Complementi di Analisi per Informatica

***

Capitolo 1
Numeri Complessi

Sergio Benenti

Leonhard Euler (1707–1783)

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

Indice

1.1 Numeri complessi, somma e prodotto

Un **numero complesso** è una scrittura del tipo

$$\boxed{z = x + iy} \tag{1.1}$$

dove (x, y) è una coppia di numeri reali ed i è un simbolo detto **unità immaginaria**. L'insieme dei numeri complessi $x + i\,y$, denotato con $\mathbb{C}$, coincide quindi con l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali (x, y), cioè con il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

La scrittura (1.1) è detta **forma algebrica** o **forma ordinaria** del numero complesso z. Come vedremo, un numero complesso ammette altre forme, cioè altri tipi di rappresentazione. Il primo numero x si dice **parte reale** del numero complesso z, il termine iy si dice **parte immaginaria**, il numero y si dice **coefficiente della parte immaginaria**.

Sui numeri complessi si stabilisce un calcolo con regole formali analoghe a quelle dei numeri reali, con la sola differenza che il prodotto dell'unità immaginaria per se stessa è posto per definizione uguale a -1:

$$i\,i = i^2 = -1. \tag{1.2}$$

Pertanto la somma ed il prodotto di due numeri complessi sono definite alla maniera seguente:

$$\begin{aligned} &(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y'), \\ &(x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Valgono le proprietà commutativa, associativa, distributiva. Si crea in tal modo un insieme numerico $\mathbb{C}$, detto **campo complesso**, nel quale, al contrario del campo reale $\mathbb{R}$, certe operazioni sono sempre possibili, come la radice quadrata di un numero negativo o la risoluzione di un'equazione algebrica di secondo grado.

I numeri complessi del tipo $x + i0$ (cioè con parte immaginaria nulla) si comportano esattamente, nelle operazioni di somma e prodotto, come i numeri reali. Dunque il campo dei numeri reali può essere considerato come sotto-campo dei numeri complessi. Si scrive semplicemente x al posto di $x + i0$.

Quando $x = 0$ il numero complesso $z = iy$ si dice **immaginario** (o **immaginario puro**). Il numero $0 + i0$, coincidente con lo zero dei numeri reali, si comporta da elemento neutro nella somma, cioè $z + 0 = z$. Invece il numero $1 + i0$, coincidente con il numero reale 1, si comporta da elemento neutro del prodotto, cioè $1z = z$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

1.2 Coniugato, modulo, inverso di un numero complesso

Sui numeri complessi, oltre alla somma ed al prodotto, si definisce una terza operazione, la **coniugazione**: il **coniugato** di un numero complesso $z = x + iy$ è il numero complesso

$$z^* = x - iy \tag{1.4}$$

ottenuto cambiando di segno la parte immaginaria. Lo si denota anche con $\bar{z}$. Si osservi che un numero complesso è reale se e solo se coincide col suo coniugato. Infatti $(x+iy)^* = x + iy \quad \Longleftrightarrow \quad x - iy = x + iy \quad \Longleftrightarrow \quad y = 0$.

Valgono le seguenti proprietà.
(i) Il coniugato di una somma è la somma dei coniugati:

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*. \tag{1.5}$$

(ii) Il coniugato di un prodotto è il prodotto dei coniugati:

$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*. \tag{1.6}$$

Applicando la regola della moltiplicazione (1.3), si trova

$$z z^* = x^2 + y^2. \tag{1.7}$$

Dunque il prodotto di un numero complesso per il suo coniugato è un numero reale positivo o nullo, nullo solo se è $z = 0$ (cioè $x = y = 0$).

Il **modulo** di un numero complesso $z = x + iy$ è il numero reale non negativo

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Questo si annulla solo per il numero complesso $z = 0$. Dunque la (1.7) si scrive anche

$$z z^* = |z|^2.$$

Dividendo per $|z|^2 = x^2 + y^2$ si trova

$$z\, \frac{z^*}{x^2 + y^2} = 1.$$

Ciò mostra che l'**inverso** o **reciproco** (secondo il prodotto) di un numero complesso z, denotato con $\frac{1}{z}$ o z^{-1}, è dato da

$$z^{-1} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{z^*}{|z|^2}.$$

Applicando la regola (1.6) al prodotto $z\, z^{-1} = 1$ si ricava $z^*\, (z^{-1})^* = 1$ cioè

$$(z^{-1})^* = \frac{1}{z^*}.$$

Il coniugato dell'inverso è l'inverso del coniugato.

1.3 Rappresentazione geometrica

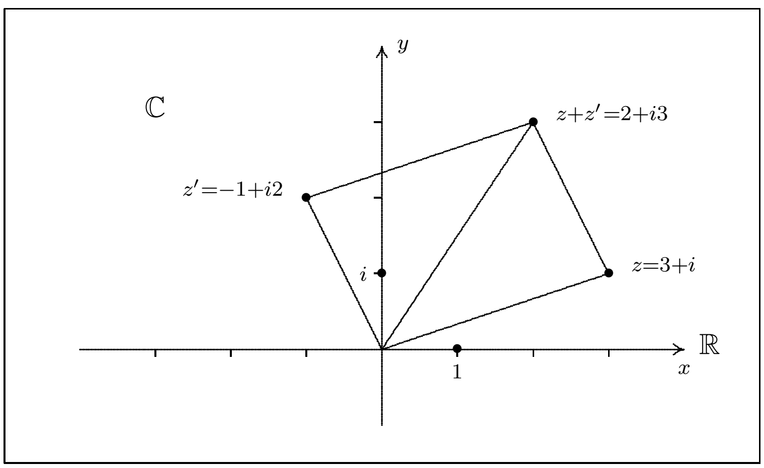
Come si è detto, i numeri complessi sono in corrispondenza biunivoca con le coppie di numeri reali:

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \quad \longleftrightarrow \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2.$$

Di conseguenza, essi sono in corrispondenza biunivoca coi punti del piano riferito a coordinate cartesiane (x, y), che viene detto **piano complesso** o **piano di Gauss**. L'asse x si chiama **asse reale** e l'asse y **asse immaginario**: infatti i numeri reali coincidono coi punti dell'asse x, i numeri immaginari puri coi punti dell'asse y.

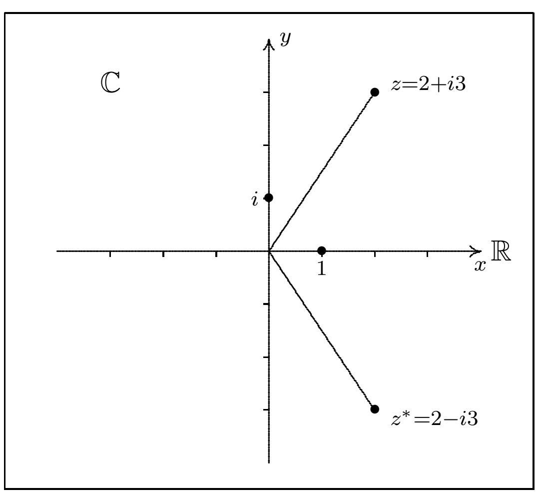
Un numero complesso $z = x + iy$ si identifica non solo col punto P di coordinate (x, y) ma anche col vettore $OP = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ (**rappresentazione vettoriale**). Di conseguenza, si osserva che:

• *La somma di due numeri complessi coincide con la somma dei vettori rappresentativi secondo la regola del parallelogramma.*



• *Il coniugato z^* è il simmetrico di z rispetto all'asse reale x.*

Infatti la parte immaginaria è cambiata di segno, mentre la parte reale resta invariata.

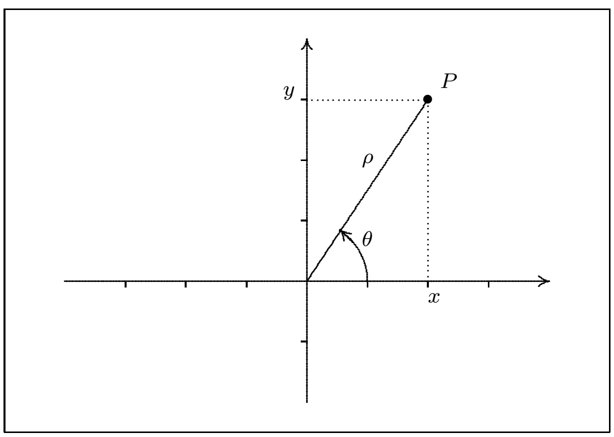


1.4 Coordinate polari del piano

Per rappresentare i punti del piano cartesiano è a volte conveniente usare altri tipi di coordinate. Tra queste, particolarmente importanti sono le **coordinate polari**, denotate di solito con (ρ, θ), o anche con (r, θ). Il numero positivo o nullo ρ, detto **raggio**, è la distanza del generico punto P dall'origine, cioè il modulo del vettore posizione OP

$$\rho = |OP| \tag{1.8}$$

Il numero θ è invece l'angolo, detto **anomalia** del punto P, compreso tra il vettore OP e il semiasse positivo delle x, misurato in senso antiorario a partire dal semiasse positivo delle x.



L'anomalia è determinata a meno di multipli di 2π. È indeterminata per il punto O, origine delle coordinate.

Il legame tra le coordinate polari (ρ, θ) e le coordinate cartesiane ortogonali (x, y) è dato dalle uguaglianze

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta. \tag{1.9}$$

Quadrando e sommando queste uguaglianze si trova $x^2 + y^2 = \rho^2$; dividendo membro a membro, supposto $x \neq 0$, si trova $\tan\theta = \frac{y}{x}$. Si deducono quindi le uguaglianze inverse delle (1.9), tenuto conto che la funzione arcotangente assume, per definizione, valori compresi tra $-\pi/2$ e $\pi/2$ (estremi esclusi):

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x} & \text{se } x > 0, \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

1.5 Rappresentazione polare o trigonometrica

Grazie alle equazioni di trasformazione (1.9), un numero complesso $z = x + iy$ può essere scritto in **forma polare** o **trigonometrica**

$$\boxed{z = \rho\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)} \tag{1.11}$$

I numeri reali ρ e θ si dicono rispettivamente **modulo** e **argomento** del numero complesso z.

Osserviamo che:

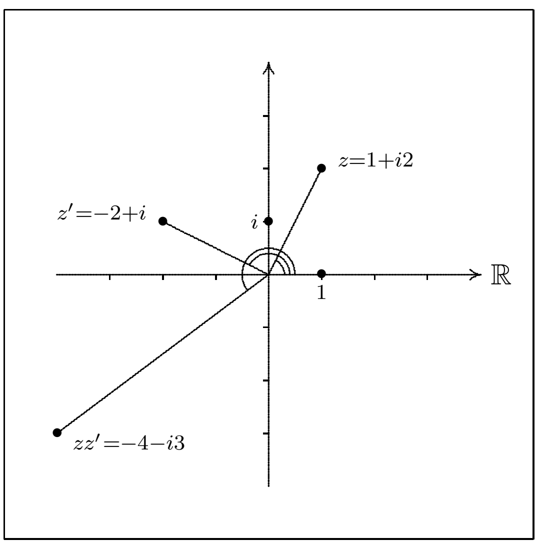
• *il coniugato di un numero complesso ha lo stesso modulo ma argomento opposto.*

Grazie alla rappresentazione polare abbiamo anche una semplice interpretazione del prodotto di due numeri complessi:

• *il prodotto di due numeri complessi ha come modulo il prodotto dei moduli e come argomento la somma degli argomenti.*

Infatti, utilizzando le formule di addizione del seno e del coseno, abbiamo successivamente

$$\begin{aligned} z\,z' &= \rho\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)\;\rho'\,(\cos\theta' + i\,\sin\theta') \\ &= \rho\,\rho'\,\big[(cos\theta\,\cos\theta' - \sin\theta\,\sin\theta') + i\,(\sin\theta\,\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta)\big] \\ &= \rho\,\rho'\big[\cos(\theta+\theta') + i\,\sin(\theta+\theta')\big]. \end{aligned}$$



Osserviamo che l'unità immaginaria i ha modulo 1 e argomento $\frac{\pi}{2}$ (cioè 90°). Quindi:

• *Moltiplicare un numero complesso z per l'unità immaginaria i significa farlo ruotare di 90° in senso antiorario.*

1.6 La formula di Euler

Una delle formule più importanti riguardante i numeri complessi è la **formula di Euler**,

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta} \tag{1.12}$$

che stabilisce una sorprendente relazione, nel campo complesso, tra l'esponenziale e le funzioni circolari seno e coseno.

Per comprendere questa formula occorre spiegare qual è il significato della funzione **esponenziale di un numero complesso** o, nella fattispecie, di **esponenziale di un numero immaginario puro**.

In effetti, la funzione esponenziale e^x, la cui definizione è stata data nel campo di una variabile reale x, può essere estesa ad una variabile complessa z mediante la sua rappresentazione in serie di potenze, valida nel campo reale. Si pone cioè per **definizione**:

$$\boxed{e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, z^n, \quad z \in \mathbb{C}}$$

Si dimostra che questa serie è ovunque convergente e che la si può considerare come somma di due serie: quella delle potenze pari e quella delle potenze dispari di z:

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}\, z^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\, z^{2n+1} \\ &= 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \frac{1}{6!}z^6 + \ldots + z + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \frac{1}{7!}z^7 + \ldots \end{aligned}$$

Nel caso in cui z sia immaginario puro, cioè $z = i\theta$, si osserva che la serie delle potenze pari è uguale alla serie di $\cos\theta$

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\,\theta^2 + \frac{1}{4!}\,\theta^4 - \frac{1}{6!}\,\theta^6 + \ldots$$

mentre la serie dispari, raccogliendo a fattore i, è uguale alla serie

$$i\,\sin\theta = i\,\left(\theta - \frac{i}{3!}\,\theta^3 + \frac{i}{5!}\,\theta^5 - \frac{i}{7!}\,\theta^7 + \ldots\right).$$

Di qui segue la formula di Euler.

Lo studente tenga sempre ben presente le osservazioni seguenti:

- Il numero complesso $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta$ ha modulo 1.
- Moltiplicare un numero complesso z per $e^{i\theta}$, con $\theta > 0$, significa ruotarlo di un angolo θ in senso antiorario.
- Un numero complesso di modulo ρ e argomento θ è rappresentabile con la scrittura

$$\boxed{z = \rho\, e^{i\theta}} \tag{1.13}$$

1.7 La formula di De Moivre

Dalla regola di moltiplicazione di due numeri complessi, segue che la potenza n-sima di un numero complesso $z = \rho\, e^{i\theta}$ ha come modulo la potenza ρ^n del modulo e come argomento $n\theta$, n volte l'argomento. Vale quindi la **formula di De Moivre** sulle potenze intere di un numero complesso

$$\boxed{z^n = \rho^n \, \big(\cos(n\theta) + i\, \sin(n\theta)\big) = \rho^n\, e^{in\theta}} \tag{1.14}$$

1.8 Radici n-esime di un numero complesso

Una radice n-esima di un numero complesso z è un numero complesso w tale che $w^n = z$. È notevole il fatto che *ogni numero complesso $z \neq 0$ ammette esattamente n radici n-esime distinte*. Se il numero z è dato in forma trigonometrica, $z = \rho\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$, allora le n radici n-sime w_k, con $k = 0, 1, \ldots, n-1$, si ottengono con la formula

$$\boxed{w_k = \sqrt[n]{\rho}\, \left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\, \sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} \tag{1.15}$$

dove con $\sqrt[n]{\rho}$ s'intende, al solito, il numero reale positivo la cui potenza n-esima è uguale a ρ. Utilizzando la formula di Moivre si vede infatti che

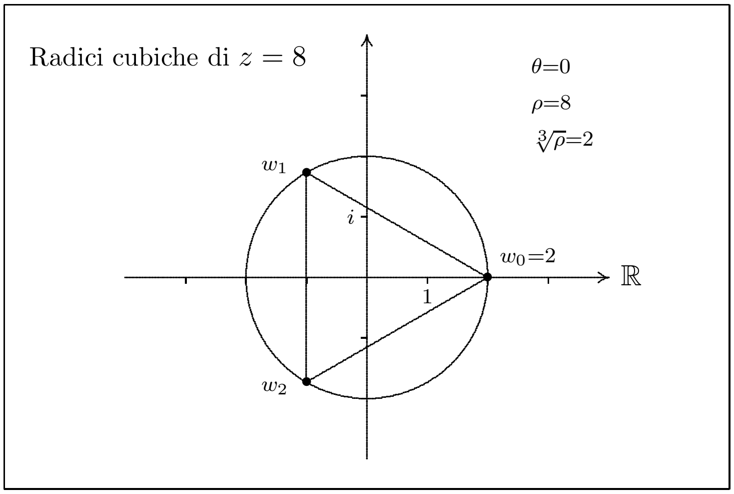
$$w_k^n = \rho\,\big(\cos(\theta + 2k\pi) + i\, \sin(\theta + 2k\pi)\big) = \rho\,\big(\cos\theta + i\,\sin\theta\big) = z.$$

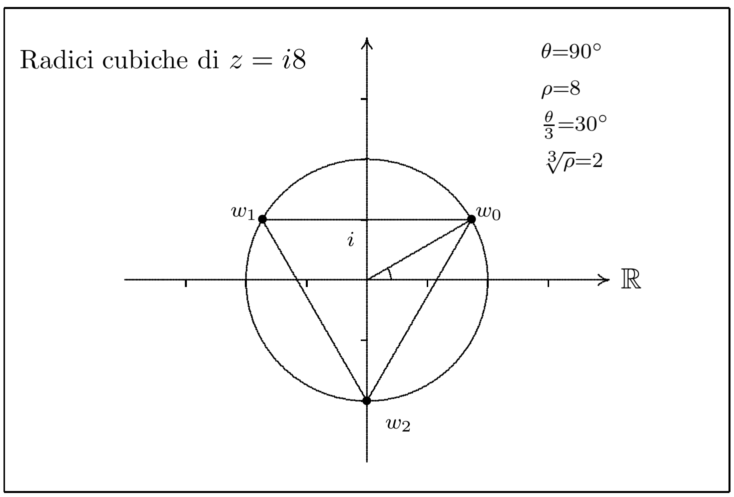
Inversamente, con ragionamento analogo si vede che ogni radice è necessariamente del tipo (1.15) con k numero intero opportuno. La formula (1.15) mostra che:

- *Nel piano complesso le n radici n-esime di un numero complesso $z = \rho\, e^{i\theta}$ sono rappresentate dai vertici di un poligono regolare di n lati, inscritto nella circonferenza di raggio $\sqrt[n]{\rho}$ e centrata nell'origine, dei quali uno ha anomalia θ/n.*

Per costruire questo poligono, una volta tracciata la circonferenza di raggio $\sqrt[n]{\rho}$, si può partire dal vertice corrispondente alla prima radice w_0, il cui argomento è θ/n. Per esempio, il numero 1 ammette n radici n-esime distinte rappresentate dai vertici del poligono di n lati inscritto nella circonferenza unitaria, uno dei quali è posto nel numero 1 stesso, cioè nel punto $(1, 0)$.

Nelle due figure seguenti sono p.es. rappresentate le radici cubiche di $z = 8$ e di $z = i8$, rispettivamente:





1.9 Teorema fondamentale dell'algebra

Un **polinomio di grado** n in una variabile (o "indeterminata) z è un'espressione del tipo

$$P_n(z) = a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + a_1\, z + a_0, \tag{1.16}$$

dove $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0)$ sono $n+1$ numeri assegnati, reali o complessi, detti **coefficienti** del polinomio.

Nel campo complesso sussiste il **teorema di fattorizzazione**:

Teorema 1.9.1 – *Nel campo complesso ogni polinomio di grado n* (1.16) *si può rappresentare, in maniera unica, come prodotto di n* **monomi** *(cioè polinomi di primo grado):*

$$P_n(z) = a_n\,(z - z_1)\,(z - z_2)\ldots(z - z_n), \tag{1.17}$$

dove $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *sono numeri complessi, detti* **radici** *del polinomio.*

Osservazione 1.9.1 – Nel campo dei numeri reali questo teorema non è più vero. La sua dimostrazione ha richiesto sforzi notevoli, la prima delle quali risale a Gauss (inizi del 1800). •

Osservazione 1.9.2 – Le radici di un polinomio $P_n(z)$ coincidono con le **soluzioni** dell'**equazione algebrica di grado** n $P_n(z) = 0$, cioè

$$a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + a_1\, z + a_n = 0. \tag{1.18}$$

Infatti, come mostra la (1.17), il polinomio assume valore **zero** se e solo se z assume il valore di una delle sue radici. •

Osservazione 1.9.3 – Alcune delle radici possono coincidere. Una radice z_k si dice di **molteplicità** n_k se il monomio $z - z_k$ compare n_k volte nella fattorizzazione (1.17). •

In base alle osservazioni precedenti il *teorema di fattorizzazione* si traduce nel **Teorema Fondamentale dell'Algebra**:

Teorema 1.9.2 – *Un'equazione algebrica di grado n ammette n soluzioni, contate con la dovuta molteplicità.*

Per le equazioni algebriche a coefficienti reali valgono la seguenti proprietà:

Teorema 1.9.3 – *Se un'equazione algebrica a coefficienti reali ammette una radice complessa allora anche la sua coniugata è una radice e con la stessa molteplicità.*

Dimostrazione. Infatti se z_i è una radice, cioè $P_n(z_i) = 0$, prendendo il coniugato del primo membro della (1.17) si trova che $P_n(z_i^*) = 0$ perché con la coniugazione l'equazione non cambia i coefficienti. Dunque anche z_i^* è una radice. Il fatto che abbia la stessa molteplicità si dimostra utilizzando la fattorizzazione del polinomio. ■

Una conseguenza immediata di questa proprietà è che

Teorema 1.9.4 – *Un'equazione algebrica a coefficienti reali di grado dispari ha almeno una radice reale.*

Dimostrazione. Guardando la fattorizzazione del polinomio, i monomi corrispondenti alle radici complesse sono un numero pari (perché ad un monomio complesso ne corrisponde uno coniugato) e quindi, ricordando che il numero dei fattori coincide con il grado, in assenza di radici reali il grado dell'equazione è necessariamente pari. ■

1.10 Esercizi

1. Scrivere in forma algebrica $(x+iy)$ i seguenti numeri complessi e calcolarne gli inversi:

$$\frac{i}{1-i}, \quad \frac{1-i}{1+i}, \quad \frac{i}{1+i}, \quad e^{3i\pi}, \quad 3e^{i\pi/4}.$$

2. Eseguire somme, prodotti e quozienti di semplici numeri complessi scelti a caso. Per esempio:

$$(2+3i)(1-i) = 5+i,$$

$$\frac{2+5i}{7-i} = \frac{(2+5i)(7+i)}{(7-i)(7+i)} = \frac{1}{50}(9+37i).$$

3. Scrivere in forma algebrica i numeri di modulo $\rho = 1,\ 4,\ 5,\ 2$ e argomento rispettivamente $\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{3\pi}{4}$.
4. Scrivere in forma polare (calcolandone modulo e argomento) i numeri complessi:

$$1+i, \quad i-1, \quad 1+i\sqrt{3}, \quad \sqrt{3}+i, \quad \frac{1-i}{(1+i)^2}$$

5. Servendosi della formula di De Moivre scrivere in forma algebrica le potenze $(1+i)^n$, $(1-i)^n$, $(\sqrt{3}+i)^n$, per $n = 2,3,4,5$. Ricalcolare le potenze cubiche $(n=3)$ utilizzando la formula del cubo di un binomio.
6. Calcolare z^6 con $z = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$.
7. Calcolare le radici cubiche e seste di $-i$ e di -1, dandone la rappresentazione grafica.
8. Verificare che $(1-i)^6 + \left(\frac{1}{i}\right)^4 - 8\,i^5 - i^4 = 0$.
9. Risolvere l'equazione $iz^2 - 2z + 3i = 0$ (Sol.: $z_1 = -3i$, $z = i$.)

1.11 Localizzazione delle radici di un polinomio

Data una funzione razionale, frazione di due polinomi

$$G(z) = \frac{A_m(z)}{B_n(z)} = \frac{\text{polinomio di grado } m}{\text{polinomio di grado } n}, \tag{1.19}$$

si dicono **zeri** e **poli** di $G(z)$ le radici di $A_m(z)$ e di $B_n(z)$ rispettivamente. In svariate applicazioni si pone il problema di conoscere la collocazione nel piano complesso degli zeri e dei poli di una data $G(z)$, evitando il loro calcolo numerico. Una prima e alquanto efficace soluzione di questo **problema della localizzazione** è data da un teorema di Cauchy, noto come **principio degli argomenti** (o **dell'argomento**):[1]

Teorema 1.11.1 – *Sia γ una curva chiusa nel piano complesso orientata in senso antiorario. Siano $z_i(G)$ e $p_i(G)$ rispettivamente il numero di zeri e di poli di $G(z)$*

[1] ??? argomento di un numero complesso

interni alla regione limitata del piano complesso definita da γ*. Se nessun polo o zero di* $G(z)$ *appartiene a* γ*, allora* $G(\gamma)$ *è una curva chiusa e limitata che non passa per l'origine e compie intorno all'origine un numero di rotazioni antiorarie pari a* $z_i(G) - p_i(G)$*.*

Qui $G(\gamma)$ è la curva ottenuta da $G(z)$ facendo percorrere tutta la curva γ dalla variabile complessa z. Siccome la dimostrazione di questo teorema rientra in corsi superiori di Analisi, per le applicazioni che seguiranno[2] sarà sufficiente esaminare il problema della localizzazione degli zeri di un polinomio di grado n

$$P_n(z) = z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + a_1\, z + a_0. \tag{1.20}$$

Non è restrittivo supporre che il polinomio sia **monico**, cioè che il coefficiente della potenza più alta di z sia uguale a 1.

Chiamiamo **ciclo di controllo** una curva γ sul piano complesso $\mathbb{C}_z$, con $z = x + i\, y$, chiusa e senza autointersezioni. Un ciclo di controllo delimita un insieme aperto D che chiamiamo **dominio di controllo**. Mentre un ciclo di controllo viene percorso dalla variabile z, su di un secondo piano complesso $\mathbb{C}_Z$, con $Z = X + i\, Y$, viene a definirsi un **ciclo di risposta** Γ costituito dai valori che il polinomio $P_n(z)$ assume su γ. Il ciclo di risposta Γ è ancora una curva chiusa ma può presentare delle autointersezioni. Dalla forma di Γ e dal suo variare al variare del ciclo di controllo si determinano via via le posizioni delle radici.

I cicli di controllo possono essere di vario tipo, a seconda delle esigenze. Si possono considerare cicli parametrizzati $z(t) = x(t) + i\, y(t)$ del tipo illustrato in Fig. 1, col parametro t che varia da $t = 0$ (inizio del ciclo) a $t = T$ (periodo del ciclo). Si possono considerare anche cicli composti da più curve parametrizzate, come per esempio quello illustrato in Fig. 2 (adatto alla localizzazione delle radici con parte reale positiva o nulla).

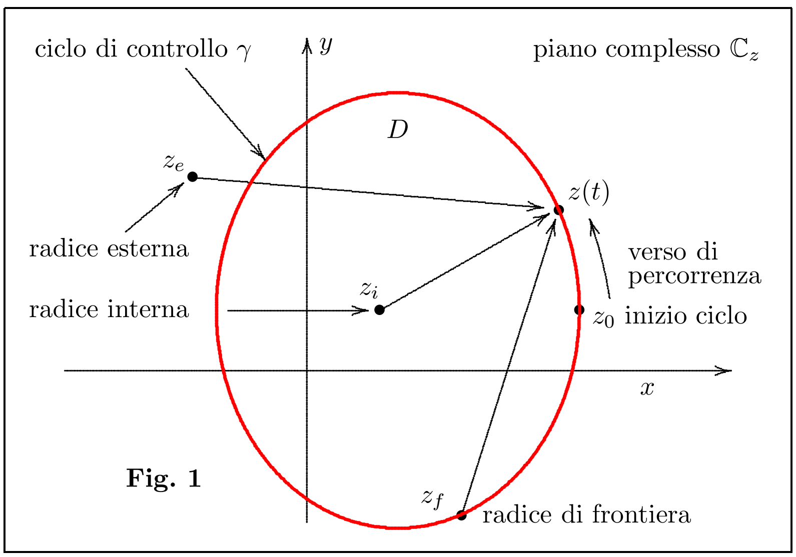


Fig. 1

[2] Vedi il capitolo sulla Trasformata di Laplace.

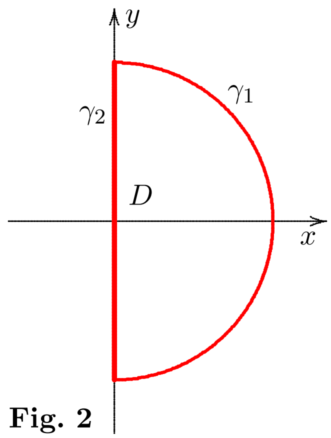


Fig. 2

In ogni caso, un ciclo di controllo comporta la distinzione delle radici in tre tipi (vedi Fig. 1):

$$\begin{cases} \text{radici interne} & z_i, \\ \text{radici esterne} & z_e, \\ \text{radici di frontiera} & z_f. \end{cases}$$

Il ciclo di risposta Γ è descritto da equazioni parametriche $Z(t) = X(t) + i\,Y(t)$. Le caratteristiche geometriche di Γ di cui tener conto sono le seguenti:

$\boxed{1}$ Se Γ passa per l'origine di $\mathbb{C}_Z$ allora γ passa per una o più radici (**radici di frontiera**, Fig. 1). Infatti la condizione $Z(t_*) = 0$ equivale all'annullarsi del polinomio per $t = t_*$. Va osservato che questa è una situazione piuttosto 'instabile': con una piccola variazione della curva di controllo γ una radice di frontiera diventa o esterna o interna.

$\boxed{2}$ Se $Z(t)$ <u>non</u> passa per l'origine di $\mathbb{C}_Z$ e compie k giri intorno a questa, allora nel dominio di controllo D si trovano k radici (**radici interne**, Fig. 1).

Per dimostrarlo si parte dall'osservazione che, per mezzo della formula di Euler,

$$z - z_* = |z - z_*|\, e^{i\theta_*},$$

la fattorizzazione del polinomio

$$P_n(z) = (z - z_1)\,(z - z_2)\ldots(z - z_n)$$

può porsi nella forma

$$P_n(z) = \rho(z) \cdot e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} \cdot \ldots \cdot e^{i\theta_n} \tag{1.21}$$

essendo $\rho(z) \stackrel{\text{def}}{=} |P_n(z)| = |z - z_1|\,|z - z_2| \ldots |z - z_n|$. Ritornando quindi al piano $\mathbb{C}_z$ (Fig. 3) osserviamo che mentre $z(t)$ percorre un ciclo completo a partire da un punto iniziale z_0 accade quanto segue:

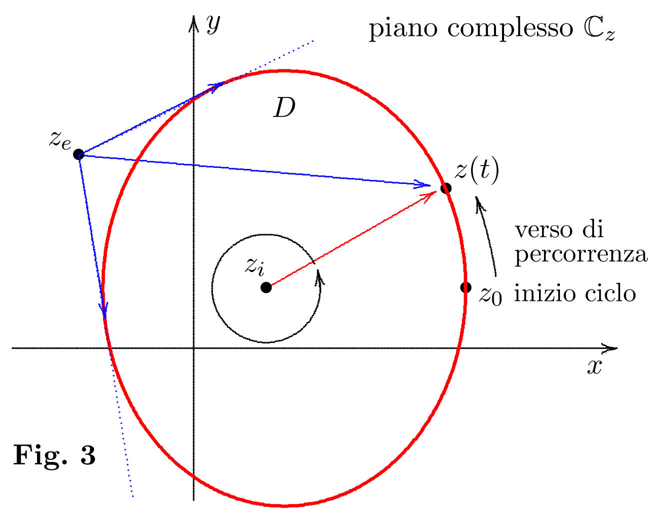


Fig. 3

(i) Per ogni radice interna z_i il vettore $z(t) - z_i$ ruota di un angolo 2π. Di conseguenza, guardando la (1.21), mentre il modulo $\rho(z)$ varia senza mai annullarsi perchè non ci sono radici di frontiera, gli angoli θ_i corrispondenti alle k radici interne producono una rotazione complessiva $2\,\pi\,k$ del vettore $P_n(z)$ intorno all'origine.
(ii) Per ogni radice esterna z_e il vettore $z(t) - z_e$ oscilla tra due estremi formanti un angolo minore di π e non provoca rotazioni complete.

L'esempio che segue mette in evidenza una terza proprietà:

$\boxed{3}$ Se il polinomio ha coefficenti reali e se il ciclo di controllo è simmetrico rispetto all'asse reale, vale a dire se $z^*(t) = z(t)$, allora anche il ciclo di risposta è simmetrico: $Z^*(t) = Z(t)$. Infatti, per ogni polinomio a coefficienti reali vale la condizione $P_n^*(z) = P(z^*)$. Di qui segue:

$$Z^*(t) = P_n^*(z) = P(z^*) = P(z) = Z(t).$$

• **Esempio**. Verifichiamo le proprietà $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ e $\boxed{3}$ con un semplice ma significativo esempio. Consideriamo il polinomio di secondo grado a coefficienti reali

$$P_2(z) = z^2 - 2\,z + 2$$

le cui radici sono $1 \pm i$. Prendiamo come ciclo di controllo una circonferenza di centro l'origine e raggio r, percorsa in senso antiorario:

$$z(t) = r\,e^{it}.$$

Il ciclo di risposta risulta essere:

$$Z(t) = r^2\,e^{i2t} - 2\,r\,e^{it} + 2 = r^2\,(\cos 2t + i\,\sin 2t) - 2\,r\,(\cos t + i\,\sin t) + 2.$$

$$Z(t) = X(t) + i\,Y(t):\ \begin{cases} X(t) = r^2\ \cos 2t - 2\,r\ \cos t + 2, \\ Y(t) = r^2\ \sin 2t - 2\,r\ \sin t. \end{cases}$$

Eseguiamo alcuni sondaggi con il raggio r via via crescente, riportando (a sinistra) il ciclo di risposta $Z(t)$ e (a destra) il ciclo di controllo $z(t)$. I punti iniziali a $t = 0$

$$z(0):\ \begin{cases} x_0 = r, \\ y_0 = 0, \end{cases} \qquad Z(0):\ \begin{cases} X_0 = r^2 - 2\,r + 2, \\ Y_0 = 0, \end{cases}$$

sono contrassegnati con il simbolo $\circ$. Contrassegnamo col simbolo $\bullet$ altri valori di t sul ciclo di risposta in modo da renderne chiaro il verso di percorrenza, indicati con una freccia:

$$Z(\tfrac{1}{2}\pi):\ \begin{cases} X(\frac{1}{2}\pi) = -r^2 - 2\,r + 2, \\ Y(\frac{1}{2}\pi) = -2\,r. \end{cases} \qquad Z(\pi):\ \begin{cases} X(\pi) = r^2 + 2\,r + 2, \\ Y(\pi) = 0. \end{cases}$$

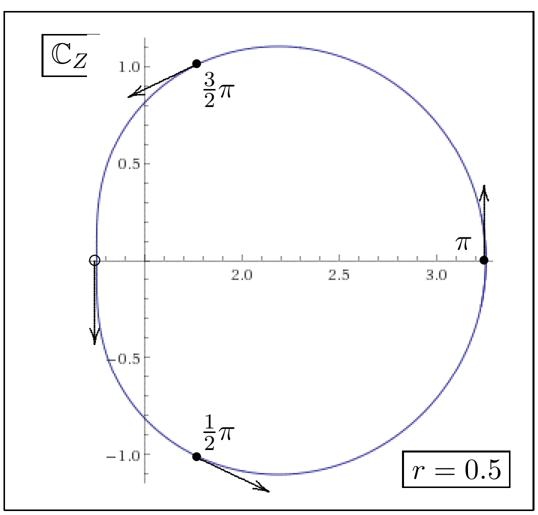
$$Z(\tfrac{3}{2}\pi):\ \begin{cases} X(\frac{3}{2}\pi) = -r^2 - 2\,r + 2, \\ Y(\frac{3}{2}\pi) = -2\,r. \end{cases}$$

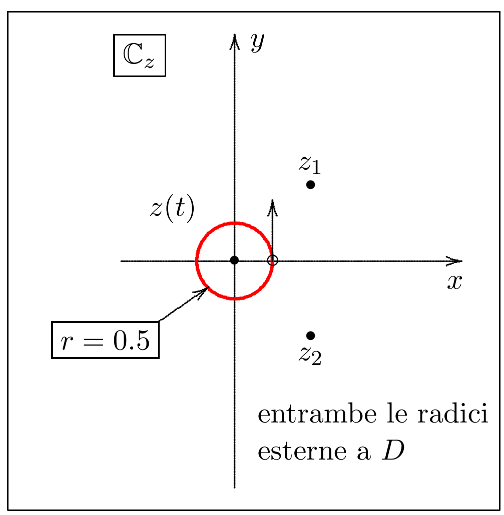
$\boxed{r = 0.5}$

$$Z(t):\ \begin{cases} X(t) = \frac{1}{4}\ \cos 2t - \cos t + 2, \\ Y(t) = \frac{1}{4}\ \sin 2t - \sin t. \end{cases}$$

$$Z(0):\ \begin{cases} X(0) = \frac{5}{4} = 1.25, \\ Y(0) = 0. \end{cases} \qquad Z(\tfrac{1}{2}\pi):\ \begin{cases} X(\frac{1}{2}\pi) = \frac{7}{4} = 1.75, \\ Y(\frac{1}{2}\pi) = -1. \end{cases} \qquad Z(\pi):\ \begin{cases} X(\pi) = 3.25, \\ Y(\pi) = 0. \end{cases}$$

$$Z(\tfrac{3}{2}\pi):\ \begin{cases} X(\frac{3}{2}\pi) = 1.75, \\ Y(\frac{3}{2}\pi) = 1. \end{cases}$$





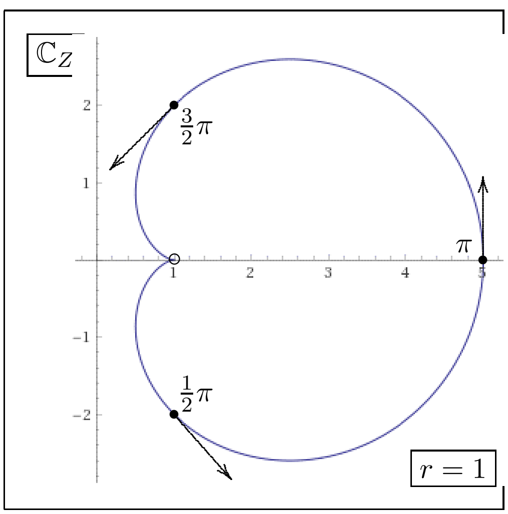
Il ciclo $Z(t)$ sta tutto nel semipiano reale positivo, quindi non compie alcun giro intorno all'origine. Siamo nel caso $\boxed{2}$: entrambe le radici sono esterne al dominio D di controllo.

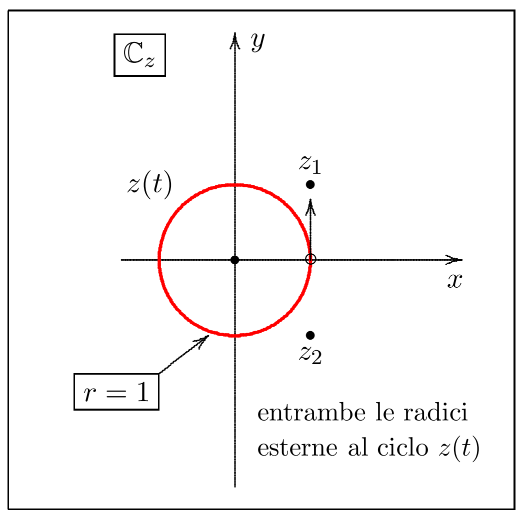
$\boxed{r = 1}$

$$Z(t)\colon \begin{cases} X(t) = \cos 2t - 2\,\cos t + 2, \\ Y(t) = \sin 2t - 2\,\sin t. \end{cases}$$

$$Z(0)\colon \begin{cases} X_0 = 1, \\ Y_0 = 0. \end{cases} \qquad Z(\tfrac{\pi}{2})\colon \begin{cases} X(\frac{\pi}{2}) = 1, \\ Y(\frac{\pi}{2}) = -2. \end{cases} \qquad Z(\pi)\colon \begin{cases} X(\pi) = 5, \\ Y(\pi) = 0. \end{cases}$$

$$Z(\tfrac{3}{2}\pi)\colon \begin{cases} X(\frac{3}{2}\pi) = 1, \\ Y(\frac{3}{2}\pi) = 2. \end{cases}$$

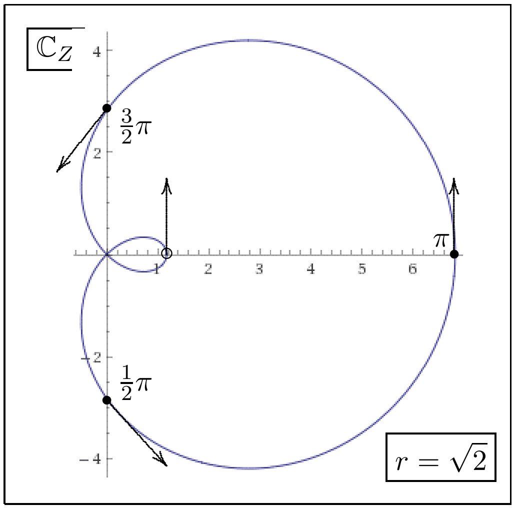


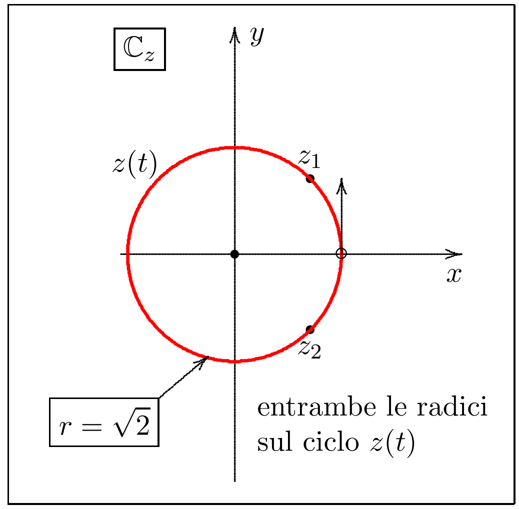


$Z(t)$ non passa per l'origine e non compie alcun giro intorno a questa. Siamo nel caso $\boxed{2}$: entrambe le radici sono esterne al dominio D di controllo.

$\boxed{r = \sqrt{2} = 1.414...}$

$$Z(t)\colon \begin{cases} X(t) = 2\left(\cos 2t - \sqrt{2}\,\cos t + 1\right), \\ Y(t) = 2\left(\sin 2t - \sqrt{2}\,\sin t\right). \end{cases}$$





$$Z(0)\colon\ \begin{cases} X_0 = 2\left(2-\sqrt{2}\right) = 1.171..., \\ Y_0 = 0. \end{cases} \qquad Z(\tfrac{1}{2}\pi)\colon\ \begin{cases} X(\frac{\pi}{2}) = 0, \\ Y(\frac{\pi}{2}) = -2\sqrt{2} = -2.828... \end{cases}$$

$$Z(\pi)\colon\ \begin{cases} X(\pi) = 2\left(2+\sqrt{2}\right) = 6.828..., \\ Y(\pi) = 0. \end{cases} \qquad Z(\tfrac{3}{2}\pi)\colon\ \begin{cases} X(\frac{3}{2}\pi) = 0, \\ Y(\frac{3}{2}\pi) = 2\sqrt{2} = 2.828... \end{cases}$$

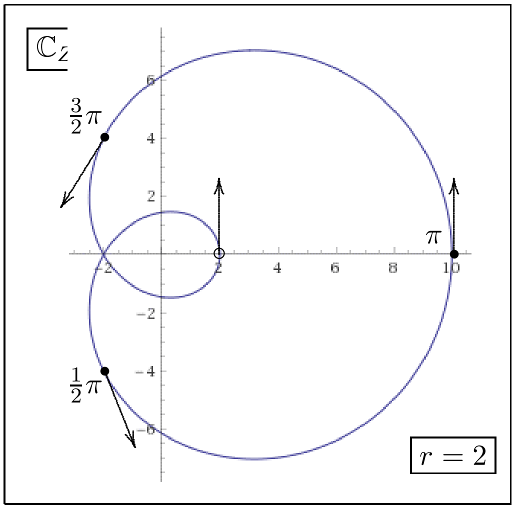
$Z(t)$ passa per l'origine due volte. Siamo nel caso $\boxed{1}$: entrambe le radici stanno sul ciclo di controllo.

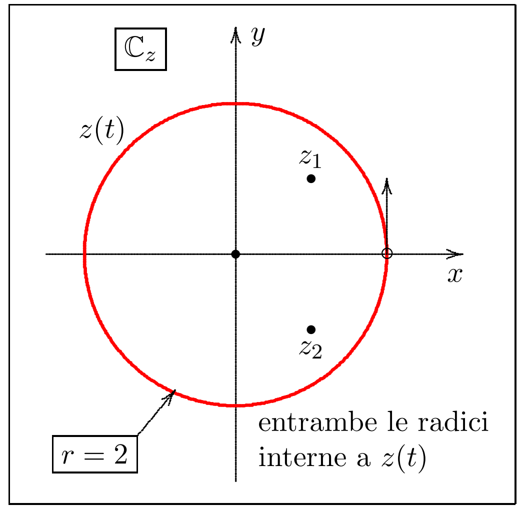
$\boxed{r = 2}$

$$Z(t)\colon\ \begin{cases} X(t) = 2\,(2\,\cos 2t - 2\,\cos t + 1)\,, \\ Y(t) = 4\,(\sin 2t - \sin t)\,. \end{cases}$$

$$Z(0)\colon\ \begin{cases} X_0 = 2, \\ Y_0 = 0. \end{cases} \qquad Z(\tfrac{1}{2}\pi)\colon\ \begin{cases} X(\frac{\pi}{2}) = -2, \\ Y(\frac{\pi}{2}) = -4. \end{cases}$$

$$Z(\pi)\colon\ \begin{cases} X(\pi) = 10, \\ Y(\pi) = 0. \end{cases} \qquad Z(\tfrac{3}{2}\pi)\colon\ \begin{cases} X(\frac{3}{2}\pi) = -2, \\ Y(\frac{3}{2}\pi) = 4. \end{cases}$$





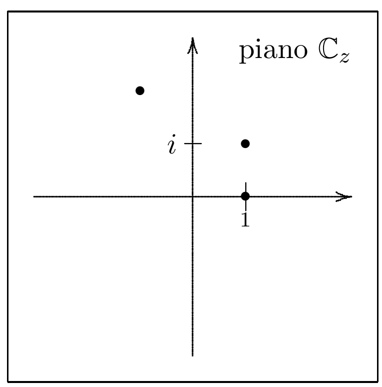
$Z(t)$ compie due giri intorno all'origine. Siamo nel caso $\boxed{2}$: entrambe le radici stanno all'interno del ciclo di controllo.

• **Esercizio**. Si consideri il polinomio di terzo grado

$$\boxed{P_3(z) = z^3 - (1+3i)z^2 + (4i-3)z + 3 - i} \tag{1.22}$$

Si verifichi che le sue radici sono

$$\begin{cases} z_1 = 1, \\ z_2 = 1 + i, \\ z_3 = -1 + 2i. \end{cases}$$

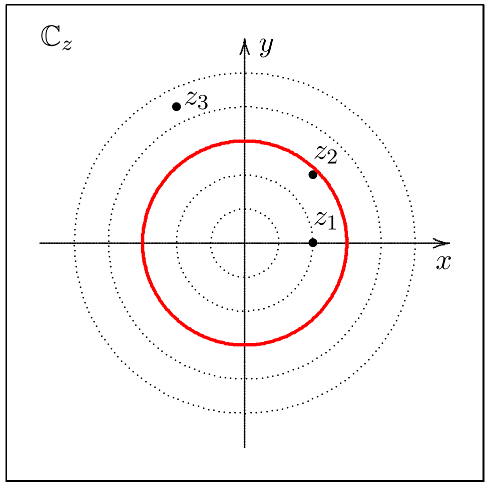


ovvero che la sua fattorizzazione è

$$P_3(z) = (z-1)(z-1-i)(z+1-2i).$$

Esploriamo il piano $\mathbb{C}_z$ prendendo come cicli di controllo $z(t)$ le circonferenze centrate nell'origine con raggio r via via crescente e parallelamente osserviamo il comportamento del ciclo $Z(t)$ sul piano $\mathbb{C}_Z$.

$z(t) = r \cdot e^{it} \mapsto$



Inserendo $z = r \cdot e^{it}$ nel polinomio (1.22) si ottiene $Z(t)$:

$$Z(t) = r^3 \cdot e^{i3t} - (1+3i)r^2 \cdot e^{i2t} + (4i-3)r \cdot e^{it} + 3 - i$$
$$= r^3 \cdot (\cos 3t + i\, \sin 3t) - (1+3i)\, r^2 \cdot (\cos 2t + i\, \sin 2t)$$
$$+(4i-3)\, r \cdot (\cos t + i\, \sin t) + 3 - i.$$

Parte reale di $Z(t)$:

$$X(t) = r^3\, \cos 3t + r^2\, (3\, \sin 2t - \cos 2t) - r\, (4\, \sin t + 3\, \cos t) + 3.$$

Parte immaginaria:

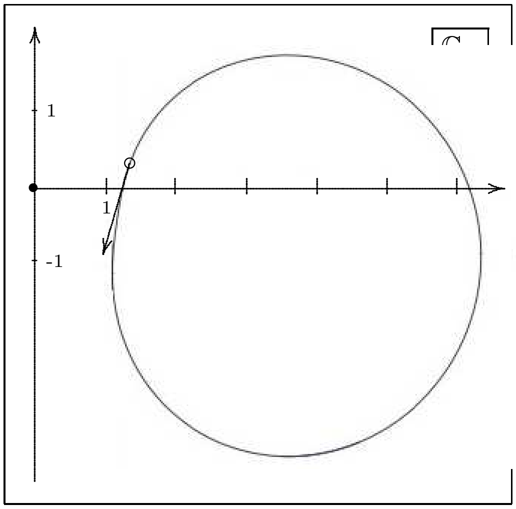
$$Y(t) = r^3\, \sin 3t - r^2\, (3\, \cos 2t + \sin 2t) + r\, (4\, \cos t - 3\, \sin t) - 1.$$

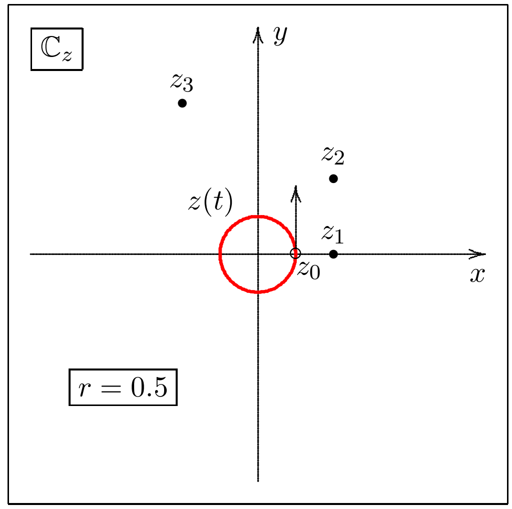
Punto iniziale del ciclo $Z(t)$:

$$\begin{cases} X_0 = X(0) = r^3 - r^2 - 3\, r + 3, \\ Y_0 = Y(0) = -3\, r^2 + 4\, r - 1. \end{cases}$$

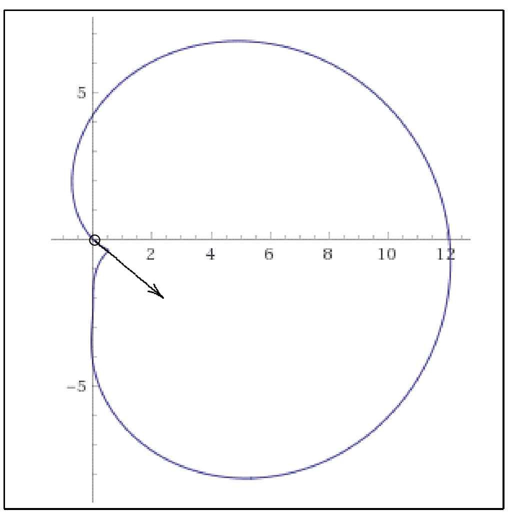
Verificare e commentare i risultati grafici seguenti:

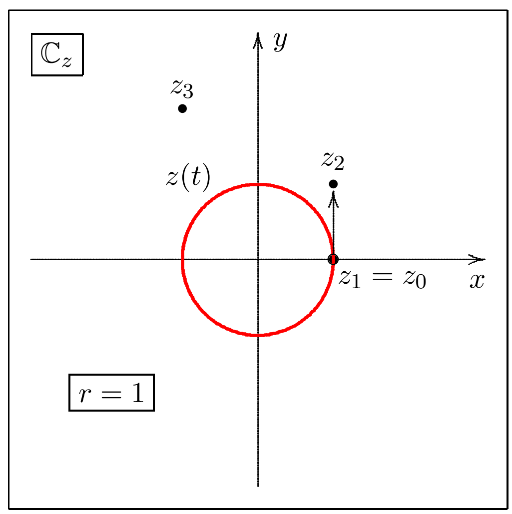
$\boxed{r = 0.5}$



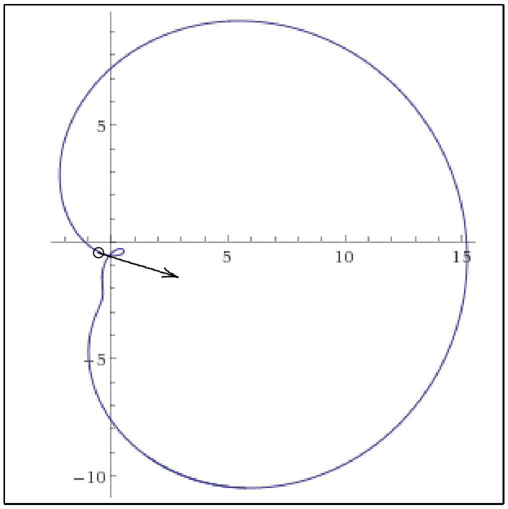


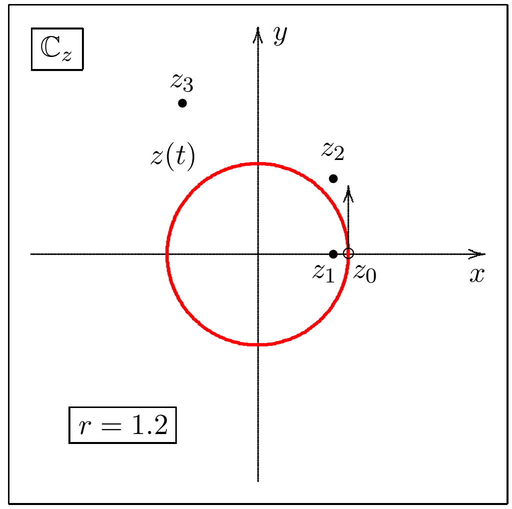
$\boxed{r = 1}$



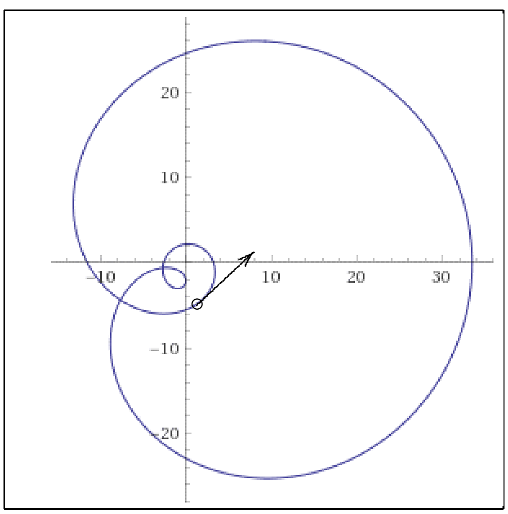


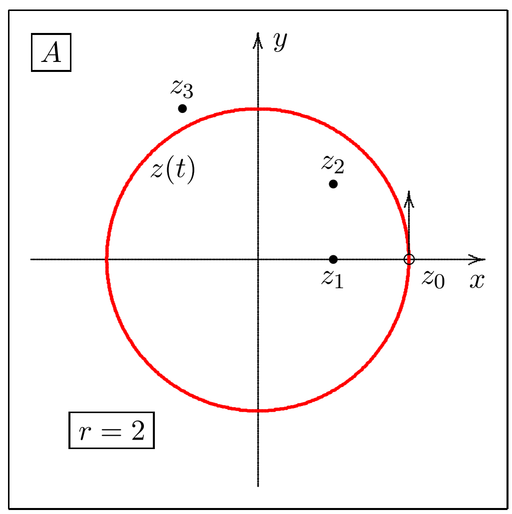
$r = 1.2$


5
5
10
15
−5
−10


$\mathbb{C}_z$
y
z_3
$z(t)$
z_2
z_1
z_0
x
$r = 1.2$

$r = 2$


20
10
−10
10
20
30
−10
−20


A
y
z_3
$z(t)$
z_2
z_1
z_0
x
$r = 2$

$\boxed{r = 3}$