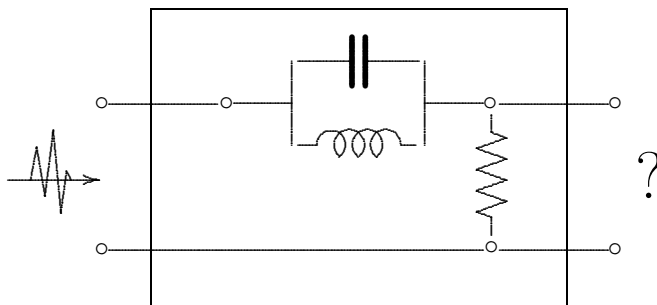


Complementi di Analisi
per Informatica

Capitolo 2
Numeri Complessi
e
Circuiti Elettrici

SERGIO BENENTI



Indice

2.1	Circuito elettrico elementare	1
2.2	Regime stazionario in corrente alternata	2
2.3	La legge di Ohm nel campo complesso	4
2.4	Impedenze in serie e in parallelo	5
2.5	Blocchi e relazioni input-output	6

I numeri complessi si sono rivelati indispensabili non solo in importanti capitoli della Fisica, ma anche nella quotidiana Elettrotecnica.

2.1 Circuito elettrico elementare

La Fig. 2.1 mostra lo schema di un **circuito elettrico elementare** costituito da un generatore di tensione $V(t)$, variabile nel tempo, che alimenta un *carico*. Ci proponiamo di studiare la **relazione** intercorrente tra la tensione $V(t)$ e la corrente elettrica $I(t)$ assorbita dal carico e misurata da un amperometro A , relazione che dipenderà sia dalla legge temporale della tensione $V(t)$ sia dal tipo di carico.

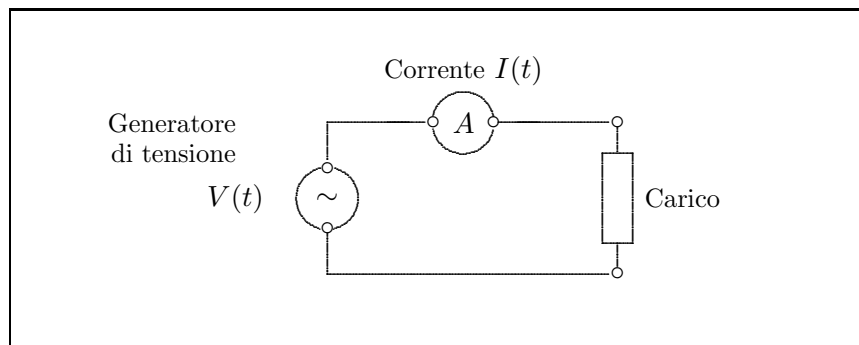


Figura 2.1: Circuito elettrico elementare.

Dobbiamo partire dai tre tipi di carico fondamentali, illustrati nella Tabella 1, per poi estendere le nostre considerazioni a carichi più complessi.

TABELLA 1 – Elementi fondamentali passivi di un circuito elettrico			
Carico	Simbolo	Caratteristica fisica	Unità di misura
Resistore		$R =$ resistenza	Ohm
Condensatore		$C =$ capacità	Farad(ay)
Induttore		$L =$ induttanza	Henry

I legami $V \leftrightarrow I$ (tensione–corrente) che caratterizzano ciascuno di questi carichi sono retti dalle tre **leggi fondamentali** seguenti:

$$(2.1) \quad \boxed{V = RI, \quad I = C \frac{dV}{dt}, \quad V = L \frac{dI}{dt}.}$$



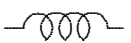
La prima equazione, $V = RI$, è la **legge di Ohm**. Essa è di tipo algebrico, mentre le altre due sono di tipo differenziale.

2.2 Regime stazionario in corrente alternata

Consideriamo il caso elementare, ma fondamentale per le applicazioni, in cui $V(t)$ ha la forma

$$V(t) = V_0 \cos \omega t.$$

dove V_0 è costante e $\omega > 0$ è la **pulsazione**.¹ Applicando le tre leggi fondamentali (2.1) si ottengono i risultati riportati nella Tabella 2.

TABELLA 2 – Relazioni tensione–corrente a regime stazionario			
Carico	Legge	Tensione	Corrente
	$V = RI$	$V = V_0 \cos \omega t$	$I = \frac{V_0}{R} \cos \omega t$
	$I = C \frac{dV}{dt}$	$V = V_0 \cos \omega t$	$I = -\omega C V_0 \sin \omega t = \omega C V_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$
	$V = L \frac{dI}{dt}$	$V = V_0 \cos \omega t$	$I = \frac{1}{\omega L} V_0 \sin \omega t = \frac{1}{\omega L} V_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$

Dall'ultima colonna osserviamo che a **regime stazionario**:²

1. Per un carico puramente resistivo V ed I sono in fase.
2. Per un carico puramente capacitivo la corrente $I(t)$ è **in anticipo** rispetto alla tensione $V(t)$ di un angolo retto, $\pi/2$.
3. Per un carico puramente induttivo la corrente $I(t)$ è invece **in ritardo** di un angolo retto rispetto alla tensione $V(t)$.

Nelle figure 2.2, 2.3 e 2.4 vengono rappresentati questi tre casi. Per ognuno di questi, sul lato sinistro, è riportato il vettore tensione $\mathbf{V}(t)$ di lunghezza fissa V_0 che ruota intorno all'origine del piano (x, y) con velocità angolare costante ω , con posizione iniziale (ciò per $t = 0$) sull'asse x , e in senso antiorario. Le tre corrispondenti correnti $\mathbf{I}(t)$ sono solidalmente legate a \mathbf{V} , e quindi ruotano anch'esse con velocità angolare ω in senso antiorario. Le proiezioni di questi vettori sull'asse x sono riportate a destra, come funzioni del tempo t .

¹ Ricordiamo che $\omega = 2\pi f$, dove f è la frequenza (p.es. 50 Hertz per le linee elettriche europee).

² Quando un circuito elettrico si 'chiude' sopra un carico, cioè si mette in azione, inizia un fenomeno **transitorio** che dopo un certo tempo si stabilizza su di un **regime stazionario**.

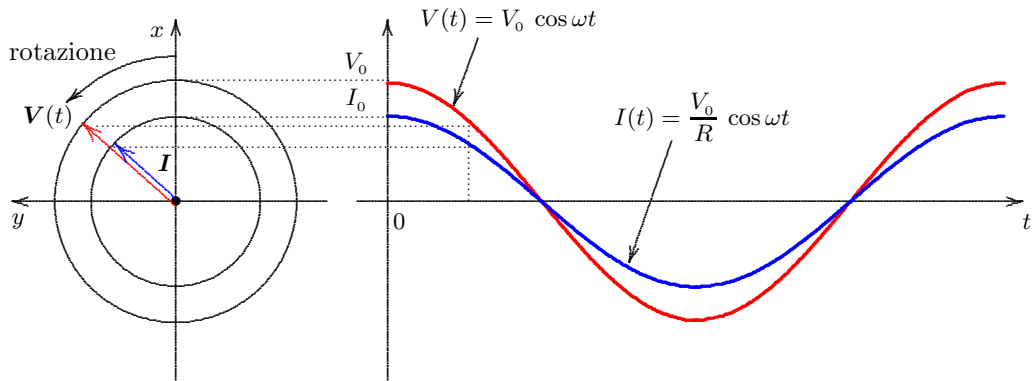
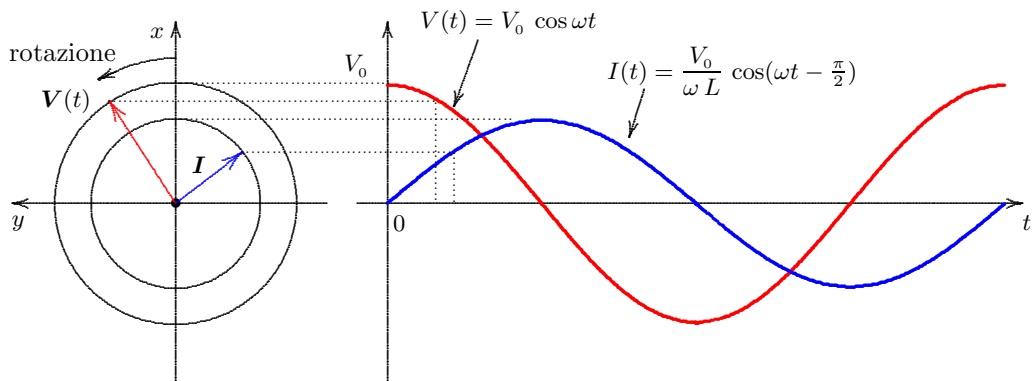
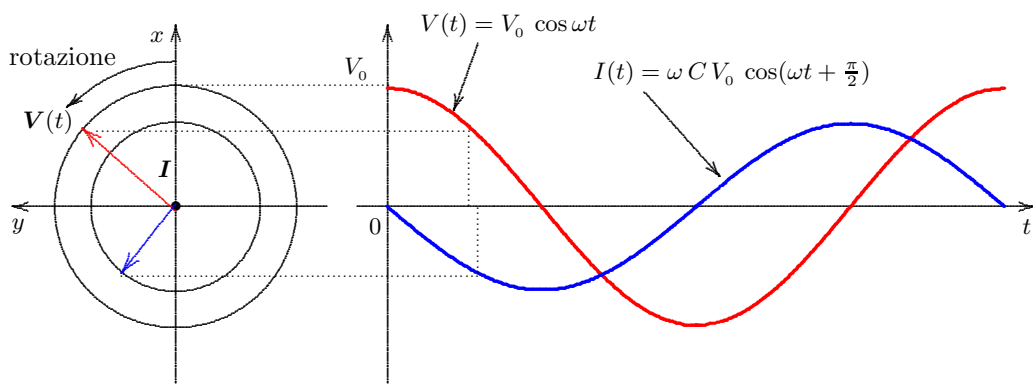


Figura 2.2: Carico resistivo, la corrente è in fase con la tensione.

Figura 2.3: Carico induttivo, la corrente è in ritardo di 90° rispetto alla tensione.Figura 2.4: Carico capacitivo, la corrente è in anticipo di 90° sulla tensione.

2.3 La legge di Ohm nel campo complesso

Se identifichiamo il piano (x, y) col piano di Gauss dei numeri complessi $z = x + iy$, allora il vettore $\mathbf{V}(t)$ si può interpretare come numero complesso

$$(2.2) \quad V(t) = V_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t),$$

Se si utilizza la formula di Euler si può scrivere più brevemente

$$(2.3) \quad \boxed{V(t) = V_0 e^{i\omega t}}$$

Si noti bene che qui si abbandona la notazione vettoriale in grassetto. Il vantaggio dell'utilizzo dei numeri complessi consiste nel fatto che, dovendo eseguire l'operazione di 'prodotto', è possibile farlo con i numeri complessi mentre per vettori in un piano una tale operazione non è definibile.



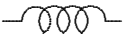
Come si è visto, per un carico puramente capacitivo la corrente $I(t)$ è sfasata di un angolo retto in anticipo rispetto alla tensione $V(t)$. Siccome la moltiplicazione di un numero complesso per i provoca la sua rotazione di 90° in senso antiorario, possiamo rappresentare questo sfasamento di anticipo moltiplicando la V per l'unità immaginaria i e quindi scrivere

$$I = i\omega CV.$$

Analogamente, per un carico induttivo, per cui la tensione $V(t)$ è in anticipo rispetto alla corrente $I(t)$, scriviamo

$$V = i\omega LI.$$

Si può allora ricompilare la Tabella 2 in termini complessi:

TABELLA 3 – Relazioni tensione–corrente in termini complessi			
Carico	Legge	Tensione	Corrente
	$V = RI$	$V = V_0 e^{i\omega t}$	$I = \frac{1}{R} V$
	$I = C \frac{dV}{dt}$	$V = V_0 e^{i\omega t}$	$I = i\omega CV$
	$V = L \frac{dI}{dt}$	$V = V_0 e^{i\omega t}$	$I = \frac{1}{i\omega L} V = \frac{-i}{\omega L} V$

La Tabella 3 mostra che le leggi elementari (2.1),

$$V = RI, \quad I = C \frac{dV}{dt}, \quad V = L \frac{dI}{dt},$$

assumono la forma algebrica (nel campo complesso)

$$(2.4) \quad \boxed{V = RI, \quad V = \frac{1}{i\omega C} I, \quad V = i\omega L I}$$

che è del tipo

$$(2.5) \quad \boxed{V = ZI}$$

ponendo nei tre casi

$$(2.6) \quad \boxed{Z = R, \quad Z = \frac{1}{i\omega C} = \frac{-i}{\omega C}, \quad Z = i\omega L}$$

Queste tre Z prendono il nome di **impedenze**, rispettivamente di **impedenza puramente resistiva**, **puramente capacitiva**, **puramente induttiva**.³ La (2.5) prende il nome di **legge di Ohm complessa**.

L'inverso $\frac{1}{Z}$ di un'impedenza prende il nome di **conduttanza**.

2.4 Impedenze in serie e in parallelo

Combinando fra loro in vario modo resistori, condensatori e induttori si può ottenere una impedenza Z di qualunque assegnato valore. Nella schematizzazione dei circuiti elettrici una generica impedenza viene indicata col simbolo



Per le impedenze si possono considerare due **composizioni fondamentali**: **impedenze in serie** e **impedenze in parallelo**.

Esercizio. Dimostrare che:

- *Le impedenze in serie si sommano* (fig. 2.5).
- *Per impedenze in parallelo si sommano le conduttanze* (fig. 2.6).

³ Può far comodo denotarle Z_R , Z_C e Z_L , rispettivamente.

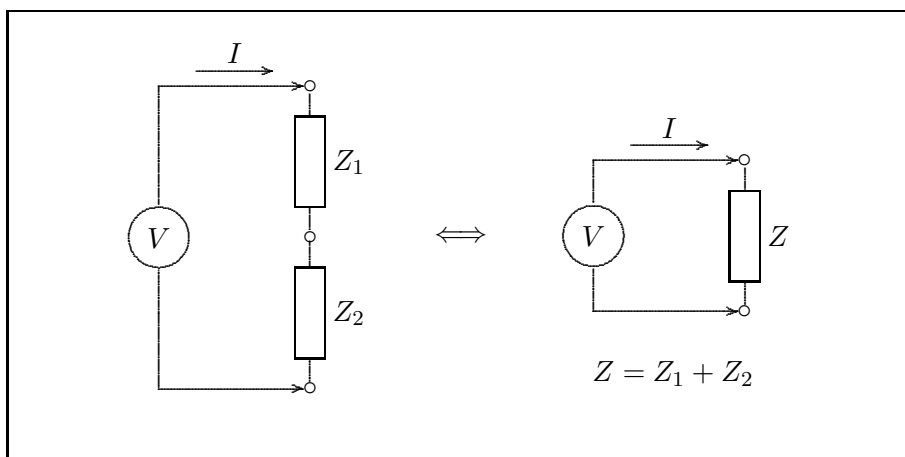


Figura 2.5: Impedenze in serie.

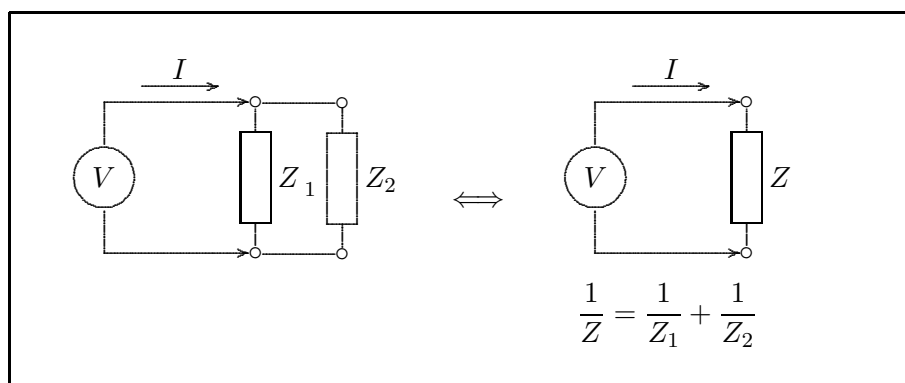
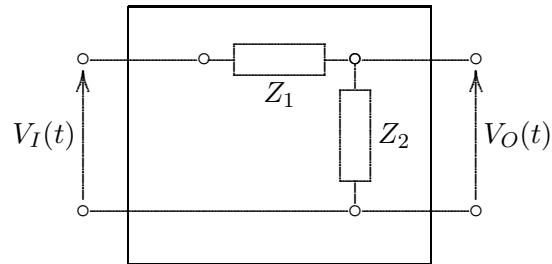


Figura 2.6: Impedenze in parallelo.

2.5 Blocchi e relazioni input-output

Nella figura che segue è descritto un **blocco**, rappresentato da un rettangolo all'interno del quale si trovano due impedenze Z_1 e Z_2 . All'ingresso del blocco (posto a sinistra) viene applicata una tensione $V_I(t)$ variabile nel tempo, detta **segnale di entrata**. All'uscita (posta a destra) viene di conseguenza misurata una tensione $V_O(t)$ detta **segnale di uscita**. Assumiamo che la misura della tensione $V_O(t)$ non implichi assorbimento di corrente.⁴

⁴ I voltmetri sono supposti a impedenza infinita.



Per come sono poste le impedenze la corrente elettrica I assorbita dall'ingresso è tale da soddisfare la legge di Ohm per due impedenze in serie:

$$V_I = (Z_1 + Z_2) I.$$

La tensione che si misura ai capi di Z_2 , che coincide ovviamente con V_O , è data da

$$V_O = Z_2 I.$$

Mettendo insieme queste due equazioni si trova che

$$V_O = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V_I$$

Quest'uguaglianza esprime dunque la relazione tra il segnale d'ingresso ed il segnale di uscita. Possiamo allora chiamare la funzione complessa

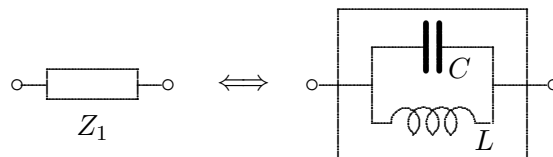
$$G = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

funzione di trasferimento del blocco, potendosi scrivere

$$V_O = G V_I$$

Dunque il segnale di uscita è uguale al prodotto del segnale di entrata per la funzione di trasferimento.

Consideriamo il caso in cui $V_I(t)$ è di tipo sinusoidale, cioè del tipo (2.3) e Z_1 è costituita da un condensatore e da un induttore posti in parallelo:



Dunque:

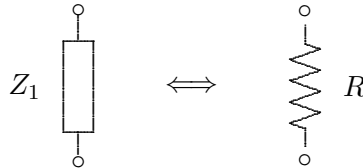
$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} = i\omega C + \frac{1}{i\omega L} = \frac{1 - \omega^2 LC}{i\omega L}$$

8

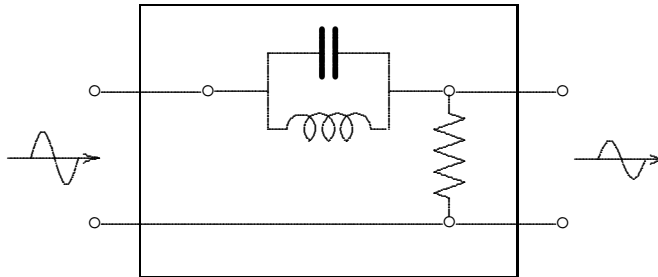
cioè

$$Z_1 = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$

Ora, al posto di Z_2 poniamo una pura resistenza, $Z_2 = R$,



per cui il blocco contiene il circuito seguente:



Costruiamo la funzione di trasferimento:

$$G = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R}{Z_1 + R} = \frac{R}{\frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC} + R} = \frac{R(1 - \omega^2 LC)}{i\omega L + R(1 - \omega^2 LC)}$$

Vediamo che al limite per ω^2 che tende a $1/LC$ il segnale in uscita V_O tende a zero. Ciò significa che un segnale sinusoidale con

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

'non passa' attraverso il blocco.

Si pone la questione: se in ingresso abbiamo un segnale $V_I(t)$ qualsiasi, come possiamo calcolare il segnale di uscita?

