ct} \cos(\omega t)$	$\frac{s-c}{(s-c)^2 + \omega^2}$	

- [1] La funzione Γ è una estensione a numeri non interi della funzione fattoriale:

$$\Gamma(p+1) = p \Gamma(p).$$

È definita da

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx.$$

- [2] $\mathcal{L}e^{ct} = \int_0^{+\infty} e^{ct} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{(c-s)t} dt = \frac{1}{c-s} \left[e^{(c-s)t} \right]_{t=0}^{+\infty} = \dots$

Se $s > c$ $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(c-s)t} = 0 \implies \dots = \frac{-1}{c-s}$.

- [3] $\mathcal{L}(t^n e^{ct}) = \int_0^{+\infty} t^n e^{ct} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} t^n e^{(c-s)t} dt = \dots$

Integrazione per parti:

$$\int t^n e^{(c-s)t} dt = \frac{1}{n+1} \int e^{(c-s)t} dt^{n+1} = \frac{1}{n+1} \left[e^{(c-s)t} t^{n+1} - \int t^{n+1} de^{(c-s)t} \right]$$

$$= \frac{1}{n+1} \left[e^{(c-s)t} t^{n+1} - (c-s) \int t^{n+1} e^{(c-s)t} dt \right] \implies$$

$$\dots = \frac{1}{n+1} \left\{ \left[e^{(c-s)t} t^{n+1} \right]_{t=0}^{+\infty} - (c-s) \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{(c-s)t} dt \right\} = \dots$$

Se $s > c$ $\lim_{t \rightarrow +\infty} [e^{(c-s)t} t^{n+1}] = 0 \implies [e^{(c-s)t} t^{n+1}]_{t=0}^{+\infty} = 0 \implies$

$$\dots = \frac{s-c}{n+1} \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{(c-s)t} dt = \frac{s-c}{n+1} \mathcal{L}(t^{n+1} e^{ct}).$$

Si trova la formula ricorsiva

$$\mathcal{L}(t^{n+1} e^{ct}) = \frac{n+1}{s-c} \mathcal{L}(t^n e^{ct})$$

soddisfatta da $\mathcal{L}(t^n e^{ct}) = \frac{n!}{(s-c)^{n+1}}$.

- [4], [5] Per la [2a] $\mathcal{L}[\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] = \mathcal{L}e^{i\omega t} = \frac{1}{s-i\omega} = \frac{s+i\omega}{s^2+\omega^2}$.

Per la linearità di \mathcal{L} : $\mathcal{L}[\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] = \mathcal{L} \cos(\omega t) + i \mathcal{L} \sin(\omega t)$.

Uguagliando parte reale e parte immaginaria si trovano [4] e [5].

- [6], [7] Per la linearità e la [2]:

$$\mathcal{L} \sinh(\omega t) = \frac{1}{2} [\mathcal{L}e^{\omega t} - \mathcal{L}e^{-\omega t}] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s+\omega} \right] = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2}.$$

$$\mathcal{L} \cosh(\omega t) = \frac{1}{2} [\mathcal{L}e^{\omega t} + \mathcal{L}e^{-\omega t}] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-\omega} + \frac{1}{s+\omega} \right] = \frac{s}{s^2 - \omega^2}.$$

- [8], [9] Usiamo la proprietà di raslazione complessa [5] della Tabella 1, $\mathcal{L}[e^{at}x(t)] = [\mathcal{L}x](s-a)$, con $x(t) = \sin(\omega t)$ e $a = c$:

$$\mathcal{L}[e^{ct} \sin(\omega t)] = [\mathcal{L} \sin(\omega t)](s-c) = \left[\frac{\omega}{s^2 - \omega^2} \right]_{s \rightarrow s-c} = \frac{\omega}{(s-c)^2 - \omega^2}.$$

Analogamente per il coseno.

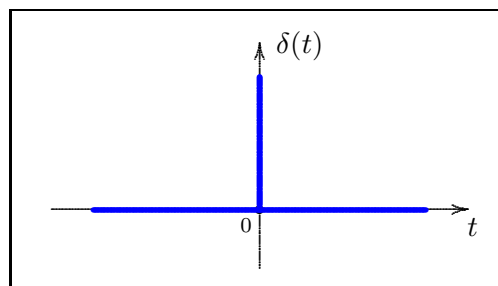
Nella TABELLA 3 sono elencate le TL di segnali impulsivi e perturbativi.

TABELLA 3 – Trasformate di Laplace di impulsi, gradini e rampe.				
	Funzione	$x(t)$	$\mathcal{L}x(s)$	α
[1]	Delta di Dirac	$\delta(t)$	1	$-\infty$
[2]	Delta di Dirac ritardata	$\delta_\tau(t) = \delta(t - \tau)$	$e^{-\tau s}$	$-\infty$
[3]	Gradino unitario	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	0
[4]	Gradino unitario ritardato	$u(t - \tau), \tau > 0$	$\frac{1}{s} e^{-\tau s}$	0
[5]	Impulso rettangolare unitario	$\text{rect}_\tau(t)$	$\frac{1}{s} (1 - e^{-\tau s})$	0
[6]	Impulso quadrato unitario	$\text{rect}_1(t)$	$\frac{1}{s} (1 - e^{-s})$	0
[7]	Rampa unitaria	$r_u(t) = t u(t)$	$\frac{1}{s^2}$	0
[8]	Rampa parabolica	$r_p(t) = \frac{1}{2} t^2 u(t)$	$\frac{1}{s^3}$	0

• [1] **Delta di Dirac** $\delta(t)$. La delta di Dirac non è una funzione in senso ordinario, bensì una funzione ‘in senso generalizzato’: essa è definibile in maniera rigorosa nell’ambito della **teoria delle distribuzioni** (Capitolo 7). Tuttavia, al di fuori di questa teoria, essa può essere definita dalla **proprietà caratteristica**:

$$(6.6) \quad \int_0^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

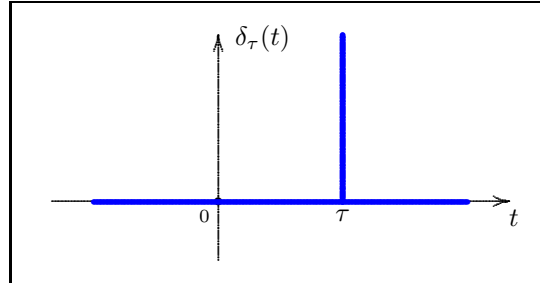
ed il suo grafico può essere pensato costituito da tutto l’asse x e dal semiasse positivo $y \geq 0$.



L'integrale di Laplace (6.1) è dunque facilmente calcolabile:

$$(6.7) \quad \mathcal{L}\delta(s) = \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s \cdot 0} = 1.$$

- [2] **Delta di Dirac ritardata** $\delta_\tau(t) = \delta(t - \tau)$, con $\tau > 0$:



Per la δ ritardata valgono formule analoghe alla (6.6) e (6.7):

$$(6.8) \quad \int_0^{+\infty} \delta(t - \tau) f(t) dt = f(\tau)$$

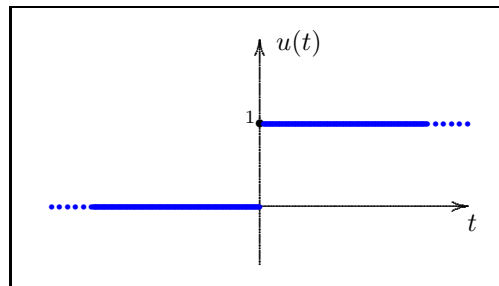
$$(6.9) \quad \mathcal{L}\delta_\tau(s) = \int_0^{+\infty} \delta(t - \tau) e^{-st} dt = e^{-\tau s}$$

Osservazione 6.4.1 – Richiamata la definizione di convoluzione, l'equazione (6.8)

$$\int_0^{+\infty} x(t) \delta(t - \tau) dt = x(\tau)$$

mostra che la convoluzione di un segnale $x(t)$ con un impulso ritardato al tempo τ fornisce il valore del segnale al tempo τ . •

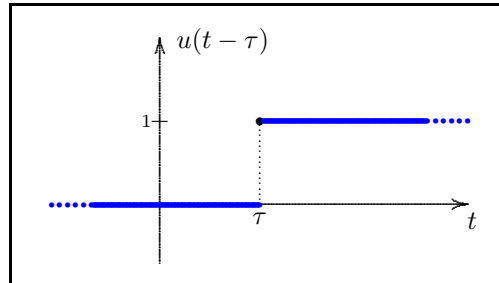
- [3] e [4]. **Gradino unitario** (o di **Heaviside**): $u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0, \\ 0 & \text{se } t < 0. \end{cases}$



Per cui, con $\tau > 0$,

$$u(t - \tau) = \begin{cases} 1 & \text{se } t - \tau \geq 0 \text{ cioè } t \geq \tau, \\ 0 & \text{se } t - \tau < 0 \text{ cioè } t < \tau, \end{cases}$$

è il **gradino unitario ritardato**.



Per $x(t) = u(t)$ l'integrale di Laplace (6.1) diventa:

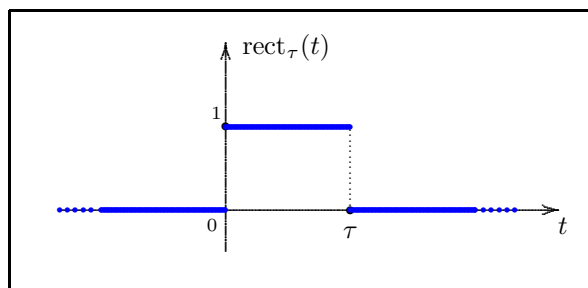
$$\mathcal{L}x(s) = \int_0^{+\infty} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} [e^{-st}]_0^{+\infty} = \dots$$

Posto $s = a + ib$, abbiamo $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-st} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(a+ib)t} = 0$ se e solo se $a > 0$: parte reale di s positiva. In tal caso $\dots = \frac{1}{s}$.

Per $x(t) = u(t - \tau)$ abbiamo

$$\mathcal{L}x(s) = \int_0^{+\infty} u(t - \tau) e^{-st} dt = \int_{\tau}^{+\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} [e^{-st}]_{\tau}^{+\infty} = \frac{1}{s} e^{-\tau s}.$$

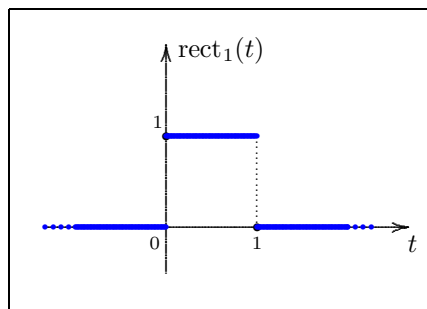
- [5] e [6]. **Impulso rettangolare unitario** di ampiezza τ : $\text{rect}_{\tau}(t)$.



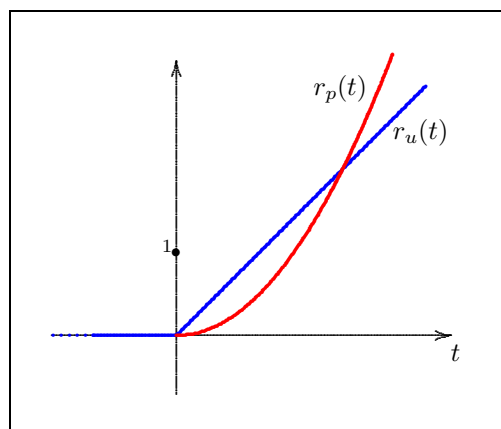
Si noti che $\text{rect}_{\tau}(t) = h(t) - h(t - \tau)$. Quindi la sua trasformata risulta essere:

$$\mathcal{L}[\text{rect}_{\tau}](s) = \frac{1}{s} - e^{\tau s} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} (1 - e^{\tau s}).$$

Per $a = 1$ otteniamo l'**impulso quadrato unitario** $\text{rect}_1(t)$:



- [7] e [8]. **Rampa unitaria e rampa parabolica:**



$$\mathcal{L}r_u(s) = \int_0^{+\infty} t u(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} t e^{-st} dt = \mathcal{L}t(s) = \frac{1}{s^2}.$$

$$\mathcal{L}r_p(s) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^2 u(t) e^{-st} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-st} dt = \frac{1}{2} \mathcal{L}t^2(s) = \frac{1}{2} \frac{2!}{s^3} = \frac{1}{s^3}.$$

6.5 L'antitrasformata di Laplace

Il passaggio inverso alla TdL, dal **dominio complesso** al **dominio reale**, prende il nome di **antitrasformata** (o **trasformata inversa**) di Laplace ed è denotata con \mathcal{L}^{-1} . Si dimostra che

$$(6.10) \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}F(s) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\alpha-i\beta}^{\alpha+i\beta} e^{st} F(s) ds,$$

dove α è un qualunque numero reale tale che il contorno del cammino di integrazione (sul piano complesso) sia tutto contenuto nella regione di convergenza della $F(s)$.

Leggendo al contrario le Tabelle 2 e 3 si ha un primo elenco di antitrasformate:

TABELLA 4 – Primo elenco di antitrasformate	
$\mathcal{L}x(s)$	$x(t)$
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n
$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t)$
$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega t)$
$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$	$\sinh(\omega t)$
$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$	$\cosh(\omega t)$
$\frac{\omega}{(s - c)^2 + \omega^2}$	$e^{ct} \sin(\omega t)$
$\frac{s - c}{(s - c)^2 + \omega^2}$	$e^{ct} \cos(\omega t)$
$\frac{1}{s}$	$h(t)$ (gradino unitario)
1	$\delta(t)$ (delta di Dirac)
$\frac{1}{s^2}$	t (rampa unitaria)

Va osservato che:

1. Data una funzione $f(s)$, non sempre esiste un segnale $x(t)$ di cui $f(s)$ è la TL, cioè tale che $\widehat{x}(s) = f(s)$. Ad esempio, se la $f(s)$ non soddisfa alle condizioni descritte dai Teoremi 6.2.1 e 6.2.2 allora è **non-antitrasformabile**.

2. Nella maggior parte delle applicazioni le funzioni da antitrasformare sono delle **funzioni razionali proprie**, cioè rapporti di due polinomi in s ,

$$(6.11) \quad f(s) = \frac{A_m(s)}{B_n(s)} = \frac{\text{polinomio di grado } m}{\text{polinomio di grado } n}$$

a coefficienti tutti reali e dove il grado del numeratore è inferiore al grado del denominatore: $m < n$. Una funzione razionale si dice **impropria** se $m \geq n$. Le radici del polinomio numeratore $A_m(s)$ si dicono **zeri** della funzione razionale $f(s)$; le radici del polinomio denominatore $B_n(s)$ si dicono **poli** di $f(s)$. Anche se i coefficienti di questi polinomi sono a coefficienti reali, gli zeri e i poli possono essere complessi.

3. I polinomi e le funzioni razionali improprie non sono antitrasformabili. Infatti queste funzioni non soddisfano al Teorema 6.2.2 e quindi non possono derivare da una TL di un qualche segnale.

4. Per antitrasformare funzioni razionali proprie

$$(6.12) \quad f(s) = \frac{A_m(s)}{B_n(s)}, \quad \text{con } m < n$$

occorre preliminarmente ‘tradurle’ in somme di **frazioni elementari** (dette anche **frazioni parziali**) del tipo

$$(6.13) \quad \frac{c}{(s-p)^r}$$

con r potenza intera positiva, c e p costanti (in generale complesse), *perché di queste frazioni si conosce l’antitrasformata:*

$$(6.14) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-p)^r} \right] = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{pt}$$

6.6 Applicazioni alle equazioni differenziali

La proprietà (Tabella 1)

$$\mathcal{L}[\dot{x}] = s \mathcal{L}[x] - x(0)$$

può essere estesa a derivate di ordine superiore. Per la derivata seconda vale la regola

$$(6.15) \quad \mathcal{L}[\ddot{x}] = s^2 \mathcal{L}[x] - s x(0) - \dot{x}(0)$$

Per induzione si dimostra che

$$(6.16) \quad \mathcal{L}[x^{(n)}] = s^n \mathcal{L}[x] - \sum_{a=1}^n s^{n-a} x^{(a-1)}(0)$$

Nel caso di **condizioni iniziali nulle** si ha semplicemente

$$(6.17) \quad \mathcal{L}[x^{(n)}] = s^n \mathcal{L}[x]$$

Sia data un’equazione differenziale ordinaria lineare e a coefficienti costanti del tipo³

$$a \ddot{y} + b \dot{y} + c y + d = x(t)$$

³ È sufficiente considerare un’equazione del secondo ordine.

dove $y(t)$ è incognita e $x(t)$ è invece una funzione assegnata. L'applicazione della TdL \mathcal{L} ad entrambi i membri, tenuto conto della linearità, produce l'equazione

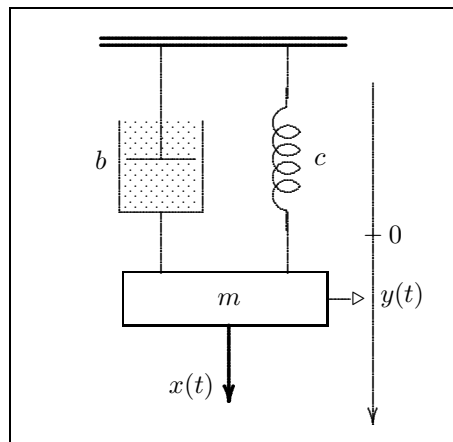
$$a \left(s^2 \mathcal{L}[y] - s y(0) - \dot{y}(0) \right) + b \left(s \mathcal{L}[y] - y(0) \right) + c \mathcal{L}[y] + \mathcal{L}[d] = \mathcal{L}[x],$$

che è algebrica lineare nell'incognita $\mathcal{L}[y]$. Risolvendola si trova⁴

$$\mathcal{L}[y] = \frac{\mathcal{L}[x] - d s^{-1} + (a s + b) y(0) + a \dot{y}(0)}{a s^2 + b s + c}.$$

Se si è capaci di antitrasformare il secondo membro, allora si trova $y(t)$. Il metodo di Laplace per risolvere equazioni differenziali (non solo di questo tipo) ha il pregio di coinvolgere anche le condizioni iniziali.

Esempio 6.6.1 – Sospensione elastica ammortizzata.



$$\left\{ \begin{array}{l} m > 0 : \text{ massa} \\ b > 0 : \text{ coefficiente di smorzamento viscoso} \\ c > 0 : \text{ coefficiente elastico} \\ x(t) : \text{ forza esterna perturbativa} \\ y(t) : \text{ posizione al tempo } t \\ y = 0 : \text{ posizione a riposo della molla} \end{array} \right.$$

Un corpo di massa m è sospeso ad una molla con coefficiente di elasticità c e ad un ammortizzatore viscoso di coefficiente b . Oltre che dalla forza peso mg , il corpo è sollecitato da una forza verticale perturbativa con legge temporale assegnata $x(t)$. Sia y l'asse verticale orientato verso il basso con origine $y = 0$ corrispondente alla configurazione di riposo della molla. Sia inoltre $y_0 > 0$ la quota corrispondente alla configurazione di equilibrio del sistema (in assenza della forza x), per cui

$$(6.18) \quad c y_0 \text{ (forza elastica)} = m g \text{ (peso)}.$$

⁴ La TdL di una costante d è $\frac{d}{s}$.

La dinamica del sistema è retta dall'equazione

$$\begin{aligned} m \ddot{y} &= \text{somma delle forze} \\ &= \text{forza peso } mg \\ &+ \text{forza di smorzamento } -b \dot{y} \\ &+ \text{forza elastica } -c y \\ &+ \text{forza perturbativa } x(t). \end{aligned}$$

Convien scrivere questa equazione nella forma

$$[*] \quad m \ddot{y} + b \dot{y} + c y - m g = x(t).$$

Supponiamo che le condizioni iniziali siano quelle di equilibrio:

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Applichiamo \mathcal{L} all'equazione [*]:

$$m \mathcal{L}[\ddot{y}] + b \mathcal{L}[\dot{y}] + c \mathcal{L}[y] - \mathcal{L}[m g] = \mathcal{L}[x].$$

$$m \left(s^2 \mathcal{L}[y] - s y(0) - \dot{y}(0) \right) + b \left(s \mathcal{L}[y] - y(0) \right) + c \mathcal{L}[y] - \frac{m g}{s} = \mathcal{L}[x].$$

Imponendo le condizioni iniziali quest'equazione si riduce a

$$m \left(s^2 \mathcal{L}[y] - s y_0 \right) + b \left(s \mathcal{L}[y] - y_0 \right) + c \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[x] + \frac{m g}{s}.$$

Di qui segue

$$(m s^2 + b s + c) \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[x] + \frac{m g}{s} + (m s + b) y_0$$

$$\mathcal{L}[y] = \frac{\mathcal{L}[x] + \frac{m g}{s} + (m s + b) y_0}{m s^2 + b s + c}.$$

$$(6.19) \quad \mathcal{L}[y] = \frac{s \mathcal{L}[x] + m g + s (m s + b) y_0}{s (m s^2 + b s + c)}.$$

Tutte le costanti che compaiono in questa equazione sono positive.

Ora mettiamo in azione un segnale perturbativo $x(t)$. Esaminiamo il caso in cui $x(t)$ è un gradino di Heaviside di ampiezza k :

$$x(t) = k u(t), \quad \mathcal{L}[x] = \frac{k}{s}.$$

La costante k può essere positiva (il corpo viene tirato verso il basso con una forza costante k) o negativa (è spinto verso l'alto). La (6.19) diventa

$$\mathcal{L}[y] = \frac{s (m s + b) y_0 + k + m g}{s (m s^2 + b s + c)}.$$

La funzione a secondo membro è una frazione di due polinomi in s , numeratore di grado 2, denominatore di grado 3. Abbiamo quindi tre poli (radici del denominatore):

$$(6.20) \quad p_0 = 0, \quad p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2m}, \quad \Delta = b^2 - 4mc.$$

Escludendo il caso $b^2 = 4mc$ perché strutturalmente improbabile, restano due casi:

$$\begin{cases} [1] & \Delta < 0 \iff b^2 < 4mc, \text{ smorzamento debole} \implies p_1, p_2 \text{ compl. coniug.} \\ [2] & \Delta > 0 \iff b^2 > 4mc, \text{ smorzamento forte} \implies p_1 \text{ e } p_2 \text{ reali.} \end{cases}$$

Procediamo alla riduzione in frazioni parziali:

$$[\dagger] \quad (\mathcal{L}[y] =) \frac{s(m s + b) y_0 + k + mg}{s m (s - p_1)(s - p_2)} = \frac{c_0}{s} + \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2}.$$

Calcolo di c_0 . Moltiplico per s ambo i membri di $[\dagger]$:

$$\frac{s(m s + b) y_0 + k + mg}{m(s - p_1)(s - p_2)} = c_0 + \frac{c_1 s}{s - p_1} + \frac{c_2 s}{s - p_2}.$$

Pongo $s = 0$ e trovo

$$(6.21) \quad c_0 = \frac{k + mg}{m p_1 p_2}.$$

Calcolo di c_1 . Moltiplico per $s - p_1$ ambo i membri della $[\dagger]$,

$$\frac{s(m s + b) y_0 + k + mg}{s m (s - p_2)} = \frac{c_0}{s} (s - p_1) + c_1 + \frac{c_2 (s - p_1)}{s - p_2}$$

e pongo $s = p_1$:

$$(6.22) \quad c_1 = \frac{p_1(m p_1 + b) y_0 + k + mg}{m p_1 (p_1 - p_2)}.$$

Analogamente per c_2 :

$$(6.23) \quad c_2 = \frac{p_2(m p_2 + b) y_0 + k + mg}{m p_2 (p_2 - p_1)}.$$

Essendo

$$\mathcal{L}[y] = \frac{c_0}{s} + \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2},$$

con l'antitrasformazione \mathcal{L}^{-1} si trova

$$y(t) = c_0 u(t) + c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t}$$

Si noti che, essendo questa soluzione valida per $t \geq 0$, il gradino $u(t)$ può essere sostituito col numero 1.

Caso [1]: $\Delta = b^2 - 4mc < 0$.

I poli p_1 e p_2 sono complessi e coniugati: $p_2 = p_1^*$. Di conseguenza, come subito si vede, anche le costanti c_1 e c_2 sono complesse coniugate, $c_2 = c_1^*$, mentre c_0 è reale. Poniamo:

$$(6.24) \quad c_1 = \rho + i\sigma, \quad c_2 = \rho - i\sigma.$$

$$(6.25) \quad p_1 = \alpha + i\omega, \quad p_2 = \alpha - i\omega$$

dove, in virtù delle (6.20),

$$(6.26) \quad \boxed{\alpha = -\frac{1}{2} \frac{b}{m}, \quad \omega = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{|\Delta|}}{m} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{4mbc - b^2}}{m}}$$

Segue:

$$\begin{aligned} y(t) &= c_0 + c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} = c_0 + (\rho + i\sigma) e^{(\alpha+i\omega)t} + (\rho - i\sigma) e^{(\alpha-i\omega)t} \\ &= c_0 + (\rho + i\sigma) e^{\alpha t} e^{i\omega t} + (\rho - i\sigma) e^{\alpha t} e^{-i\omega t} \\ &= c_0 + [(\rho + i\sigma) e^{i\omega t} + (\rho - i\sigma) e^{-i\omega t}] e^{\alpha t} \\ &= c_0 + [(\rho + i\sigma)(\cos \omega t + i \sin \omega t) + (\rho - i\sigma)(\cos \omega t - i \sin \omega t)] e^{\alpha t}. \end{aligned}$$

La soluzione cercata è quindi

$$(6.27) \quad \boxed{y(t) = c_0 + 2(\rho \cos \omega t - \sigma \sin \omega t) e^{\alpha t}}$$

Si tratta di una funzione costante c_0 a cui si sovrappone un segnale, detto **transitorio**, costituito da una oscillazione sinusoidale di pulsazione ω smorzata dal fattore $e^{\alpha t}$ che tende a zero per $t \rightarrow +\infty$ perché

$$\alpha = -\frac{1}{2} \frac{b}{m} < 0.$$

In una situazione di questo tipo si dice che il sistema meccanico è **stabile** di fronte ad una perturbazione a gradino.

Per rendere praticabile la soluzione (6.27) occorre ancora esprimere le costanti (reali) che vi compaiono, vale a dire c_0 , ρ e σ , in funzione delle costanti strutturali m , b , c e g del sistema meccanico in esame, nonché dell'ampiezza k dell'impulso perturbativo. Per quel che riguarda α e ω tali espressioni sono già date in (6.26).

• Espressione di c_0 . Dalla (6.25) segue

$$(6.28) \quad p_1 p_2 = \alpha^2 + \omega^2 = \frac{1}{4} \frac{b^2 + 4mc - b^2}{m^2} = \frac{c}{m},$$

per cui, richiamando la (6.21), si trova

$$(6.29) \quad \boxed{c_0 = \frac{k + mg}{c}}$$

• Espressione di ρ . Per $t = 0$ la (6.27) fornisce $y(0) = y_0 = c_0 + 2\rho$. Siccome per la (6.18) $c y_0 = m g$, si può scrivere:

$$2\rho = y_0 - c_0 = \frac{mg}{c} - c_0 = \frac{mg}{c} - \frac{k + mg}{c} = -\frac{k}{c},$$

per cui

$$(6.30) \quad \boxed{\rho = -\frac{1}{2} \frac{k}{c}}$$

• Espressione di σ . Possiamo derivare l'espressione di σ dal calcolo della differenza delle costanti coniugate c_1 e c_2 date dalle (6.22) e (6.23), perché $c_1 - c_2 = 2i\sigma$.

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 &= \frac{p_1 (m p_1 + b) y_0 + k + mg}{m p_1 (p_1 - p_2)} - \frac{p_2 (m p_2 + b) y_0 + k + mg}{m p_2 (p_2 - p_1)} \\ &= \frac{1}{m p_1 p_2 (p_1 - p_2)} \left\{ p_2 [p_1 (m p_1 + b) y_0 + k + mg] + p_1 [p_2 (m p_2 + b) y_0 + k + mg] \right\} \\ &= \frac{1}{m p_1 p_2 (p_1 - p_2)} \left\{ p_2 p_1 (m p_1 + b) y_0 + p_1 p_2 (m p_2 + b) y_0 + (p_1 + p_2)(k + mg) \right\} \\ &= \frac{1}{m p_1 p_2 (p_1 - p_2)} \left\{ [m (p_1 + p_2) + 2b] y_0 p_1 p_2 + (p_1 + p_2)(k + mg) \right\} \\ &= \frac{1}{m p_1 p_2 (p_1 - p_2)} \left\{ [m y_0 p_1 p_2 + k + mg] (p_1 + p_2) + 2b y_0 p_1 p_2 \right\} \end{aligned}$$

Osserviamo che dalla (6.25) seguono le uguaglianze

$$p_1 + p_2 = 2\alpha = -\frac{b}{m}, \quad p_1 - p_2 = 2i\omega, \quad p_1 p_2 = \frac{c}{m}.$$

Quindi:

$$c_1 - c_2 = \frac{1}{2i\omega c} \left\{ -\frac{b}{m} [c y_0 + k + mg] + 2b y_0 \frac{c}{m} \right\}$$

Richiamando la (6.18) $c y_0 = m g$:

$$c_1 - c_2 = \frac{1}{2i\omega c} \left\{ 2b g - \frac{b}{m} [k + 2mg] \right\} = \frac{b}{2i\omega c} \left\{ 2g - \frac{1}{m} [k + 2mg] \right\} = -\frac{b k}{2i\omega c m}$$

Siccome $c_1 - c_2 = 2i\sigma$, segue:

$$2i\sigma = -\frac{b k}{2i\omega c m}, \quad \sigma = \frac{b k}{4\omega c m}$$

Essendo dalla (6.26)

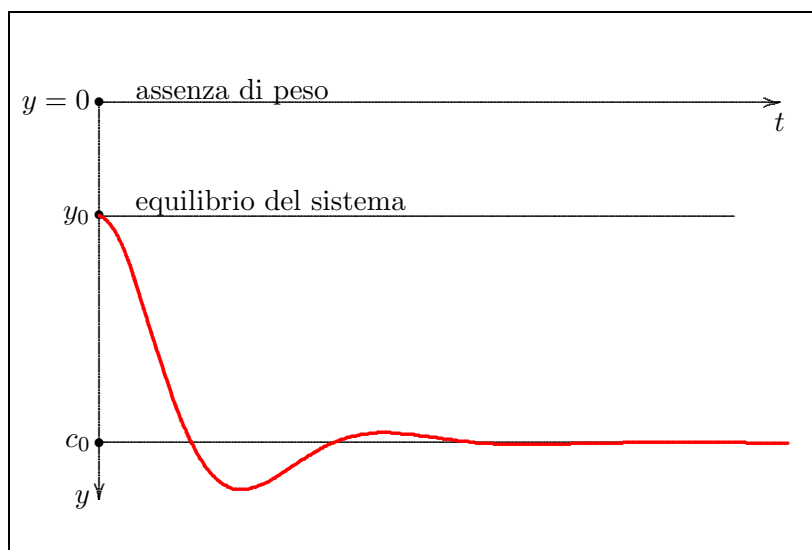
$$\omega = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{4mbc - b^2}}{m},$$

quindi $4\omega cm = 2c\sqrt{4mbc - b^2}$, si trova

$$(6.31) \quad \boxed{\sigma = \frac{1}{2} \frac{k\sqrt{b}}{c\sqrt{4mc - b}}}$$

Il grafico di $y(t)$ mostrato in figura si riferisce ai dati seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} m = \frac{1}{2}, \\ b = 1, \\ c = \frac{5}{2}, \\ g = 5, \\ k = 5. \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \alpha = -1, \\ \omega = 2, \\ \rho = -1, \\ \sigma = \frac{1}{2}, \\ c_0 = 3, \\ y_0 = 1. \end{array} \right.$$



♣

Esercizi. (i) Esaminare anche il caso [2] $\Delta > 0$. (ii) Studiare il caso in cui $x(t)$ è la delta di Dirac (impulso istantaneo violento).

Nel Capitolo 7 vedremo ulteriori applicazioni della trasformata di Laplace.