

Corso di
Matematica C
per la
Laurea in Chimica
a.a. 2003/04

S. BENENTI

Ultima versione marzo 2006

Matrici

Integrali multipli

Campi scalari e vettoriali

Serie di Fourier

Matematica della spettroscopia a raggi infrarossi

Metodo dei minimi quadrati

S. Benenti

MATRICI

1 - Matrici e operazioni fondamentali.

Una **matrice** è una tabella rettangolare di numeri, composta da righe e da colonne. Se m ed n sono il numero delle righe e delle colonne rispettivamente, allora la matrice si dice **di tipo** o **dimensione** $m \times n$. Una matrice si dice **complessa** o **reale** se formata da numeri complessi o reali rispettivamente. Per esempio,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

è una matrice reale 3×4 (3 righe e 4 colonne). Se $m = n$ si ha una **matrice quadrata di ordine** n . Per esempio,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

è una matrice reale quadrata di ordine 3.

Gli elementi di una generica matrice \mathbf{A} sono rappresentati con *simboli a due indici* a_{ij} . Il primo indice è **indice di riga**: indica la riga in cui si trova l'elemento; il secondo è **indice di colonna**: indica la colonna in cui si trova l'elemento. In altri termini, l'elemento a_{ij} si trova all'incrocio della riga i con la colonna j . Per esempio una generica matrice 3×4 si denota con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}.$$

Nel caso della matrice particolare (1) abbiamo: $a_{11} = 2$, $a_{12} = -1$ e così via. Scriviamo brevemente $\mathbf{A} = (a_{ij})$ per indicare che la matrice è composta da elementi a_{ij} . Per racchiudere la matrice, al posto delle parentesi quadre [], si usano anche le parentesi tonde () o le doppie barre || ||.

Una matrice costituita da una sola riga o da una sola colonna si dice **vettore riga** o **vettore colonna** rispettivamente. In questo caso si usano simboli ad un solo indice. Nel caso di un vettore riga, si può interporre una virgola fra gli elementi:

$$[v_1, v_2, \dots, v_n].$$

Nell'ambito della teoria delle matrici per **vettore** in genere s'intende tacitamente (se non specificato diversamente) un vettore colonna:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Si noti che una matrice a m righe ed n colonne può pensarsi formata da m vettori riga oppure da n vettori colonna.

Le matrici intervengono in vari argomenti di matematica e sono utilizzate in varie applicazioni. Su di esse si definiscono tre operazioni fondamentali.

1 **Prodotto di una matrice per un numero.** Il prodotto di una matrice \mathbf{A} per un numero a è la matrice denotata con $a\mathbf{A}$ ottenuta moltiplicando ogni suo elemento per a , i cui elementi sono quindi aa_{ij} . Per esempio,

$$2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

2 **Somma di due matrici.** È definita solo fra matrici dello stesso tipo. Se \mathbf{A} e \mathbf{B} sono dello stesso tipo $m \times n$, la matrice somma $\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ è ottenuta sommando gli elementi dello stesso posto (detti **omologhi**): se $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{B} = (b_{ij})$, $\mathbf{S} = (s_{ij})$, allora

$$\boxed{s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}} \quad (1)$$

Per esempio

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per l'operazione di somma fra matrici valgono le proprietà commutativa, associativa e distributiva (rispetto alla moltiplicazione per un numero). La **matrice nulla** $\mathbf{0}$ di dimensione $m \times n$, costituita da tutti zeri, si comporta come elemento neutro della somma di matrici dello stesso tipo: $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$. Ad ogni matrice \mathbf{A} corrisponde quindi una **matrice opposta** $-\mathbf{A}$ tale che $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, i cui elementi sono gli opposti $-a_{ij}$ degli elementi di \mathbf{A} .

3 **Prodotto di due matrici.** Si denota con \mathbf{AB} ed è definito solo nel caso in cui il numero delle colonne di \mathbf{A} (primo fattore) è uguale al numero delle righe di \mathbf{B} (secondo fattore), cioè se \mathbf{A} è di tipo $l \times m$ e \mathbf{B} è di tipo $m \times n$. Il risultato è una matrice \mathbf{P} di tipo $l \times n$:

$$\mathbf{A}_{l \times m} \mathbf{B}_{m \times n} = \mathbf{P}_{l \times n}.$$

Gli elementi della matrice prodotto sono definiti da

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} \quad (2)$$

Si tratta di un **prodotto righe per colonne**: l'elemento p_{ij} è il **prodotto scalare** della riga i di \mathbf{A} (intesa come vettore) con la colonna j di \mathbf{B} (intesa come vettore). Entrambe hanno la stessa dimensione m . Il **prodotto scalare** di due vettori è per definizione la somma dei prodotti degli elementi "omologhi", cioè occupanti il medesimo posto (si veda a fine paragrafo).

Esempio 1. Siano per esempio

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

L'elemento p_{11} della matrice prodotto $\mathbf{P} = \mathbf{AB}$ si ottiene moltiplicando scalarmente la prima riga di \mathbf{A} con la prima colonna di \mathbf{B} :

$$p_{11} = 2 \cdot 5 + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 12,$$

l'elemento p_{12} moltiplicando la prima riga con la seconda colonna, e così via. Il risultato è:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ 6 & -3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Il prodotto di matrici non è commutativo, per due motivi: primo perché non ha senso invertire l'ordine dei fattori per questione di dimensione, a meno che non sia $l = n$; secondo, perché anche in questo caso il risultato del prodotto è in genere diverso. Il prodotto è associativo. Si dimostra infatti che vale l'uguaglianza

$$\boxed{(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})} \quad (3)$$

Sulle matrici si definiscono altre importanti operazioni: la **trasposizione**, la **coniugazione complessa**, la **coniugazione hermitiana** o **aggiunzione**.

[4] La **matrice trasposta** di una matrice \mathbf{A} è la matrice denotata con \mathbf{A}^T ottenuta da \mathbf{A} scambiando le righe con le colonne. Quindi se \mathbf{A} è di tipo $m \times n$, \mathbf{A}^T è di tipo $n \times m$. Se denotiamo con a_{ij}^T le componenti di \mathbf{A}^T , allora

$$\boxed{a_{ij}^T = a_{ji}} \quad (4)$$

Esempio:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

5] La **matrice complessa coniugata** di una matrice \mathbf{A} è la matrice \mathbf{A}^* i cui elementi sono i coniugati complessi degli elementi di \mathbf{A} (la parte immaginaria dei suoi elementi viene cambiata di segno). Se la matrice è reale, allora $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$.

6] La **matrice coniugata hermitiana** (dal matematico francese Charles Hermite, 1822-1901) o **aggiunta**, di una matrice \mathbf{A} è la matrice coniugata complessa e trasposta di \mathbf{A} ed è denotata con \mathbf{A}^\dagger :

$$\boxed{\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{*\top}, \quad a_{ij}^\dagger = a_{ji}^*} \quad (5)$$

Se la matrice è reale allora la sua coniugata hermitiana coincide con la sua trasposta.

Si dimostra che *la trasposta della matrice prodotto di due matrici è il prodotto delle matrici trasposte in ordine inverso*:

$$\boxed{(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top} \quad (6)$$

Siccome per la coniugazione complessa si ha

$$(\mathbf{AB})^* = \mathbf{A}^* \mathbf{B}^*, \quad (7)$$

risulta anche

$$\boxed{(\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger} \quad (8)$$

Per quel che riguarda i vettori si definiscono infine due **prodotti scalari**. Siano dati due vettori (colonna):

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

7] Il **prodotto scalare (ordinario)**, che denotiamo con $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, è definito da

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n. \quad (9)$$

Il prodotto scalare può interpretarsi come prodotto di matrici:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^\top \mathbf{v}. \quad (10)$$

Infatti:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{v} = [u_1, u_2, \dots, u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n.$$

Questo prodotto gode delle stesse proprietà del prodotto scalare tra vettori euclidei, in particolare è **commutativo** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$, con una eccezione: il prodotto scalare di un vettore complesso per se stesso $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ può non essere positivo né tantomeno reale. Questa circostanza limita il suo uso ai soli vettori reali (esso è però usato anche per vettori complessi, nel prodotto di matrici, come si è detto); solo per vettori reali si ha infatti

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0 \quad (\mathbf{u} \neq 0, \text{ reale}).$$

Per questo motivo esso è stato sostituito dal prodotto seguente.

☐ Il **prodotto (scalare) hermitiano**, che denotiamo con $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$, è definito da

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i^* v_i = u_1^* v_1 + u_2^* v_2 + \dots + u_n^* v_n. \quad (11)$$

In termini di prodotto di matrici si ha

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^\dagger \mathbf{v}. \quad (12)$$

Infatti:

$$\mathbf{u}^\dagger \mathbf{v} = [u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1^* v_1 + u_2^* v_2 + \dots + u_n^* v_n.$$

Si noti che per vettori reali il prodotto hermitiano coincide con il prodotto scalare ordinario. Il prodotto hermitiano gode delle seguenti proprietà:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle^* \\ \langle z \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = z^* \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{u} | z \mathbf{v} \rangle = z \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 | \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}_1 | \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}_2 | \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle > 0 \quad (\mathbf{u} \neq 0) \end{array} \right. \quad (13)$$

Si noti dunque che il prodotto hermitiano non è commutativo, a meno che esso non risulti un numero reale (per la (13₁)), ma è ancora positivo: il prodotto di un vettore non nullo per se stesso è sempre un numero reale positivo (vedi la (13₅)). Infatti:

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i^* u_i = \sum_{i=1}^n |u_i|^2 > 0.$$

Due vettori si dicono **ortogonali** secondo il prodotto scalare o secondo il prodotto hermitiano se, rispettivamente,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{o} \quad \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = 0. \quad (14)$$

Per i vettori reali i due concetti di ortogonalità coincidono.

Si dice **norma** o **modulo** di un vettore il numero reale positivo

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle}. \quad (15)$$

Un vettore a norma uguale a 1 è detto **unitario**. Nel caso di un vettore reale si ha

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}.$$

2 - Matrici quadrate.

Di particolare importanza sono le matrici quadrate. La **diagonale principale** di una matrice quadrata è costituita dagli elementi che stanno all'incrocio tra una riga e colonna dello stesso indice, cioè dagli elementi del tipo a_{ii} . Una matrice si dice **matrice diagonale** se tutti i suoi elementi sono nulli tranne quelli della diagonale principale (quindi $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$). Per esempio la generica matrice diagonale di ordine 3 è

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}.$$

La matrice diagonale di ordine n composta da tutti numeri 1 (cioè tale che $a_{ii} = 1$ e $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$) si dice **matrice unità** di ordine n (o **matrice identità**). La si denota con $\mathbf{1}_n$ o semplicemente con $\mathbf{1}$ qualora non sia necessario specificarne l'ordine. In alcuni testi è denotata con \mathbf{I} . Esempio:

$$\mathbf{1}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice di ordine n composta da tutti zeri si dice **matrice nulla** di ordine n . La si denota con $\mathbf{0}_n$ o semplicemente con $\mathbf{0}$ qualora non sia necessario specificarne l'ordine. Esempio:

$$\mathbf{0}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sull'insieme delle matrici quadrate di ordine n si definiscono come per le matrici generiche le operazioni di (I) moltiplicazione per un numero, (II) somma di due matrici, (III) prodotto di due matrici, (IV) trasposizione. Tutte queste operazioni sono "interne"

all'insieme, producono cioè ancora una matrice quadrata di ordine n . Come si è già osservato, il prodotto è associativo ma non è in generale commutativo: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Nel caso in cui però si abbia $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ si dice che le matrici \mathbf{A} e \mathbf{B} **commutano**.

La matrice nulla $\mathbf{0}$ si comporta da elemento neutro nella somma di matrici del suo stesso ordine, vale a dire

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

Nel prodotto invece, essa "annulla" ogni matrice:

$$\mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}\mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

La matrice unità $\mathbf{1}_n$ si comporta da elemento neutro nel prodotto di matrici del suo stesso ordine, vale a dire

$$\mathbf{A}\mathbf{1} = \mathbf{1}\mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

Osserviamo che nel caso di una matrice quadrata \mathbf{A} la trasposta \mathbf{A}^T si ottiene "rivoltando" la matrice attorno alla diagonale principale. Per esempio:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

La trasposta una matrice diagonale è la matrice stessa.

Data una matrice quadrata \mathbf{A} ci si chiede se esiste una matrice \mathbf{B} tale che $\mathbf{AB} = \mathbf{1}$, matrice che potremmo chiamare **inversa destra** di \mathbf{A} , oppure una matrice \mathbf{B}' tale che $\mathbf{B}'\mathbf{A} = \mathbf{1}$, matrice che potremmo chiamare **inversa sinistra** di \mathbf{A} . Ebbene, come vedremo, non tutte le matrici quadrate hanno un'inversa ma se una matrice \mathbf{A} ammette un'inversa questa è sia destra che sinistra ed inoltre è unica. La si denota con \mathbf{A}^{-1} . Pertanto

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{1}.$$

Per poter decidere se una matrice ammette l'inversa o no e, in caso affermativo, per calcolarla occorre introdurre la nozione di **determinante**.

3 - Definizione di determinante.

Ad ogni matrice quadrata $\mathbf{A} = (a_{ij})$ corrisponde un numero, detto **determinante** della matrice e denotato con $\det \mathbf{A}$ o con $|\mathbf{A}|$. La sua definizione è basata sui tre punti seguenti

□ Si calcolano tutti i possibili prodotti di n elementi della matrice (di dimensione n) del tipo

$$a_{1i} a_{2j} \dots a_{nk}, \quad (1)$$

dove l'insieme dei secondi indici (i, j, \dots, k) è una **permutazione** dei primi indici $(1, 2, \dots, n)$, cioè una successione di questi numeri presi in ordine diverso, ma senza

ripetizioni. Si può dimostrare che il numero di queste permutazioni è $n!$. Quindi i prodotti in questione sono in tutto $n!$. Si osservi che questi sono tutti i possibili prodotti di n elementi della matrice *presi in righe e colonne distinte*: in altri termini, nessuno di questi prodotti contiene due fattori appartenenti alla medesima colonna o alla medesima riga.

Per esempio, nel caso $n = 3$, tutte le possibili permutazioni dei tre numeri $(1, 2, 3)$ sono

$$\begin{cases} (1, 2, 3) & (2, 3, 1) & (3, 1, 2), \\ (2, 1, 3) & (1, 3, 2) & (3, 2, 1). \end{cases}$$

Come si vede esse sono $3! = 6$. La prima, $(1, 2, 3)$, si dice **permutazione identica**: nessun numero viene spostato rispetto alla successione fondamentale $(1, 2, 3)$. Dunque i 6 prodotti (1) sono

$$\begin{array}{ll} a_{11}a_{22}a_{33} & a_{12}a_{21}a_{33} \\ a_{12}a_{23}a_{31} & a_{11}a_{23}a_{32} \\ a_{13}a_{21}a_{33} & a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

2 Ognuno dei prodotti considerati va moltiplicato per $+1$ (quindi lasciato inalterato) o per -1 (quindi cambiato di segno) a seconda che la permutazione dei secondi indici (i, j, \dots, k) sia **pari** o **dispari**. Una permutazione si dice pari se è ottenuta con un numero pari di **scambi**, dispari in caso contrario. Uno scambio si effettua su due elementi. Per esempio la permutazione $(2, 3, 1)$ è ottenuta da $(1, 2, 3)$ scambiando fra loro i primi due elementi e poi i secondi due

$$(1, 2, 3) \rightarrow (2, 1, 3) \rightarrow (2, 3, 1).$$

Quindi è pari. Così $(3, 2, 1)$ si ottiene con uno scambio tra il primo ed il terzo elemento. Si trattadi una permutazione dispari. Il numero degli scambi che si effettuano per ottenere una permutazione può essere diverso, a seconda della procedura; per esempio la stessa permutazione $(3, 2, 1)$ si ottiene con tre scambi:

$$(1, 2, 3) \rightarrow (2, 1, 3) \rightarrow (2, 3, 1) \rightarrow (3, 2, 1).$$

Tuttavia, qualunque procedura si esegua per ottenere una data permutazione il numero degli scambi necessari è sempre o pari o dispari. Dunque le $n!$ permutazioni della successione $(1, 2, \dots, n)$ si distinguono in due classi, costituite ciascuna del medesimo numero $n!/2$ di permutazioni: **permutazioni pari**, quelle ottenute con un numero pari di scambi (tra queste vi è la permutazione identica), **permutazioni dispari**, quelle ottenute con un numero dispari di scambi. Nell'esempio precedente tutte le 3 permutazioni della prima riga sono pari, quelle della seconda sono dispari. Quindi, seguendo la procedura, consideriamo i numeri

$$\begin{array}{ll} a_{11}a_{22}a_{33} & - a_{12}a_{21}a_{33} \\ a_{12}a_{23}a_{31} & - a_{11}a_{23}a_{32} \\ a_{13}a_{21}a_{33} & - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

3 Il determinante è la somma di tutti questi prodotti opportunamente modificati nel segno come ora detto. In sintesi, la definizione di determinante si scrive

$$\boxed{\det \mathbf{A} = \sum (-1)^p a_{1i} a_{2j} \dots a_{nk}} \quad (2)$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le $n!$ possibili permutazioni (i, j, \dots, k) della successione fondamentale di indici $(1, 2, \dots, n)$ e dove p è il numero degli scambi necessari nel passaggio $(1, 2, \dots, n) \mapsto (i, j, \dots, k)$.

Osservazione 1. Nel caso $n = 3$ il procedimento ora esaminato si traduce nella formula seguente

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned} \quad (3)$$

L'applicazione di questa formula è resa automatica dalla **regola di Sarrus**: si sommano i tre prodotti delle diagonali discendenti e si sottraggono i tre prodotti delle diagonali ascendenti. Per esempio:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} &= 2 \cdot 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) \cdot 0 \\ &= -6 + 0 - 2 - 12 + 0 - 8 - 0 = -28. \end{aligned}$$

Osservazione 2. Per $n = 2$ si ha semplicemente

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Si osservi che vale ancora la regola di Sarrus: qui abbiamo due sole diagonali, una discendente ed una ascendente. Per esempio

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5.$$

Osservazione 3. La regola di Sarrus non vale per $n > 3$. Per il calcolo del determinante di una matrice quadrata di ordine superiore non si applica quasi mai la definizione: il numero delle operazioni aritmetiche richieste sarebbe troppo elevato. Si seguono invece altri metodi, basati su alcune proprietà notevoli del determinante. Uno di questi è il **metodo o regola di Laplace** (§5).

4 - Proprietà del determinante.

Un primo gruppo di proprietà è costituito da proprietà analoghe a quelle del prodotto misto di tre vettori (cioè del volume con segno del parallelepipedo formato da tre vettori), valide però per qualunque dimensione n . Si tenga presente che una matrice quadrata di ordine n può essere vista come composta da n vettori riga, oppure da n vettori colonna. Le proprietà che seguono si riferiscono alle righe, ma sono ugualmente valide se riferite alle colonne.

Nell'illustrare queste proprietà consideriamo per comodità matrici 3×3 . Possiamo allora pensare ad una tale matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

come composta dai tre vettori riga

$$\mathbf{r}_1 = [a_{11}, a_{12}, a_{13}]$$

$$\mathbf{r}_2 = [a_{21}, a_{22}, a_{23}]$$

$$\mathbf{r}_3 = [a_{31}, a_{32}, a_{33}]$$

e scrivere quindi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix}.$$

1 *Il determinante cambia di segno se nella matrice si scambiano fra loro due righe.*

Questa proprietà segue direttamente dalla definizione di determinante: se si scambiano per esempio le prime due righe, allora le permutazioni dei secondi indici (i, j, k) vanno riferite alla successione fondamentale $(2, 1, 3)$ anziché $(1, 2, 3)$ e quindi cambiano tutte di parità perché va considerato in tutte uno scambio in più.

2 *Se si moltiplica per un numero una riga di una matrice il determinante viene moltiplicato per quel numero.*

Questa proprietà segue subito dalla definizione di determinante, perché ogni prodotto contiene uno ed un solo elemento di quella riga.

3 *Se una matrice ha due righe uguali o proporzionali il suo determinante è nullo.*

Infatti nel caso in cui la matrice abbia due righe uguali se si scambiano fra loro queste due righe, il determinante da un lato non cambia perché la matrice è sempre la stessa, dall'altro deve cambiare di segno per la **1**. Nel caso invece abbia due righe proporzionali, se si divide una delle due righe per il coefficiente di proporzionalità il determinante viene diviso per quel numero per la proprietà precedente, ma la matrice che resta ha due righe uguali e quindi il suo determinante è nullo.

In quest'ultima proprietà, come nella seguente, le righe vanno trattate come "vettori riga". Moltiplicare una riga per un numero significa quindi moltiplicare tutti gli elementi di quella riga per quel numero. Sommare due (o più) righe significa sommarle come vettori e quindi sommare i loro elementi omologhi, cioè di posto corrispondente: il risultato è un vettore riga. Analogamente, una combinazione lineare di righe è una somma di più righe, ciascuna moltiplicata per un fattore.

4] *Se ad una riga si aggiunge una qualunque combinazione lineare delle altre il determinante non cambia.*

5] *Se una riga è considerata come somma di due vettori riga allora il determinante è la somma dei due determinanti delle matrici ottenute considerando rispettivamente i primi addendi ed i secondi addendi.*

Per esempio:

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}''_2 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{r}'_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \mathbf{r}''_2 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix}.$$

Alle precedenti si aggiungono le quattro seguenti proprietà fondamentali:

$\begin{aligned} \det \mathbf{1} &= 1 \\ \det(\mathbf{A}^\top) &= \det \mathbf{A} \\ \det(\mathbf{AB}) &= \det \mathbf{A} \det \mathbf{B} \\ \det(\mathbf{A}^{-1}) &= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \end{aligned}$	(1)
--	-----

La prima segue immediatamente dalla definizione di determinante, così come la seconda (è in sostanza la traduzione del fatto che le proprietà dei determinanti restano invariate se si sostituisce il termine "riga" con "colonna"). La dimostrazione della terza non è invece immediata. Se si pone $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ si trova

$$\det \mathbf{1} = \det \mathbf{A} \det(\mathbf{A}^{-1}),$$

per cui dalla prima proprietà segue la quarta.

5 - Matrice complementare e matrice inversa

Vediamo ora per quali matrici esiste l'inversa e come questa è calcolabile. Per far questo occorrono alcune premesse e due teoremi fondamentali.

Data una matrice \mathbf{A} dicesi **complemento algebrico** di un suo elemento a_{ij} il determinante della matrice ottenuta da \mathbf{A} sopprimendo la riga i e la colonna j e moltiplicato per $(-1)^{i+j}$ (cioè per ± 1 a seconda che la somma degli indici sia pari o dispari). Denotiamo con a_{ij}^C il complemento algebrico di a_{ij} . La matrice costituita dai complementi algebrici a_{ij}^C è detta **matrice complementare** di \mathbf{A} . La denotiamo con \mathbf{A}^C .

Esempio 1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \implies \mathbf{A}^C = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\mathbf{A}^C = \begin{bmatrix} -7 & 7 & -14 \\ 2 & -6 & -4 \\ -3 & -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Infatti:

$$a_{11}^C = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7, \quad a_{12}^C = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 7, \quad \text{ecc.}$$

Osservazione 1. Il passaggio al complementare commuta con l'operazione di trasposizione:

$$(\mathbf{A}^C)^T = (\mathbf{A}^T)^C.$$

Scriveremo semplicemente

$$\boxed{\mathbf{A}^{CT} = \mathbf{A}^{TC}}$$

Le proprietà fondamentali dei complementi algebrici di una matrice sono espresse nei due seguenti teoremi (di non immediata dimostrazione).

Teorema 1. *La somma dei prodotti degli elementi di una riga (o colonna) per i corrispondenti complementi algebrici è uguale al determinante della matrice.*

Se per esempio si sceglie la prima riga si ha

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n a_{1j} a_{1j}^C,$$

e prendendo la riga k

$$\boxed{\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n a_{kj} a_{kj}^C} \quad (1)$$

Questo teorema esprime la cosiddetta **regola di Laplace**, o regola dello **sviluppo di un determinante rispetto ad una riga** (o ad una colonna): il determinante di una matrice si calcola sommando i prodotti ottenuti moltiplicando gli elementi di una riga (o di una colonna) qualsiasi della matrice per i corrispondenti complementi algebrici. Dunque con questo metodo il calcolo del determinante di una matrice di ordine n è

ricondotto al calcolo di n determinanti di ordine $n - 1$. È chiaro che conviene applicare questa regola ad una riga contenente più zeri.

Teorema 2. *La somma dei prodotti degli elementi di una riga per i complementi algebrici corrispondenti di un'altra riga è nulla.*

Per esempio se si prendono gli elementi della prima riga e i complementi algebrici della seconda si ha

$$\sum_{j=1}^n a_{1j} a_{2j}^C = 0.$$

In generale, prendendo gli elementi della riga h e i complementi algebrici della riga $k \neq h$, si ha

$$\boxed{\sum_{j=1}^n a_{hj} a_{kj}^C = 0 \quad (k \neq h)} \quad (2)$$

È importante osservare che entrambi i teoremi, cioè le formule (1) e (2) si possono sintetizzare nell'unica scrittura

$$\boxed{\sum_{j=1}^n a_{hj} a_{kj}^C = \delta_{hk} \det \mathbf{A}} \quad (3)$$

dove il simbolo δ_{hk} vale 1 se $h = k$ e 0 se $h \neq k$ (prende il nome di **simbolo di Kronecker**). Possiamo ora leggere la (3) in termini matriciali. Se riscriviamo il primo membro della (3) facendo intervenire le componenti della matrice trasposta di \mathbf{A}^C ,

$$\sum_{j=1}^n a_{hj} a_{kj}^C = \sum_{j=1}^n a_{hj} a_{jk}^{CT},$$

vediamo che questo rappresenta le componenti del prodotto $\mathbf{A}\mathbf{A}^{CT}$. Per il secondo membro osserviamo che le componenti della matrice unità $\mathbf{1}$ sono proprio δ_{hk} , cioè 1 sulla diagonale principale (quando $h = k$) e zero altrove (quando $h \neq k$). Quindi l'equazione (3) è equivalente a

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{A}^{CT} = (\det \mathbf{A}) \mathbf{1}} \quad (4)$$

Da questa uguaglianza discende una conseguenza importante: se $\det \mathbf{A} \neq 0$ allora

$$\mathbf{A} \left(\frac{\mathbf{A}^{CT}}{\det \mathbf{A}} \right) = \mathbf{1}.$$

Questa nuova uguaglianza mostra che la matrice tra parentesi è proprio l'inversa di \mathbf{A} . Concludiamo pertanto che:

Teorema 3. Una matrice \mathbf{A} ammette inversa \mathbf{A}^{-1} se e solo se il suo determinante non è nullo. La matrice inversa è data da

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{A}^{\text{CT}}}$$
 (5)

Una matrice con determinante non nullo si dice **regolare** o **invertibile**. Altrimenti si dice **singolare**.

Esempio 2. Con la matrice dell'Esempio 1, si osserva che la prima riga ha uno zero; è quindi conveniente svilupparlo secondo la prima riga. Risultato:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-7) + 1 \cdot (-14) = -28.$$

È anche conveniente svilupparlo secondo la seconda colonna:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -0 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-6) - 2 \cdot 5 = -28.$$

Per quel che riguarda la matrice inversa, risulta

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{28} \begin{bmatrix} -7 & 7 & -14 \\ 2 & -6 & -4 \\ -3 & -5 & 6 \end{bmatrix}^{\text{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{28} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{14} & \frac{5}{28} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{7} & -\frac{3}{14} \end{bmatrix}$$

Si verifichi che si ha effettivamente $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1}$.

6 - Sistemi di equazioni lineari.

Una prima importante applicazione della teoria delle matrici si ha nella teoria dei **sistemi di equazioni lineari**. Ci limitiamo per comodità di scrittura al caso $n = 3$, ma l'estensione al caso n qualunque è immediata. Si consideri un sistema di **3 equazioni lineari**, cioè di primo grado, in 3 incognite $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$, cioè un sistema del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \quad (1)$$

dove i numeri a_{ij} e b_i sono dati. Si vogliono determinare 3 numeri (x_1, x_2, x_3) che soddisfano contemporaneamente alle tre equazioni. I numeri a_{ij} formano evidentemente una matrice quadrata, detta **matrice dei coefficienti** del sistema:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

I numeri b_i , detti **termini noti** si possono pensare costituenti un vettore colonna

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

A loro volta le incognite x_i possono considerarsi come elementi di un secondo vettore colonna

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Si osserva allora che il sistema (1) ammette una scrittura sintetica del tipo

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i$$

(con $n = 3$) e quindi, per la definizione di prodotto di matrici, assume la forma matriciale:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \quad (2)$$

Tradotto il sistema in quest'uguaglianza, se la matrice dei coefficienti ammette un'inversa \mathbf{A}^{-1} , allora moltiplicando ambo i membri a sinistra (si ricordi che il prodotto di matrici non è commutativo, quindi va precisato da quale parte si moltiplica), a primo membro si trova $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{1x} = \mathbf{x}$. Si ottiene quindi l'uguaglianza

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}. \quad (3)$$

In conclusione: il vettore incognito si ottiene moltiplicando la matrice inversa per il vettore dei termini noti, e il sistema è risolto. Abbiamo così dimostrato che

Teorema 1. *Se la matrice dei coefficienti \mathbf{A} di un sistema di equazioni lineari $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ha determinante non nullo allora il sistema ammette una ed una sola soluzione data da $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.*

Questa soluzione si può tuttavia esprimere attraverso un teorema "diretto", conseguenza del Teorema 1:

Teorema 2. Teorema o regola di Cramer. *Un sistema di equazioni lineari $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ammette un'unica soluzione se il determinante della matrice dei coefficienti non è nullo. Per ogni valore dell'indice i la soluzione x_i è data dal rapporto*

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}, \quad (5)$$

dove la matrice \mathbf{A}_i è ottenuta dalla matrice \mathbf{A} sostituendo la colonna i con la colonna dei termini noti.

Dimostrazione. Dalla (3) segue che

$$x_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}^{-1} b_k = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \sum_{k=1}^3 b_k a_{ki}^{\mathbf{C}}.$$

Ma per la regola di Laplace, quest'ultima sommatoria è proprio lo sviluppo secondo la colonna i della matrice \mathbf{A}_i . ■

Osservazione 1. Se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo, il sistema può o non avere nessuna soluzione o averne infinite. L'analisi di questi casi viene svolta utilizzando sia la matrice dei coefficienti sia la matrice rettangolare ottenuta aggiungendo la colonna dei termini noti, e s'inquadra nell'analisi del caso generale in cui il numero delle equazioni è diverso dal numero delle incognite.

Nel caso particolare sopra considerato, di tre equazioni in tre incognite, si può stabilire l'esistenza e il numero delle soluzioni attraverso l'interpretazione geometrica delle equazioni. Infatti un'equazione lineare rappresenta un piano nello spazio tridimensionale. Le soluzioni di un sistema di tre equazioni corrispondono quindi ai punti d'intersezione dei tre piani corrispondenti. Si hanno allora vari casi. (a) Il caso $\det \mathbf{A} \neq 0$ corrisponde al caso in cui i tre vettori ortogonali ai piani (che sono i vettori riga) non sono complanari. Quindi i piani si intersecano in un solo punto: si ha infatti una sola soluzione. (b) In caso di due piani paralleli e non coincidenti, non si hanno soluzioni. Questo è il caso in cui due righe della matrice \mathbf{A} sono proporzionali ma i corrispondenti termini noti non stanno nella stessa proporzione. (c) Se i tre piani passano per una stessa retta, le soluzioni sono infinite e possono farsi dipendere da un solo parametro (per esempio si fissa a piacere il valore della x e si determinano di conseguenza i valori della y e della z). Si dice allora che si hanno ∞^1 soluzioni. (d) I tre piani sono coincidenti, quindi l'intersezione è costituita dal piano stesso. Ciò corrisponde al caso in cui le tre equazioni differiscono tra loro solo per un fattore di proporzionalità. Si hanno pertanto ∞^2 soluzioni.

7 - Matrici e operatori lineari.

Come già si è osservato al paragrafo precedente, il prodotto di una matrice quadrata \mathbf{A} per un vettore colonna \mathbf{x} (della stessa dimensione) è ancora un vettore colonna $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$.

Ad esempio, nel caso $n = 3$, se

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

allora il prodotto

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1)$$

si traduce nel prodotto matriciale

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Eseguito il prodotto righe per colonne, risulta in definitiva per le singole componenti di \mathbf{x}' :

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{cases} \quad (3)$$

cioè

$$x'_i = \sum_j a_{ij} x_j \quad (4)$$

Il prodotto di una matrice per un vettore gode della seguente fondamentale **proprietà di linearità**

$$\mathbf{A}(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{A}\mathbf{x} + \mu\mathbf{A}\mathbf{y}, \quad (5)$$

qualunque siano i vettori ed i numeri (λ, μ) .

Consideriamo ora l'insieme di tutti i possibili vettori (colonna) complessi di dimensione n (N.B.: le considerazioni che seguono valgono anche per matrici e vettori reali). Quest'insieme coincide con l'insieme

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C} \quad (n \text{ volte})$$

di tutte le n -ple ordinate di numeri complessi. Consideriamo quindi un'applicazione di quest'insieme in se stesso:

$$f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n,$$

cioè una qualunque legge o operazione che ad ogni vettore \mathbf{x} associa un altro vettore $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$. Se quest'applicazione è tale da soddisfare all'uguaglianza

$$f(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda f(\mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{y}), \quad (6)$$

allora si dice che è un'**applicazione lineare** o un **operatore lineare**. Dal confronto con la (5) si osserva che ogni matrice \mathbf{A} (quadrata di ordine n) stabilisce un'applicazione lineare ponendo

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

(prodotto della matrice \mathbf{A} per la matrice colonna \mathbf{x}). Si può dimostrare che, viceversa, ogni applicazione lineare è di questo tipo, è cioè dovuta all'azione di una matrice. A proposito di questa corrispondenza biunivoca fra applicazioni lineari e matrici è importante osservare quanto segue:

Osservazione 1. L'applicazione identica che lascia invariato ogni vettore è una particolare applicazione lineare. Essa corrisponde alla matrice unità $\mathbf{1}$, perché $\mathbf{1}\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Osservazione 2. Se f e g sono applicazioni lineari corrispondenti, rispettivamente, alle matrici \mathbf{A} e \mathbf{B} , allora l'applicazione composta $g \circ f$ è ancora lineare (verificarlo) e corrisponde alla matrice prodotto \mathbf{BA} . Infatti se $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ e se $\mathbf{x}'' = \mathbf{B}\mathbf{x}'$, risulta $\mathbf{x}'' = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{BA})\mathbf{x}$. Essendo il prodotto delle matrici in generale non commutativo va tenuto conto dell'ordine con cui le due matrici operano.

Osservazione 3. Se un'applicazione lineare f , corrispondente ad \mathbf{A} , è invertibile, allora anche l'applicazione inversa, denotata con f^{-1} , è lineare e corrisponde alla matrice inversa \mathbf{A}^{-1} .

Osservazione 4. Con le matrici quadrate reali di ordine 3 si possono rappresentare **trasformazioni** dello spazio euclideo, quali rotazioni, simmetrie, omotetie ecc. Infatti, se riferiamo lo spazio ad un sistema di assi cartesiani di origine O , un vettore colonna \mathbf{x} si identifica sia con un vettore di componenti (x_1, x_2, x_3) sia con un punto P di coordinate (x_1, x_2, x_3) :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \iff \mathbf{x} = x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k} \iff P = (x_1, x_2, x_3).$$

Il punto P' rappresentato dal vettore $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ sarà l'immagine del punto P secondo trasformazione dello spazio dovuta all'operatore \mathbf{A} .

Esempio 1. Rotazioni dello spazio intorno ad un asse. Una rotazione del piano (x, y) intorno all'asse z , di angolo θ e in senso antiorario (quindi tale da "avvitare" nel verso dell'asse z) è rappresentata dalla matrice

$$\mathbf{R}_{(z, \theta)} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Per verificarlo basta sostituire al generico vettore \mathbf{x} successivamente i vettori della base coordinata $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Tenendo conto che

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

si trova

$$\begin{aligned} \mathbf{i}' &= \mathbf{R}_{(z,\theta)}\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}, \\ \mathbf{j}' &= \mathbf{R}_{(z,\theta)}\mathbf{j} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}, \\ \mathbf{k}' &= \mathbf{R}_{(z,\theta)}\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Le prime due uguaglianze mostrano che \mathbf{i} e \mathbf{j} restano sul loro piano e vengono ruotati di un angolo θ . L'ultima mostra che \mathbf{k} resta invariato. Si noti che $\det \mathbf{R}_{(z,\theta)} = 1$. La rotazione inversa di $\mathbf{R}_{(z,\theta)}$ è ovviamente una rotazione di angolo opposto $-\theta$. La sua matrice si ottiene quindi sostituendo $-\theta$ a θ , per cui:

$$\mathbf{R}_{(z,\theta)}^{-1} = \mathbf{R}_{(z,-\theta)} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Imponendo successivamente due rotazioni (sempre intorno all'asse z) di angolo α e di angolo β si ottiene ovviamente una rotazione di angolo $\alpha + \beta$, quindi

$$\mathbf{R}_{(z,\alpha)}\mathbf{R}_{(z,\beta)} = \mathbf{R}_{(z,\alpha+\beta)}, \quad (8)$$

ovvero, in termini di matrici,

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) & 0 \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8')$$

Se si esegue il prodotto delle due matrici a primo membro si trova

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta & 0 \\ \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dal confronto con la matrice a secondo membro si trovano (cioè si dimostrano) le formule del seno e del coseno di una somma di due angoli:

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \\ \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \end{cases}$$

Si osservi anche da questo calcolo che le due matrici $\mathbf{R}_{(z,\alpha)}$ e $\mathbf{R}_{(z,\beta)}$ commutano: $\mathbf{R}_{(z,\alpha)}\mathbf{R}_{(z,\beta)} = \mathbf{R}_{(z,\beta)}\mathbf{R}_{(z,\alpha)}$. Si tratta infatti di rotazioni intorno al medesimo asse. Due rotazioni intorno ad assi diversi non commutano.

Esempio 2. Simmetrie rispetto ad un piano coordinato. La simmetria rispetto al piano coordinato (x, y) cambia la coordinata z di un punto in $-z$, pertanto è una trasformazione lineare rappresentata dalla matrice

$$\boldsymbol{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Si noti che $\det \boldsymbol{\sigma}_z = -1$.

Osservazione 5. La proprietà di linearità (5) equivale alla proprietà che ogni retta dello spazio viene trasformata da \mathbf{A} in una retta (e un piano in un piano). Infatti, se consideriamo l'equazione vettoriale parametrica di una retta

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t \mathbf{v},$$

e applichiamo la trasformazione \mathbf{A} , per la linearità abbiamo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + t \mathbf{A}\mathbf{v},$$

e questa è ancora l'equazione vettoriale parametrica di una retta.

8 - Autovettori e autovalori

Data una matrice \mathbf{A} , ha importanza in varie applicazioni determinare quei vettori \mathbf{x} che vengono trasformati senza mutare direzione, cioè tali che

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}, \tag{1}$$

con λ opportuno fattore di proporzionalità. Un tale vettore viene detto **autovettore** della matrice \mathbf{A} ed il coefficiente di proporzionalità λ **autovalore**.

Osserviamo subito che: (i) il vettore nullo è sempre un autovettore, di qualunque matrice (siamo quindi interessati alla conoscenza di autovettori non nulli); (ii) se \mathbf{x} è un autovettore, ogni altro vettore $a\mathbf{x}$ ad esso proporzionale è ancora un autovettore.

L'equazione (1), detta **equazione degli autovettori**, si può porre nella forma

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) \mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{2}$$

In questa forma essa è equivalente (consideriamo per comodità il caso $n = 3$) al seguente sistema di equazioni lineari **omogenee** (cioè coi termini noti tutti uguali a zero):

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Se la matrice dei coefficienti

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1} = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} \quad (4)$$

avesse determinante non nullo, per il teorema di Cramer si avrebbe la sola soluzione nulla: $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$. Se vogliamo determinare degli autovettori non nulli dobbiamo quindi dare a λ dei valori tali da annullare il determinante di questa matrice:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) = 0. \quad (5)$$

In effetti questa condizione si traduce in un'equazione algebrica di grado n nell'incognita λ , detta **equazione caratteristica** o **secolare** della matrice. Nel caso $n = 3$ la (5) diventa

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (5')$$

e sviluppando il determinante si ottiene appunto un'equazione algebrica di terzo grado. Le n radici ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$) (esistenti per il teorema fondamentale dell'algebra) sono gli **autovalori** della matrice \mathbf{A} . Il loro insieme prende il nome di **spettro** della matrice.

Calcolati gli autovalori, se si assegnano successivamente a λ questi valori, per ognuno di essi si deve risolvere il sistema (3). Siccome il determinante della matrice dei coefficienti è nullo, una delle equazioni del sistema è sovrabbondante (perché una riga della matrice è senz'altro combinazione lineare delle altre) e si può eliminare. Si ottiene quindi un sistema omogeneo di $n - 1$ (nel nostro caso due) equazioni in n incognite, che ha infinite soluzioni, che differiscono per un fattore di proporzionalità, come osservato all'inizio. Se si assegna ad una di queste incognite un valore qualsiasi (non nullo), allora si ha il pareggiamento tra numero di equazioni e numero di incognite: $n - 1$. Il sistema così ottenuto non è più omogeneo e, se il suo determinante non è nullo, fornisce una sola soluzione.

Osservazione 1. Va tenuto presente che una matrice reale può avere autovalori complessi, i cui corrispondenti autovettori risultano complessi. I vettori complessi, analogamente ai numeri complessi, si rappresentano con scritture del tipo $\mathbf{a} + i\mathbf{b}$ con \mathbf{a} e \mathbf{b} vettori reali.

Osservazione 2. La somma degli elementi della diagonale principale di una matrice \mathbf{A} prende il nome di **traccia** della matrice: $\text{tr}\mathbf{A}$. Si può dimostrare che: (i) il prodotto degli autovalori è uguale al determinante della matrice; (ii) la somma degli autovalori è uguale alla traccia della matrice,

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det \mathbf{A}, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}\mathbf{A}. \quad (6)$$

Esempio 1. L'equazione caratteristica della matrice rotazione \mathbf{R}_θ intorno all'asse z è

$$\det \begin{bmatrix} \cos \theta - \lambda & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

cioè

$$(1 - \lambda)[(\cos \theta - \lambda)^2 + \sin^2 \theta] = 0.$$

Di qui si vede che uno degli autovalori è $\lambda_1 = 1$ e gli altri due sono le radici dell'equazione $\lambda^2 - 2\lambda \cos \theta + 1 = 0$:

$$\lambda_{2,3} = \cos \theta \pm i \sin \theta = e^{\pm i\theta}.$$

Si tratta quindi di autovalori complessi, a meno che non sia $\theta = 0$ o $\theta = \pi$. All'autovalore 1 corrisponde l'autovettore \mathbf{k} (che rappresenta l'asse della rotazione).

Esempio 2. Determiniamo gli autovalori e gli autovettori della matrice reale

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'equazione caratteristica

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) = \det \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1 - \lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

si riduce a (conviene viluppare il determinante rispetto alla prima riga)

$$(4 - \lambda)(1 - \lambda)^2 + 2(1 - \lambda) = 0.$$

A primo membro troviamo il fattore $1 - \lambda$; quindi $\lambda_1 = 1$ è un autovalore. I rimanenti sono le radici dell'equazione

$$(4 - \lambda)(1 - \lambda) + 2 = 0,$$

cioè: $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 3$. Lo spettro è quindi $(1, 2, 3)$. Calcoliamo ora gli autovettori. Con $\lambda = \lambda_1 = 1$ il sistema (3) diventa:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 0, \\ -2x_1 = 0, \\ -2x_1 = 0. \end{cases}$$

Come si vede, due delle equazioni addirittura coincidono. Le soluzioni sono date da $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ e x_2 qualsiasi (quest'incognita non è coinvolta dal sistema). Possiamo scegliere $x_2 = 1$. Un autovettore \mathbf{x}_1 corrispondente a $\lambda_1 = 1$ è quindi

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Con $\lambda = \lambda_2 = 2$ il sistema (3) diventa

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0, \\ -2x_1 - x_2 = 0, \\ -2x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$$

La prima e la terza equazione coincidono. Ponendo $x_1 = 1$ si trova $x_2 = -2$ e $x_3 = -2$. L'autovettore corrispondente è quindi

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Con calcolo analogo si vede infine che un autovettore corrispondente a $\lambda = \lambda_3 = 3$ è

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

La correttezza dei risultati può essere controllata verificando che

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_1 & (\lambda = 1), \\ \mathbf{A}\mathbf{x}_2 &= 2\mathbf{x}_2 & (\lambda = 2), \\ \mathbf{A}\mathbf{x}_3 &= 3\mathbf{x}_3 & (\lambda = 3). \end{aligned}$$

Un'ulteriore verifica si ha con le (6). Infatti il calcolo del determinante e della traccia mostra che $\det \mathbf{A} = 6$ e $\text{tr} \mathbf{A} = 6$. Ed è proprio $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 2 + 3 = 6$.

9 - Matrici speciali.

Come si è visto, data una matrice quadrata \mathbf{A} , ad essa si associano le matrici (ancora quadrate e dello stesso ordine):

\mathbf{A}^T	trasposta
\mathbf{A}^C	complementare
$\mathbf{A}^{-1} = (\det \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^{CT}$	inversa, se $\det \mathbf{A} \neq 0$
\mathbf{A}^*	coniugata complessa
$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{*T}$	aggiunta o coniugata hermitiana.

Nelle applicazioni del calcolo matriciale svolgono un ruolo importante alcuni tipi particolari di matrici quadrate, la cui definizione coinvolge queste operazioni.

1 **Matrici simmetriche.** Una matrice \mathbf{A} è detta **simmetrica** se coincide con la sua trasposta:

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}. \quad (1)$$

Gli elementi di una matrice simmetrica soddisfano pertanto alla condizione

$$a_{ij} = a_{ji}. \quad (2)$$

Ciò significa che gli elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale coincidono. Per le matrici simmetriche reale valgono le seguenti proprietà:

Teorema 1. (i) *Gli autovalori di una matrice simmetrica reale sono tutti reali.* (ii) *Due autovettori \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 di una matrice simmetrica reale, corrispondenti ad autovalori distinti $\lambda_1 \neq \lambda_2$, sono fra loro ortogonali: $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0$.*

2 **Matrici ortogonali.** Una matrice \mathbf{Q} è detta **ortogonale** se la sua trasposta coincide con la sua inversa

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1} \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{1}. \quad (3)$$

Sono di particolare interesse per le applicazioni le matrici ortogonali reali. Nel caso $n = 3$ esse rappresentano **rotazioni** dello spazio intorno ad un punto o anche **simmetrie** (vedi gli Esempi 1 e 2 di §7).

Teorema 2. (i) *Una matrice \mathbf{Q} è ortogonale se e solo i suoi vettori riga (o i vettori colonna) sono unitari e fra loro ortogonali secondo il prodotto scalare ordinario.* (ii) *Una matrice \mathbf{Q} è ortogonale se e solo se conserva il prodotto scalare fra vettori:*

$$(\mathbf{Q}\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{Q}\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \quad (4)$$

(iii) *Il determinante di una matrice ortogonale vale ± 1 .* (iv) *Gli autovalori di una matrice ortogonale reale sono unitari: $|\lambda| = 1$.*

Passando alle matrici complesse, è conveniente utilizzare la notazione di Dirac.

Osservazione 1. Notazioni di Dirac. Il simbolo $\langle \cdot | \cdot \rangle$ utilizzato per il prodotto hermitiano di due vettori prende il nome di **bracket**. Un vettore colonna \mathbf{v} viene anche denotato con $|\mathbf{v}\rangle$ e viene detto **ket**:

$$|\mathbf{v}\rangle = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Con il simbolo $\langle \mathbf{v} |$, detto **bra**, s'intende il vettore riga aggiunto del vettore colonna \mathbf{v} . Si pone cioè

$$\langle \mathbf{v} | = |\mathbf{v}\rangle^\dagger = [v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*].$$

Pertanto, le scritte

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^\dagger \mathbf{v}$$

sono equivalenti: a sinistra compare la notazione **bra-ket**, che mette insieme un "bra" e un "ket"; a destra un prodotto di due matrici: una matrice-vettore riga \mathbf{u}^\dagger per una matrice-vettore colonna \mathbf{v} . Quindi:

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = [u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n u_i^* v_i.$$

Di conseguenza si pone

$$\mathbf{A} | \mathbf{v} \rangle = \mathbf{A} \mathbf{v},$$

dove a destra abbiamo il prodotto di una matrice quadrata \mathbf{A} per un vettore colonna \mathbf{v} : il risultato è ancora un vettore colonna, quindi un "ket". Ponendo a sinistra un "bra" si vede che

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{A} | \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{v} = \sum_{i,j=1}^n u_i^* a_{ij} v_j.$$

3 **Matrici autoaggiunte.** Una matrice \mathbf{A} è detta **autoaggiunta** o **hermitiana** se coincide con la sua aggiunta:

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}. \quad (5)$$

Gli elementi di una matrice autoaggiunta soddisfano pertanto alla condizione

$$a_{ij}^* = a_{ji}. \quad (6)$$

Una matrice autoaggiunta reale è simmetrica. Si noti che gli elementi della diagonale principale di una matrice autoaggiunta sono reali. Nelle applicazioni alla fisica sono di particolare importanza le seguenti proprietà delle matrici autoaggiunte:

Teorema 3. (i) Una matrice \mathbf{A} è autoaggiunta se e solo se

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{A} | \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} | \mathbf{A} | \mathbf{u} \rangle = \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{u}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{v} = \mathbf{v}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{u}, \quad (7)$$

(ii) Una matrice \mathbf{A} è autoaggiunta se e solo se

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{A} | \mathbf{u} \rangle \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n. \quad (8)$$

(iii) Gli autovalori di una matrice autoaggiunta sono reali. (iv) Due autovettori \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 di una matrice autoaggiunta, corrispondenti ad autovalori distinti $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sono fra loro ortogonali secondo il prodotto hermitiano: $\langle \mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2 \rangle = 0$.

Esempio 1. Matrici di Pauli. Sono le matrici 2×2

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sono autoaggiunte (σ_1 e σ_3 sono reali e simmetriche). Il prodotto di due di queste matrici dà come risultato la rimanente, a meno del segno e del fattore i , secondo la legge (la somma degli indici $\alpha = 1, 2, 3$ deve intendersi "ciclica" o "modulo 3")

$$\sigma_\alpha \sigma_{\alpha+1} = i \sigma_{\alpha+2}$$

Esse anticommutano:

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta = -\sigma_\beta \sigma_\alpha \quad (\alpha \neq \beta)$$

ed i loro quadrati danno la matrice unità,

$$\sigma_\alpha^2 = \mathbf{1}.$$

4 **Matrici unitarie.** Una matrice \mathbf{U} è detta **unitaria** se la sua aggiunta coincide con la sua inversa

$$\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^{-1} \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U}^\dagger = \mathbf{1}. \quad (9)$$

Si osservi, a titolo di esempio, che le matrici di Pauli sono unitarie (perché sono autoaggiunte e a quadrato uguale all'unità).

Teorema 4. (i) Una matrice \mathbf{U} è unitaria se e solo se i suoi vettori riga (o i vettori colonna) sono unitari e fra loro ortognali secondo il prodotto hermitiano. (ii) Una matrice \mathbf{U} è unitaria se e solo se conserva il prodotto hermitiano fra vettori

$$\langle \mathbf{U}\mathbf{u} | \mathbf{U}\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle. \quad (10)$$

(iii) Il determinante di una matrice unitaria vale ± 1 . (iv) Gli autovalori di una matrice unitaria sono unitari: $|\lambda| = 1$.

5 **Matrici normali.** Una matrice \mathbf{N} è detta **normale** se commuta con la sua aggiunta

$$\mathbf{N}^\dagger \mathbf{N} = \mathbf{N} \mathbf{N}^\dagger. \quad (11)$$

Si osservi che una matrice autoaggiunta è normale.

6 **Matrici triangolari.** Una matrice \mathbf{R} è detta **triangolare superiore** se gli elementi al di sotto della diagonale principale sono tutti nulli (**triangolare inferiore** se sono nulli quelli sopra la diagonale). Le matrici triangolari trovano importanti applicazioni nella teoria dei sistemi di equazioni lineari e nel calcolo degli autovalori di una matrice. Esse infatti godono delle seguenti proprietà:

Teorema 5. (i) Il determinante di una matrice triangolare è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale. (ii) Gli autovalori di una matrice triangolare coincidono con gli elementi della sua diagonale principale.

7 **Matrici simili.** Due matrici \mathbf{A} e \mathbf{B} si dicono **simili** o **equivalenti** se esiste una matrice regolare \mathbf{Z} , detta **matrice di trasformazione**, tale che

$$\mathbf{B} = \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Z}. \quad (12)$$

Questa relazione di "similitudine" è usata nel calcolo degli autovalori di una matrice, in virtù del seguente notevole teorema:

Teorema 6. *Due matrici simili hanno gli stessi autovalori (quindi la stessa traccia e lo stesso determinante, per l'Oss.2 del §8).*

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{1}) &= \det(\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{AZ} - \lambda\mathbf{1}) = \det[\mathbf{Z}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1})\mathbf{Z}] \\ &= \det \mathbf{Z}^{-1} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}) \det \mathbf{Z} = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}),\end{aligned}$$

perché $\det \mathbf{Z}^{-1} \det \mathbf{Z} = 1$. ■

Si cerca quindi di trovare una matrice di trasformazione che renda \mathbf{B} o triangolare (e si sfrutta quindi il Teorema 5) o addirittura diagonale (nel qual caso gli autovalori coincidono proprio con gli elementi della diagonale). Si può dimostrare che

Teorema 7. *Ogni matrice normale (quindi in particolare ogni matrice autoaggiunta) si può diagonalizzare con una matrice di trasformazione unitaria.*

10 - Gruppi.

Un'operazione binaria interna ad un insieme G è una legge che a due elementi di G associa ancora un elemento di G . Denotiamo una generica operazione di questo tipo con il simbolo \circ . Supponiamo cioè che a due elementi $a, b \in G$ si possa far corrispondere con una regola ben definita un terzo elemento di G che denotiamo con $a \circ b$.

Conosciamo alcuni esempi di operazioni binarie interne:

- (a) La somma di due numeri, per la quale si usa il simbolo $+$: $a \circ b = a + b$. L'insieme G può essere uno qualunque degli insiemi numerici fondamentali ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$).
- (b) Il prodotto di due numeri, per il quale si usa il simbolo $a \circ b = a \cdot b$ o semplicemente ab .
- (c) Il prodotto vettoriale di due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} , per il quale si usa il simbolo \times : $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
- (d) Il prodotto di due matrici quadrate dello stesso ordine \mathbf{A} e \mathbf{B} , per cui si scrive semplicemente $\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \mathbf{AB}$.

Si noti che, per esempio, il prodotto scalare di due vettori euclidei non è un'operazione binaria interna: il risultato non è più un vettore, bensì un numero.

Ha particolare importanza in matematica, e nelle sue applicazioni, considerare insiemi dotati di un'operazione binaria interna soddisfacente a particolari condizioni, in accordo con la seguente generale definizione:

Definizione 1. Un insieme G è detto **gruppo** se è dotato di un'operazione binaria interna \circ per la quale valgono le seguenti proprietà:

(i) esiste un **elemento neutro** e tale che

$$a \circ e = a,$$

(ii) per ogni $a \in G$ esiste un **elemento reciproco o inverso**, che denotiamo con a^{-1} , tale che

$$a \circ a^{-1} = e;$$

(iii) vale la **proprietà associativa**:

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c.$$

Osservazione 1. Si noti bene che nella definizione di gruppo non è richiesta la proprietà commutativa dell'operazione binaria interna. Se questa vale, cioè se si ha sempre

$$a \circ b = b \circ a,$$

allora si dice che il gruppo è **commutativo o abeliano** (dal matematico norvegese N. H. Abel, 1802-1829).

Esempio 1. Gruppi numerici additivi. Gli insiemi numerici \mathbb{Z} (numeri interi relativi), \mathbb{Q} (razionali), \mathbb{R} (reali), \mathbb{C} (complessi) sono gruppi commutativi rispetto all'ordinaria operazione di somma $+$. L'elemento neutro è lo zero, il reciproco di un numero a è il suo opposto $-a$.

Esempio 2. Gruppi numerici moltiplicativi. Escludendo lo zero, gli insiemi numerici $\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} - \{0\}$, $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C} - \{0\}$ sono gruppi commutativi rispetto all'ordinaria operazione di moltiplicazione. L'elemento neutro è il numero 1, il reciproco di un numero a è la frazione $\frac{1}{a}$.

Osservazione 2. Si noti che \mathbb{N} non è un gruppo rispetto alla somma e alla moltiplicazione perché, pur avendo l'elemento neutro per entrambe le operazioni (0 e 1), nessun numero naturale ha il reciproco rispetto a queste.

Osservazione 3. L'insieme dei vettori euclidei è un gruppo abeliano rispetto alla somma (regola del parallelogramma): l'elemento neutro è il vettore nullo $\mathbf{0}$ e ogni vettore \mathbf{v} ammette come reciproco il vettore opposto $-\mathbf{v}$. Tuttavia, non è un gruppo rispetto al prodotto vettoriale: non esiste l'elemento neutro, né l'inverso, né l'operazione è associativa.

Esempio 3. Gruppi di matrici. Considerato l'insieme di matrici quadrate di un medesimo ordine n (reali o complesse) osserviamo che l'ordinario prodotto è una legge di composizione binaria interna, associativa ma non commutativa, rispetto alla quale la matrice identità $\mathbf{1}$ si comporta da elemento neutro. L'elemento reciproco di una matrice è la matrice inversa. Tuttavia, l'insieme di tutte le matrici quadrate di ordine n non è un gruppo, perché non tutte le matrici hanno inversa: solo quelle regolari (cioè a determinante non nullo), le quali formano effettivamente un gruppo. Tra queste vi sono

però vari particolari sottoinsiemi che formano a loro volta dei gruppi. Ne consideriamo alcuni esempi:

$$\begin{cases} GL(n, \mathbb{C}) & \text{matrici complesse regolari,} \\ GL(n, \mathbb{R}) & \text{matrici reali regolari,} \\ U(n) & \text{matrici (complesse) unitarie,} \\ O(n) & \text{matrici (reali) ortogonali.} \end{cases}$$

Essi prendono rispettivamente il nome di: **gruppo generale lineare complesso** (di ordine n), **gruppo generale lineare reale**, **gruppo unitario**, **gruppo ortogonale**.

Per dimostrare che tutti questi insiemi sono gruppi ci si basa innanzitutto sulla proprietà che il determinante di un prodotto è il prodotto determinanti:

$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}. \quad (1)$$

Di qui segue subito che se due matrici sono regolari, anche la matrice prodotto è regolare; ciò significa che il prodotto è un'operazione "interna" all'insieme. Dunque $GL(n, \mathbb{C})$ e $GL(n, \mathbb{R})$ sono gruppi. Per quel che riguarda le matrici ortogonali, va ricordato che esse sono caratterizzate dall'uguaglianza

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{1} \quad \iff \quad \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}, \quad (2)$$

quindi, se \mathbf{Q}_1 e \mathbf{Q}_2 sono ortogonali, per il loro prodotto risulta:

$$(\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2)(\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2)^T = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_2^T\mathbf{Q}_1^T = \mathbf{Q}_1\mathbf{1}\mathbf{Q}_1^T = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_1^T = \mathbf{1}.$$

Dunque anche $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$ soddisfa alla stessa proprietà. Il prodotto è quindi "interno" all'insieme $O(n)$. Quest'insieme contiene la matrice identità $\mathbf{1}$, che è ovviamente una matrice ortogonale. La matrice inversa \mathbf{Q}^{-1} di una matrice ortogonale è anch'essa ortogonale; infatti

$$\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{Q}^{-1})^T = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}^{TT} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q} = \mathbf{1}.$$

È così dimostrato che $O(n)$ è un gruppo. La dimostrazione che $U(n)$ è un gruppo è del tutto analoga: basta sostituire T con \dagger .

Osserviamo che per la (1) dalla (2) segue, tenuto conto che $\det \mathbf{Q}^T = \det \mathbf{Q}$,

$$(\det \mathbf{Q})^2 = 1, \quad \text{ovvero} \quad \det \mathbf{Q} = \pm 1.$$

Dunque: le matrici ortogonali hanno determinante uguale a $+1$ o -1 . Alla stessa conclusione si giunge, con lo stesso metodo, per le matrici unitarie. D'altra parte, si osserva che per le matrici a determinante -1 il prodotto non è interno: il prodotto di due matrici di questo tipo ha infatti determinante $+1$ (si veda la (1)). Lo è invece per quelle a determinante $+1$. Infine, la matrice $\mathbf{1}$ ha determinante 1 e l'inversa di una matrice a determinante 1 ha ancora determinante 1 (segue ancora dalla (1), ponendo $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$). Abbiamo così individuato altri quattro gruppi notevoli:

$$\begin{cases} SL(n, \mathbb{C}) & \text{matrici complesse a determinante } +1, \\ SL(n, \mathbb{R}) & \text{matrici reali a determinante } +1, \\ SU(n) & \text{matrici unitarie a determinante } +1, \\ SO(n) & \text{matrici ortogonali (reali) a determinante } +1. \end{cases}$$

Questi ultimi due sono detti, rispettivamente, **gruppo unitario speciale** e **gruppo ortogonale speciale** (di ordine n).

Osservazione 4. Questi esempi mostrano chiaramente che un gruppo G può ammettere un sottoinsieme H che è esso stesso un gruppo, cioè tale che (i) la composizione di due elementi di H è ancora un elemento di H (l'operazione binaria è ancora interna ad H), (ii) l'elemento neutro appartiene ad H , (iii) il reciproco di un elemento di H è ancora un elemento di H . Si può dimostrare che affinché un sottoinsieme $H \subset G$ sia un sottogruppo è necessario e sufficiente che valga l'implicazione

$$a, b \in H \implies a \circ b^{-1} \in H.$$

Per esempio, i gruppi di matrici sopra considerati formano una catena di sottogruppi di $GL(n, \mathbb{C})$ secondo lo schema seguente:

$$\begin{array}{ccccccc} GL(n, \mathbb{C}) & \supset & SL(n, \mathbb{C}) & \supset & U(n) & \supset & SU(n) \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ GL(n, \mathbb{R}) & \supset & SL(n, \mathbb{R}) & \supset & O(n) & \supset & SO(n) \end{array}$$

Osservazione 5. L'importanza del concetto di gruppo risiede nel fatto che a partire dalle sole proprietà "formali" elencate nella Definizione 1, è possibile stabilire tutto un complesso di teoremi, a prescindere dalla natura degli oggetti che formano il gruppo (numeri, matrici o altro). Questa è la **teoria dei gruppi**. Per esempio, i primi teoremi affermano che:

- (I) Un gruppo possiede un solo elemento neutro e cioè tale che $a \circ e = a$. Si ha anche $e \circ a = a$.
- (II) In un gruppo l'inverso a^{-1} di un elemento a è unico e si ha anche $a^{-1} \circ a = e$.
- (III) In un gruppo valgono le leggi di semplificazione destra e sinistra, vale a dire

$$\begin{array}{lcl} a \circ c = b \circ c & \implies & a = b, \\ c \circ a = c \circ b & \implies & a = b. \end{array}$$

- (IV) In un gruppo vale la seguente regola di inversione di un prodotto:

$$(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}.$$

Pertanto, per esempio nell'ambito della teoria delle matrici, trovata la matrice \mathbf{A}^{-1} tale che $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1}$, non è necessario dimostrare che è anche $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$, perché questa è una proprietà di ogni gruppo. Non è neanche necessario dimostrare che vale l'uguaglianza $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$, perché anche questa fa parte della teoria dei gruppi.

Prof. S. Benenti

INTEGRALI MULTIPLI

1 - Integrali doppi

Sia $f(x, y)$ una funzione a due variabili e sia D un dominio del piano (x, y) (che supponiamo limitato, cioè rinchiudibile, per esempio, in un cerchio di raggio opportuno) tutto contenuto nel dominio di definizione di f . Supponiamo che anche la funzione sia limitata in D (cioè che l'insieme dei suoi valori in D sia un insieme numerico limitato). Si può definire il concetto di **integrale doppio** di f su D , denotato con

$$\iint_D f(x, y) dx dy,$$

attribuendogli il significato di volume del solido costituito dai segmenti di retta paralleli all'asse z aventi un estremo su D e l'altro sulla superficie di equazione $z = f(x, y)$ (cioè sul grafico della funzione). Si tratta di un volume con segno, positivo nelle parti in cui f è positiva. Come vedremo più avanti, detto segno dipende però anche dall'ordine con cui si considerano le coordinate (x, y) . Se in particolare $f \equiv 1$, l'integrale doppio su D fornisce l'area di D :

$$A(D) = \iint_D dx dy.$$

Il procedimento di definizione dell'integrale doppio è analogo a quello utilizzato per la definizione di integrale semplice. Si immagina di ricoprire D con una "pavimentazione" \mathcal{P} di rettangoli D_i , senza sovrapposizioni. Si prende l'estremo inferiore m_i e l'estremo superiore M_i dei valori assunti da f su D_i (supponiamo la funzione f limitata, quindi questi estremi esistono; se la f è continua questi coincidono col minimo e col massimo; poniamo eventualmente la funzione uguale a zero nei punti al di fuori di D). Ogni piastrella ha un'area ben definita A_i (trattandosi di un rettangolo). Consideriamo allora le somme (estese a tutti gli indici i)

$$s_{\mathcal{P}} = \sum_i m_i A_i, \quad S_{\mathcal{P}} = \sum_i M_i A_i.$$

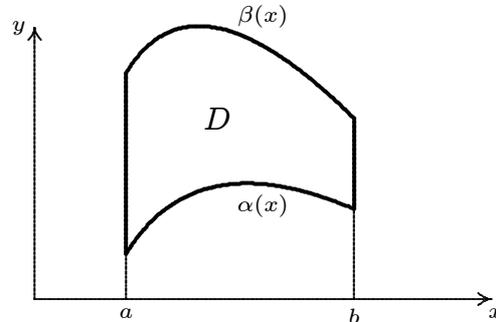
Si ha ovviamente

$$s_{\mathcal{P}} \leq S_{\mathcal{P}}.$$

Queste somme, al variare della pavimentazione \mathcal{P} (si pensi a tutte le pavimentazioni possibili), definiscono due insiemi numerici $\{s_{\mathcal{P}}\}$ e $\{S_{\mathcal{P}}\}$. Se l'estremo superiore del

primo insieme coincide con l'estremo inferiore del secondo, diciamo che questo numero è l'integrale della funzione f su D .

Consideriamo il caso semplice ma fondamentale in cui il dominio d'integrazione D è delimitato dai grafici di due funzioni $y = \alpha(x)$ e $y = \beta(x)$,



con x variabile in un intervallo chiuso $[a, b]$ e tale che $\alpha(x) \leq \beta(x)$. Si dimostra che se le funzioni $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ sono continue e se anche $f(x, y)$ è continua su D , allora esiste l'integrale doppio ed è calcolabile con la seguente **formula di riduzione**:

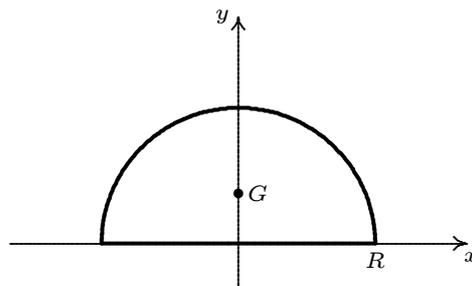
$$\boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx} \quad (1)$$

Il suo significato è il seguente: supposto fissato x , si integra dapprima la funzione $f(x, y)$ come funzione della sola y tra i limiti d'integrazione $\alpha(x)$ e $\beta(x)$; l'integrale così ottenuto è una funzione della x , che va integrata tra gli estremi a e b . Come si vede, l'integrale doppio \iint_D è ricondotto a due integrali semplici successivi. Nella pratica la formula di riduzione si scrive anche

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy.$$

Lo stesso procedimento si applica per domini delimitati da curve di equazione $x = \alpha(y)$ e $x = \beta(y)$, cioè con il ruolo di x e y scambiato, e a domini che sono l'unione domini di questo tipo. In questo secondo caso va infatti osservato che vale la proprietà additiva degli integrali doppi su domini digiunti o che si toccano lungo curve.

Esempio 1. Calcolo del baricentro di un semidisco materiale omogeneo. Se si centra il semidisco, di raggio R , nell'origine degli assi col diametro sull'asse x il baricentro G si trova sull'asse y (per ragioni di simmetria)



e la sua ordinata y_G è data dall'integrale

$$y_G = \frac{1}{m} \iint_D y \, dx \, dy$$

dove il dominio d'integrazione D è il semidisco ed m è la sua massa (la densità di massa del disco è supposta uguale a 1, per cui la massa è uguale all'area). In questo caso $\alpha(x) = 0$ e $\beta(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$. Per la formula di riduzione abbiamo successivamente:

$$\begin{aligned} m y_G &= \int_{-R}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y \, dy = \int_{-R}^R \frac{1}{2} [y^2]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \frac{1}{2} R^2 [x]_{-R}^R - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-R}^R = \frac{2}{3} R^3. \end{aligned}$$

Siccome $m = \frac{1}{2} \pi R^2$, segue che $y_G = \frac{4}{3\pi} R \simeq 0,42 R$. La formula di riduzione si può applicare in questo caso anche scambiando il ruolo di x e y . Si ha allora anche

$$\begin{aligned} m y_G &= \int_0^R dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} y \, dx = \int_0^R y \, dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} dx \\ &= 2 \int_0^R \sqrt{R^2 - y^2} y \, dy = -\frac{2}{3} \left(R^2 - y^2 \right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^R = \frac{2}{3} R^3. \end{aligned}$$

2 - Cambiamenti di coordinate

Certi domini d'integrazione sono più facilmente descrivibili usando coordinate polari (ρ, θ) (o altre coordinate) anziché coordinate cartesiane (x, y) . La regola di integrazione per **cambiamento di variabili**, o per **sostituzione**, nel caso di due variabili si rende automatica se al posto del simbolo $dx \, dy$ che compare sotto il segno d'integrazione doppia si usa invece il simbolo

$$dx \wedge dy$$

dove il simbolo \wedge è detto **prodotto esterno**. Questo prodotto è per definizione **anti-commutativo**, cioè tale che

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx.$$

Di qui segue che

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0.$$

Per esso si assume inoltre valida la proprietà distributiva rispetto alla somma (nel senso che ora vedremo). Se allora si considerano le equazioni che definiscono le coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases}$$

si ha successivamente, utilizzando le proprietà formali del differenziale d e del prodotto esterno:

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= d(\rho \cos \theta) \wedge d(\rho \sin \theta) = (d\rho \cos \theta + \rho d \cos \theta) \wedge (d\rho \sin \theta + \rho d \sin \theta) \\ &= (\cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta) \wedge (\sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta) \\ &= \rho \cos^2 \theta d\rho \wedge d\theta - \rho \sin^2 \theta d\theta \wedge d\rho \\ &= \rho (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\rho \wedge d\theta = \rho d\rho \wedge d\theta. \end{aligned}$$

Con queste premesse, si dimostra che vale la formula

$$\iint_D f(x, y) dx \wedge dy = \iint_{D'} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \wedge d\theta, \quad (2)$$

dove il nuovo dominio d'integrazione D' è relativo alle coordinate polari, non più a quelle cartesiane. Si noti bene che, sebbene sia scorretto, nella pratica il simbolo \wedge viene omissso.

Esempio 2. Ricalcoliamo l'integrale dell'Esempio 1 per questa via. In coordinate polari il dominio di integrazione è

$$D' = \{0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Si ha allora semplicemente:

$$\begin{aligned} m y_G &= \iint_D y dx dy = \iint_{D'} \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta \\ &= \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{1}{3} R^3 [-\cos \theta]_0^\pi = \frac{2}{3} R^3. \end{aligned}$$

Più in generale possiamo considerare una trasformazione di coordinate del tipo

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases} \quad (3)$$

dove (u, v) sono le nuove coordinate. In questo caso si pone (si ricordi la formula della derivazione totale)

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv, \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du \wedge dv \\ &= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} du \wedge dv = J(u, v) du \wedge dv. \end{aligned}$$

La matrice che qui compare prende il nome di **matrice jacobiana** della trasformazione di coordinate ed il suo determinante, denotato di solito con J , prende il nome di **jacobiano** della trasformazione. Si tratta di una funzione di (u, v) . La formula di integrazione per sostituzione diventa allora

$$\boxed{\iint_D f(x, y) dx \wedge dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) J(u, v) du \wedge dv} \quad (4)$$

dove il dominio di integrazione D' è relativo alle nuove coordinate. Nel caso di coordinate polari si è visto che $J = \rho$ e si ritrova la (2).

Questa formula è di immediata applicazione: nell'integrale di partenza basta sostituire alla x e alla y , sia nella funzione f sia nei simboli dei differenziali, le loro espressioni nelle nuove coordinate, cioè le funzioni (3), ed eseguire i calcoli. Per questo è essenziale usare il simbolo $dx \wedge dy$ (e non semplicemente $dx dy$, perché si avrebbe un risultato diverso). Questo simbolo prende il nome di **elemento d'area** del piano in coordinate cartesiane. L'elemento d'area in coordinate polari è $\rho d\rho \wedge d\theta$, in coordinate generiche è appunto $J du \wedge dv$. L'uso dell'elemento d'area si accompagna di solito con l'uso di un solo simbolo di integrale (anziché un doppio simbolo \iint); si può cioè scrivere

$$\int_D f(x, y) dx \wedge dy.$$

Si osservi che l'aver considerato $dx \wedge dy$ come elemento d'area presuppone la scelta di un **orientamento** del piano, che si manifesta nel senso di rotazione che ci fa passare dall'asse x all'asse y (quindi in senso antiorario). L'elemento d'area $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$ corrisponde all'orientamento opposto. La sua scelta produce un cambiamento di segno negli integrali. La stessa cosa accade del resto negli integrali di una funzione ad una variabile. L'integrale di $f(x)$ su di un intervallo $[a, b]$ è definito pensando di percorrere la retta reale (asse x) in un certo senso: da a a b , con $a < b$, e si scrive appunto

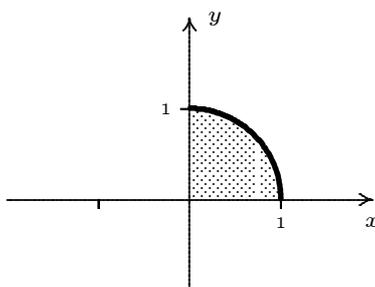
$$\int_a^b f(x) dx.$$

Se lo si percorre in senso inverso si scrive invece

$$\int_b^a f(x) dx,$$

e, come si è detto, questo integrale ha segno opposto

Esempio 3. Calcolare l'integrale doppio $\int_D (x^2 + y^2)^k dx dy$ nel dominio D dato dalla parte appartenente al primo quadrante del disco centrato nell'origine di raggio unitario.



Visto il dominio d'integrazione conviene usare coordinate polari (ρ, θ) . Essendo $x^2 + y^2 = \rho^2$ e posto che lo Jacobiano è ρ , l'integrale assume la forma

$$I = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \rho^{2k} \rho \, d\rho \, d\theta = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \rho^{2k+1} \, d\rho \, d\theta.$$

Esso si separa nel prodotto dei due integrali, rispetto a ρ e θ , rispettivamente

$$I = \int_0^1 \rho^{2k+1} \, d\rho \cdot \int_0^{\pi/2} d\theta = \left[\frac{\rho^{2k+2}}{2k+2} \right]_0^1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4(k+1)}.$$

Questo risultato è valido per $k \neq -1$. Per $k = -1$ abbiamo

$$I = \int_0^1 \rho^{-1} \, d\rho \cdot \int_0^{\pi/2} d\theta.$$

Ma l'integrale rispetto a ρ è improprio e risulta divergente.

Esempio 4. Calcolare l'integrale doppio $\int_D y e^x \, dx \, dy$ nel dominio D limitato delimitato dalla parabola $x = y^2$ e dalle rette $x = 1$.

3 - Integrali di volume

.....

4 - Integrali di superficie

Una superficie Σ dello spazio euclideo tridimensionale può essere rappresentata in due modi: (1) come luogo geometrico, quindi con un'equazione coinvolgente le tre coordinate cartesiane

$$F(x, y, z) = 0,$$

oppure con equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (0)$$

dove (u, v) sono due parametri variabili in un opportuno dominio D di un "piano" riferito ad assi coordinati (u, v) . Nel primo caso appartengono alla superficie Σ quei punti le cui coordinate soddisfano all'equazione, nel secondo caso facendo variare i parametri in tutto il loro dominio D il punto di coordinate $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ descrive la superficie.

Esempio 1 (il piano). Se si considera un punto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dello spazio ed un vettore $\mathbf{u} = (a, b, c)$, il piano passante per \mathbf{x}_0 e perpendicolare a \mathbf{u} è costituito da quei punti \mathbf{x} per cui $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u} = 0$, quindi dai punti soddisfacenti l'equazione

$$(x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c = 0.$$

Posto $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, quest'equazione assume la forma

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Questa è l'equazione generale di un piano nello spazio. Se si considera un punto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dello spazio e due vettori non paralleli $\mathbf{e} = (p, q, r)$ e $\mathbf{e}' = (p', q', r')$ in esso applicati, questi individuano un piano: appartengono a questo piano tutti quei punti \mathbf{x} tali che

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = u\mathbf{e} + v\mathbf{e}'.$$

Quest'equazione vettoriale, che può anche scriversi $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + u\mathbf{e} + v\mathbf{e}'$ si traduce nelle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + pu + p'v, \\ y = y_0 + qu + q'v, \\ z = z_0 + ru + r'v. \end{cases}$$

Queste sono le equazioni parametriche di un piano nello spazio.

Esempio 2 (la sfera). Se si considera un punto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dello spazio la sfera di raggio r centrata in questo punto è costituita da quei punti \mathbf{x} per cui $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = r$. Elevando al quadrato ambo i membri di quest'equazione si trova che l'equazione della sfera è

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Sviluppando i quadrati questa assume la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

posto

$$a = -2x_0, \quad b = -2y_0, \quad c = -2z_0, \quad d = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2.$$

Questa è l'equazione di una sfera. Possiamo descrivere una sfera di raggio r centrata nell'origine (pensiamo alla superficie terrestre) prendendo come parametri (u, v) i due angoli chiamati rispettivamente **longitudine** e **latitudine**. Il punto generico \mathbf{x} della sfera si proietta su di un punto \mathbf{x}' del piano equatoriale (x, y) di coordinate

$$x = r' \cos u, \quad y = r' \sin u,$$

dove u è la sua longitudine ed r' la sua distanza dall'asse polare z . Questa distanza è pari a $r' = r \cos v$, dove v è la latitudine. La distanza dal piano equatoriale del punto della sfera, cioè la sua coordinata z è data da $z = r \sin v$. Combinando questi dati si trovano le equazioni parametriche della sfera:

$$\begin{cases} x = r \cos v \cos u, \\ y = r \cos v \sin u, \\ z = r \sin v. \end{cases} \quad (1)$$

Si noti che i parametri variano nel dominio D definito da

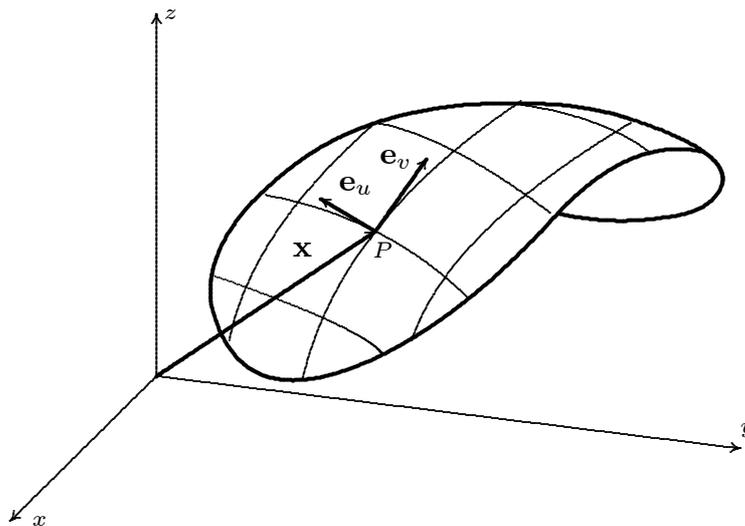
$$0 < u < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}.$$

Sono esclusi da questa rappresentazione i poli e il meridiano di Greenwich ($u = 0$).

Rappresentata una superficie con equazioni parametriche, si dimostra che i vettori

$$\begin{cases} \mathbf{e}_u = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \\ \mathbf{e}_v = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right), \end{cases} \quad (2)$$

sono tangenti alla superficie e quindi ne individuano in ogni punto il piano tangente.



Questi vettori individuano anche un parallelogramma la cui area è $A = |\mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_v|$. Detto θ l'angolo compreso fra i due vettori e ricordando la definizione di prodotto vettoriale e di prodotto scalare, per il quadrato di quest'area si trova:

$$\begin{aligned} A^2 &= |\mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_v|^2 = \mathbf{e}_u^2 \mathbf{e}_v^2 \sin^2 \theta = \mathbf{e}_u^2 \mathbf{e}_v^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \mathbf{e}_u^2 \mathbf{e}_v^2 \left(1 - \frac{(\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_v)^2}{\mathbf{e}_u^2 \mathbf{e}_v^2} \right) \\ &= \mathbf{e}_u^2 \mathbf{e}_v^2 - (\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_v)^2. \end{aligned}$$

Si usa porre

$$\begin{cases} E = \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2, \\ F = \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_v = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \\ G = \mathbf{e}_v \cdot \mathbf{e}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2. \end{cases} \quad (3)$$

Per cui si ha

$$A = \sqrt{EG - F^2}. \quad (4)$$

Si noti che questa è una funzione dei due parametri (u, v) . Su questa base, con un procedimento simile a quello della definizione degli integrali doppi, si dimostra che se $f(u, v)$ è una funzione sulla superficie, quindi una funzione dei due parametri (u, v) , ha senso definire il suo **integrale superficiale**

$$\boxed{\int_{\Sigma} f d\sigma = \int_D f(u, v) A(u, v) du \wedge dv} \quad (5)$$

dove

$$d\sigma = A du \wedge dv = \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv \quad (6)$$

è l'**elemento d'area** della superficie e D è il dominio di variabilità dei parametri (u, v) . Nella pratica, anche se non è corretto, il simbolo $du \wedge dv$ è sostituito da $du dv$ (e si usa il simbolo di integrale doppio \iint). La scelta di questo elemento d'area corrisponde alla scelta di un orientamento della superficie, come si è detto per il piano euclideo. Nel caso $f = 1$ l'integrale superficiale fornisce l'area della superficie Σ :

$$A(\Sigma) = \int_{\Sigma} d\sigma = \int_D \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv. \quad (7)$$

Esempio 3 (superficie della sfera). Dalle equazioni parametriche della sfera (1) si trae

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = -r \cos v \sin u, & \frac{\partial x}{\partial v} = -r \sin v \cos u, \\ \frac{\partial y}{\partial u} = r \cos v \cos u, & \frac{\partial y}{\partial v} = -r \sin v \sin u, \\ \frac{\partial z}{\partial u} = 0, & \frac{\partial z}{\partial v} = r \cos v, \end{cases}$$

per cui

$$E = r^2 \cos^2 v, \quad F = 0, \quad G = r^2.$$

Quindi l'elemento d'area della sfera è

$$d\sigma = r^2 \cos v \, du \wedge dv.$$

Segue che l'area della sfera è data dall'integrale

$$A(\Sigma) = \iint_D r^2 \cos v \, du \, dv = r^2 \int_0^{2\pi} du \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos v \, dv = 2\pi r^2 [\sin v]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi r^2.$$

Prof. S. Benenti

CAMPI SCALARI E VETTORIALI

1 - Campi scalari e vettoriali.

Particolarmente importanti per la fisica sono in concetti di campo scalare e campo vettoriale. Un **campo scalare** nello spazio euclideo (o nel piano euclideo) è una legge che associa ad ogni punto di un certo dominio dello spazio (o del piano) un numero reale. Un campo scalare si rappresenta quindi con una funzione $f(x, y, z)$ delle tre coordinate cartesiane nello spazio (o una funzione $f(x, y)$ delle due coordinate cartesiane del piano). Esempi fisici: la pressione atmosferica, la temperatura di un ambiente, il potenziale di una forza.

Un **campo vettoriale** nello spazio (o nel piano) è una legge che assegna in ogni punto (di un certo dominio) un vettore. Due esempi fisici fondamentali sono: (1) un **campo di forza** (campo gravitazionale, campo elettrico, campo magnetico, ecc.), (2) un **campo di velocità**, cioè la distribuzione delle velocità delle particelle di un fluido ad un certo istante (se questa distribuzione è indipendente dal tempo il moto del fluido si dice **stazionario**).

Un campo vettoriale \mathbf{F} nello spazio è rappresentato da una scrittura del tipo

$$\mathbf{F} = A(x, y, z) \mathbf{i} + B(x, y, z) \mathbf{j} + C(x, y, z) \mathbf{k},$$

dove (A, B, C) sono funzioni delle coordinate cartesiane, dette **componenti cartesiane** del campo. Si usa anche la scrittura abbreviata di vettore riga

$$\mathbf{F} = [A(x, y, z), B(x, y, z), C(x, y, z)],$$

o l'analoga di vettore colonna. Nel piano si ha invece una rappresentazione del tipo

$$\mathbf{F} = A(x, y) \mathbf{i} + B(x, y) \mathbf{j} = [A(x, y), B(x, y)].$$

2 - Operatori differenziali e teoremi associati.

Sui campi scalari e vettoriali si definiscono tre **operatori differenziali** fondamentali: il gradiente (di un campo scalare), la divergenza (di un campo vettoriale), il rotore (di un campo vettoriale).

Il **gradiente** di un campo scalare f (già visto) è un campo vettoriale denotato con ∇f o con $\text{grad}(f)$. Ha come componenti cartesiane le derivate parziali di f rispetto alle coordinate cartesiane ortonormali:

$$\nabla f = \text{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

La **divergenza** di un campo vettoriale \mathbf{F} è un campo scalare denotato con $\nabla \cdot \mathbf{F}$ (*nabla scalare* \mathbf{F}) o anche con $\text{div}(\mathbf{F})$. In coordinate cartesiane è definito da

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \text{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}$$

Si noti che formalmente è il prodotto scalare dell'operatore

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

con il campo vettoriale \mathbf{F} .

Il **rotore** di un campo vettoriale \mathbf{F} è un campo vettoriale denotato con $\nabla \times \mathbf{F}$ (*nabla vettore* \mathbf{F}) o anche con $\text{rot}(\mathbf{F})$. È definito quindi formalmente dal prodotto vettoriale dell'operatore ∇ per il campo \mathbf{F} :

$$\nabla \times \mathbf{F} = \text{rot}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A & B & C \end{vmatrix}$$

Sviluppando il determinante si trova che

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Mentre le definizioni di gradiente di un campo scalare e di divergenza di un campo vettoriale si particolarizzano immediatamente al caso del piano, quella di rotore ha senso solo per lo spazio (dove è definito il prodotto vettoriale). Tuttavia questa nozione si riduce al caso del piano ponendo semplicemente $C = 0$, col che risulta essere un campo vettoriale ortogonale a questo, oppure considerando la sua unica componente

$$\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}$$

come campo scalare sul piano.

A questi tre operatori corrispondono tre teoremi fondamentali, di frequente uso in Fisica:

- * il teorema del gradiente,
- * il teorema della divergenza (o teorema del flusso)
- * il teorema del rotore (o teorema della circuitazione o teorema di Stokes).

Il **teorema del gradiente**, già visto, afferma che *il gradiente di un campo scalare f è in ogni punto ortogonale alle superfici "di livello" o "equipotenziali" di equazione $f(x, y, z) = \text{costante}$ ed è orientato nel verso di f crescente.*

Per enunciare gli altri due teoremi occorre introdurre due fondamentali **operatori integrali** sui campi vettoriali: il **flusso** e la **circuitazione**.

Il **flusso** di un campo vettoriale \mathbf{F} attraverso una curva piana γ è l'integrale curvilineo

$$\Phi = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds,$$

dove \mathbf{n} è il vettore unitario perpendicolare (o "normale") alla curva γ . Dunque è l'integrale lungo γ della componente del campo perpendicolare alla curva. Analogamente, il **flusso** di un campo vettoriale \mathbf{F} attraverso una superficie Σ è l'integrale superficiale.

$$\Phi = \int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

dove \mathbf{n} è il vettore normale a Σ e $d\sigma$ è l'elemento d'area. Il flusso dipende per il segno dalla scelta della normale \mathbf{n} .

Se il campo vettoriale rappresenta il campo di velocità di un fluido per la sua densità di massa, $\mathbf{F} = \mu \mathbf{v}$, allora il flusso Φ calcolato su di una superficie rappresenta la quantità di materia che attraversa la superficie nell'unità di tempo e nella direzione della normale \mathbf{n} .

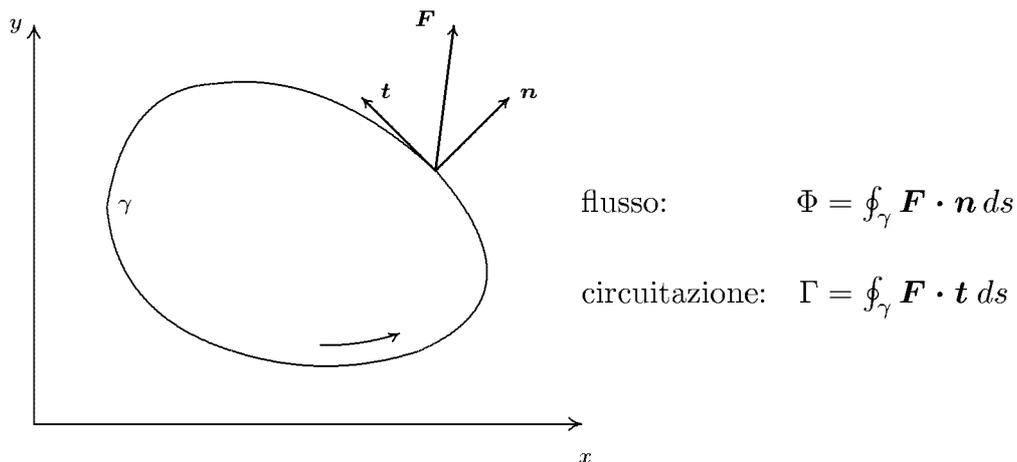
La **circuitazione** di un campo vettoriale \mathbf{F} lungo una curva γ (nel piano o nello spazio) è l'integrale curvilineo

$$\Gamma = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} ds,$$

dove \mathbf{t} è il vettore unitario tangente alla curva γ . Dunque è l'integrale lungo γ della componente del campo tangente alla curva. Di solito si calcola la circuitazione (e il flusso) su di una curva chiusa; in questo caso si usa il simbolo di **integrale ciclico** \oint :

$$\Gamma = \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} ds.$$

La circuitazione dipende (per il segno) dall'orientamento della curva, cioè dalla scelta di \mathbf{t} .



Il **teorema della divergenza**, detto anche **teorema del flusso**, riguarda curve chiuse del piano o superfici chiuse dello spazio. Esso afferma che: *il flusso di un campo vettoriale attraverso una curva piana chiusa γ (o una superficie chiusa Σ) è uguale all'integrale della sua divergenza sul dominio D da essa delimitato.*

Questo teorema si esprime nel piano con la formula

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dx \wedge dy$$

dove D è il dominio racchiuso da γ , e nello spazio con l'uguaglianza analoga

$$\iiint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dx \wedge dy \wedge dz$$

dove D è il dominio racchiuso da Σ . Questa seconda formula è anche chiamata **formula di Ostrogradski**.

Queste uguaglianze sono subordinate ad una opportuna scelta degli **orientamenti** delle curve e delle superfici coinvolte. Nel caso di una curva piana γ chiusa, questa va supposta senza "autointersezioni" (la si pensi come ottenuta dalla deformazione continua di un cerchio). Va percorsa in senso *antiorario* e il vettore tangente \mathbf{t} va orientato secondo il verso di percorrenza. Il vettore normale \mathbf{n} va orientato verso l'*esterno* della curva (percorrendo la curva nel senso detto questo si trova alla destra di \mathbf{t}). Nel caso di una superficie Σ chiusa, questa va supposta ottenibile per deformazione da una sfera, senza autointersezioni. Il vettore normale \mathbf{n} va supposto orientato verso l'*esterno*. La superficie Σ va intesa *orientata* scegliendo l'ordine dei parametri (u, v) , e quindi il prodotto esterno $du \wedge dv$, in modo tale che la terna ordinata di vettori $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{n})$ è orientata come quella dei versori $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ (cioè come pollice, indice e medio della mano destra). A questo proposito va ricordato che i vettori \mathbf{e}_u e \mathbf{e}_v sono tangenti alla superficie Σ e quindi, per la definizione di prodotto vettoriale, tale condizione è soddisfatta ponendo

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_v}{|\mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_v|}.$$

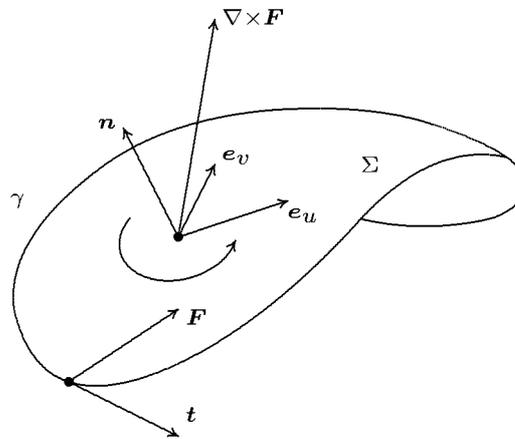
Siccome $\sqrt{EG - F^2} = |\mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_v|$ e $d\sigma = \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv$, risulta

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_v du \wedge dv$$

Se gli orientamenti non concordano con quelli adottati, le formule precedenti continuano a valere, ma con un segno $-$.

Un campo vettoriale si dice **solenoidale** se la sua divergenza è identicamente nulla: $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. In tal caso il suo flusso attraverso una qualunque superficie chiusa è sempre nullo.

Il **teorema della rotore**, detto anche **teorema della circuitazione** o **teorema di Stokes**, riguarda curve chiuse nello spazio. Esso afferma che: *la circuitazione di un campo vettoriale lungo una curva chiusa γ è uguale al flusso del suo rotore attraverso una qualunque superficie Σ avente γ come bordo.*



Questo teorema si esprime con la cosiddetta **formula di Stokes**:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} ds = \iint_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

dove Σ è una qualunque superficie avente γ come bordo. Anche qui occorre precisare gli orientamenti della curva γ e della superficie Σ . Scelto un verso di percorrenza di γ quindi del suo versore tangente, il versore \mathbf{n} ortogonale alla superficie Σ va scelto in maniera tale che, percorrendo un piccolo ciclo su questa tangente a γ in verso concorde a γ si produca un avvitemento nel verso di \mathbf{n} . Il prodotto esterno $du \wedge dv$ nell'elemento di superficie $d\sigma$ va inoltre scelto in modo che il prodotto vettoriale $\mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_v$ sia concorde con \mathbf{n} .

S'intende che tutte le uguaglianze scritte sono valide per curve e superfici sufficientemente "regolari" da permettere l'esistenza degli elementi che intervengono (i vettori \mathbf{t} e \mathbf{n}) e degli integrali.

Questi teoremi si dimostrano partendo da una proprietà importante, detta **lemma di Gauss** (o anche **lemma di Green**), che lega integrali estesi ad un dominio piano a

integrali estesi alla corrispondente frontiera e che si esprime nelle uguaglianze:

$$\begin{cases} \oint_{\gamma} f(x, y) dx = - \iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dx \wedge dy, \\ \oint_{\gamma} f(x, y) dy = \iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dy, \end{cases}$$

dove $f(x, y)$ è una funzione di classe C^1 e la curva γ è percorsa in senso antiorario. Gli integrali ciclici a primo membro s'intendono calcolati sostituendo alla x e y le equazioni parametriche di γ , scelte in modo tale che col crescere del parametro la curva venga appunto percorsa in senso antiorario.

Oltre agli operatori differenziali gradiente, divergenza e rotore, che sono del primo ordine perché coinvolgono solo derivate parziali prime, viene anche utilizzato in Fisica un operatore del secondo ordine sui campi scalari: il **laplaciano** (o **operatore di Laplace**). Esso è denotato con Δ ed è definito da

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \operatorname{div} \operatorname{grad}(f)$$

In coordinate cartesiane risulta

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

È sovente necessario considerare l'integrale di volume di Δf su di un dominio chiuso D . Dal teorema della divergenza segue che questo è uguale al flusso del gradiente attraverso il bordo Σ di D :

$$\iiint_D \Delta f dx \wedge dy \wedge dz = \iint_{\Sigma} \nabla f \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

S. Benenti

LE SERIE DI FOURIER

1 - Serie di Fourier di una funzione.

Consideriamo una funzione $f(x)$ in un intervallo (simmetrico, di raggio L) $[-L, L]$. Supponiamo che in questo intervallo essa soddisfi alle **condizioni di Dirichlet**: si può dividere l'intervallo in un numero finito di sottointervalli dove f è continua ed i limiti di $f(x)$ per x che tende agli estremi di tali intervalli sono finiti. Risultano allora definite le successioni numeriche

$$\begin{cases} a_0 \doteq \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \\ a_n \doteq \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, & n = 1, 2, \dots, \\ b_n \doteq \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, & n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (1)$$

(si noti che $b_0 = 0$ e che a_0 è il valor medio della funzione) con le quali si costruisce la serie di funzioni circolari

$$SF(f(x)) \doteq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (2)$$

detta **serie di Fourier** della funzione data $f(x)$. In numeri a_n e b_n prendono il nome di **coefficienti di Fourier** della funzione.

È piuttosto sorprendente, e anche di straordinaria importanza, il fatto che, valendo le condizioni di Dirichlet, *la serie di Fourier converge a $f(x)$ se x è un punto di continuità*: vale cioè l'uguaglianza

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (3)$$

Se invece x è un punto di discontinuità, allora la serie di Fourier ha per somma la media aritmetica dei due limiti, destro e sinistro, di $f(x)$. Esprimiamo questo risultato con l'equazione

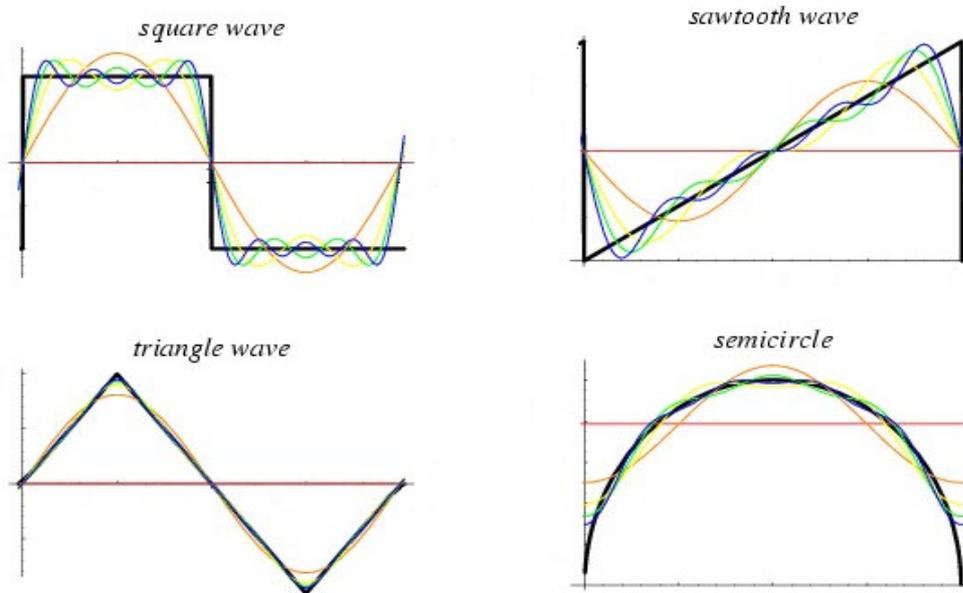
$$SF(f(x)) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, \quad x \text{ punto di discontinuità di } f. \quad (4)$$

Osservazione 1. Quanto ora visto si riconduce al caso di un generico intervallo $[a, b]$: basta eseguire il cambiamento lineare di variabile

$$x' = \frac{(2x - b - a)L}{b - a}. \quad (5)$$

Infatti, nella nuova x' l'intervallo di lavoro diventa $[-L, L]$ (prova: per $x = a$ si ha $x' = -L$, per $x = b$ si ha $x' = L$).

Osservazione 2. Si può dimostrare che, se la funzione $f(x)$ è continua, la serie di Fourier troncata ad un n sufficientemente grande rappresenta abbastanza fedelmente $f(x)$. Naturalmente questa affermazione generica può essere resa rigorosa con teoremi opportuni. Se la funzione non è continua si presenta il **fenomeno di Gibbs**, che consiste nella permanenza di "piccole oscillazioni", più accentuate nell'intorno delle discontinuità, per quanto grande sia n (caso dell'onda quadra e dell'onda a dente di sega, vedi figura).



Osservazione 3. La serie di Fourier ammette una **rappresentazione complessa** molto più sintetica della (2):

$$SF_f(x) \doteq \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\pi x/L}, \quad (6)$$

dove

$$c_n \doteq \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx. \quad (7)$$

Infatti le (6) e (7) si ottengono dalle (1) e (2) grazie alla formula di Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

dalla quale si ricava

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}). \quad (8)$$

Si noti che nella serie (6) l'indice n varia da $-\infty$ a $+\infty$, mentre nelle (1) e (2) varia da 0 a $+\infty$. I coefficienti c_n sono in generale complessi (ma la serie (6) fornisce comunque un numero reale, se convergente). Essi sono determinati dai coefficienti di Fourier (reali) con le formule:

$$c_0 = a_0, \quad c_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + ib_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

Ritornando al campo reale, un'altra rappresentazione della serie di Fourier è la seguente:

$$SF_f(x) \doteq \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L} + \varphi_n\right). \quad (10)$$

dove $A_0 = a_0$ e

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \tan \varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}. \quad (11)$$

I termini della serie (10) prendono il nome di **armoniche**: A_n e φ_n sono rispettivamente detti **ampiezza** e **fase** dell'armonica n -esima.

Osservazione 4. Le considerazioni precedenti si applicano ad ogni **funzione periodica** di **periodo** T : $f(x+T) = f(x)$ (nota T è il minimo numero positivo per cui vale quest'uguaglianza). Si può infatti restringere l'analisi della funzione ad un qualunque intervallo di **ampiezza** T (purché siano soddisfatte le condizioni di Dirichlet). Si ottengono le formule precedenti prendendo

$$L = \frac{1}{2} T.$$

Allora i singoli termini della serie di Fourier prendono il nome di **armoniche** (questo giustifica il termine introdotto sopra). Per $n = 1$ si ha l'**armonica fondamentale** di pulsazione $\omega = \pi/L = 2\pi/T$. Le pulsazioni delle armoniche successive sono multiple di questa: $\omega_n = n\omega$.

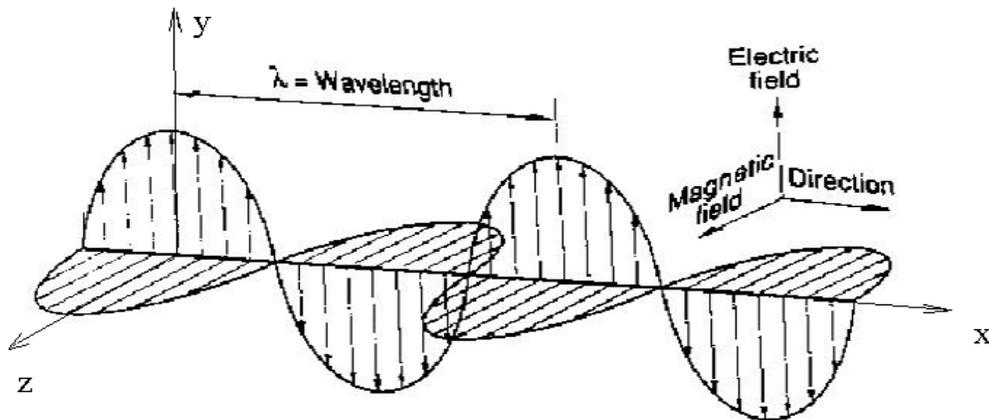
Ne consegue che ogni segnale periodico (p.es. una nota emessa e sostenuta da un qualunque strumento; in questo caso $x = t$, tempo) può essere considerato come la somma di infinite armoniche, a partire da quella fondamentale; in pratica come somma di un numero sufficientemente piccolo di armoniche. Una nota è quindi sufficientemente caratterizzata dai primi coefficienti di Fourier. Questi formano uno **spettro**. Un la di violino o di pianoforte si distinguono per il diverso spettro, anche se con la stessa frequenza fondamentale (440 Hz). Quest'osservazione sta alla base dell'**analisi armonica**, teoria dalla quale si deducono notevoli applicazioni tecnologiche.

S. Benenti

LA MATEMATICA DELLA SPETTROSCOPIA INFRAROSSA

1 - Interferogramma monocromatico.

Onda elettromagnetica nel vuoto piana monocromatica polarizzata. Campo elettrico E, campo magnetico H.



Consideriamo un'onda elettromagnetica monocromatica piana polarizzata, di asse l'asse x . Quest'onda è rappresentata dalle equazioni

$$\begin{cases} E_y = A \cos \omega \left(\frac{x}{c} - t \right), & E_z = E_x = 0, \\ H_z = A \cos \omega \left(\frac{x}{c} - t \right), & H_x = H_y = 0. \end{cases} \quad (1)$$

I campi elettrico e magnetico in un dato istante t , nei vari punti dell'asse x (o di qualunque retta ad esso parallela), hanno l'andamento riportato in figura: le due *cosinoidi* si spostano, in istanti successivi, solidalmente nel verso dell'asse x con la velocità della luce c . I moduli dei due vettori sono in ogni istante ed in ogni punto uguali. La costante positiva A è l'**ampiezza** dei due campi. La costante positiva ω che compare in queste formule è detta, non da tutti, **pulsazione**. Ad essa si associano le

seguenti grandezze: la **frequenza** ν , numero di cicli al secondo: $\omega = 2\pi\nu$, $\nu = \omega/2\pi$; la **lunghezza d'onda** (*wavelength*) λ , distanza tra picchi adiacenti: $\lambda = c/\nu$; il **numero d'onda** (*wavenumber*): $\bar{\nu} = 1/\lambda = \nu/c$; **periodo** $T = 1/\nu$, per cui $T = c\lambda$. Possiamo allora riscrivere la prima delle (1) nella forma

$$E_y = A \cos(\omega t - 2\pi\bar{\nu}x), \quad E_z = E_x = 0. \quad (2)$$

La **densità di energia** del campo elettromagnetico è misurata dalla quantità

$$\mathcal{E}(x, t, \omega) \doteq \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) = \frac{1}{8\pi}(E_y^2 + H_z^2) = \frac{1}{4\pi}A^2 \cos^2(\omega t - 2\pi\bar{\nu}x). \quad (2')$$

L'**intensità** del campo (misurabile da un detector) è data dal suo valor medio in un periodo,

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E}(t) dt = \frac{A^2}{4\pi T} \int_0^T \cos^2(\omega t - 2\pi\bar{\nu}x) dt.$$

Tenuto conto che

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos^2(\omega t + k) dt &= \frac{1}{\omega} \int_k^{2\pi+k} \cos^2(\omega t + k) d(\omega t + k) \\ &= \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} \cos^2 u du = \frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2}, \end{aligned} \quad (3)$$

si trova

$$\mathfrak{S} = \frac{A^2}{8\pi}. \quad (3')$$

Quindi l'intensità del campo non dipende dalla frequenza.

Consideriamo una seconda onda dello stesso tipo (con la stessa ω , cioè dello stesso colore, e con la stessa ampiezza) ma relativa ad un diverso valore della x , diciamo $x_1 = x + h$, con h positivo o negativo. Per il campo elettrico abbiamo (per il campo magnetico si ha una formula analoga):

$$E_{1y} = A \cos(\omega t - 2\pi\bar{\nu}x_1), \quad E_{1x} = E_{1z} = 0.$$

Sovrapponendo i due campi abbiamo come campo elettrico risultante

$$E_{Ry} = A [\cos(\omega t - 2\pi\bar{\nu}x_1) + \cos(\omega t - 2\pi\bar{\nu}x)] = A [\cos(\alpha - \beta) + \cos \alpha],$$

posto

$$\alpha = \omega t - 2\pi\bar{\nu}x, \quad \beta = 2\pi\bar{\nu}h.$$

Applicando la formula di prostaferesi

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

si trova l'uguaglianza

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos \alpha = 2 \cos \frac{\beta}{2} \cos(\alpha - \frac{\beta}{2}),$$

per cui E_{Ry} è del tipo

$$\boxed{E_{Ry} = 2A \cos(\pi \bar{\nu} h) \cos(\omega t + k)} \quad (\dagger)$$

posto $k = \pi \bar{\nu}(h - 2x)$ (come si vedrà, il valore di k è irrilevante per i nostri scopi).

Vista la (2'), la densità d'energia di quest'onda è

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\pi} A^2 \cos^2(\pi \bar{\nu} h) \cos^2(\omega t + k)$$

Vista allora la formula (3), segue che l'intensità di quest'onda composta è

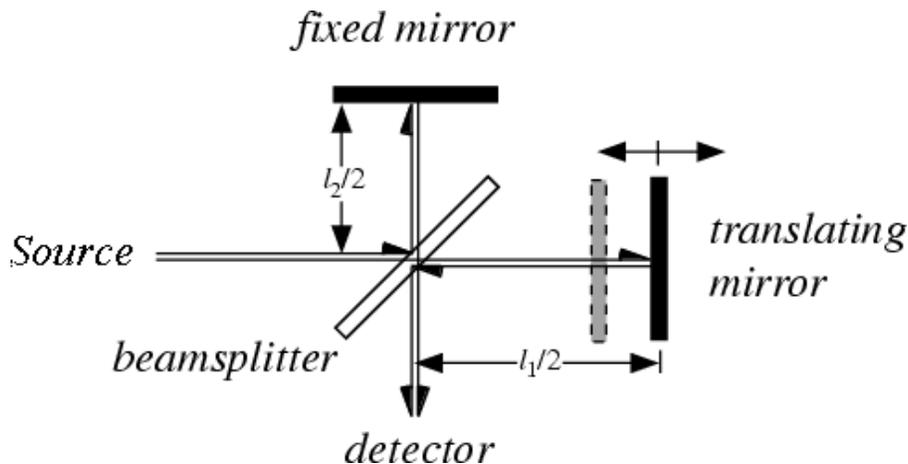
$$\mathfrak{S}(h) = \frac{A^2}{2\pi} \cos^2(\pi \bar{\nu} h) = \frac{A^2}{4\pi} [1 + \cos(2\pi \bar{\nu} h)] = I [1 + \cos(2\pi \bar{\nu} h)], \quad I = \frac{A^2}{4\pi}. \quad (4)$$

Come ora vedremo, conviene interpretare l'ampiezza A , quindi I , come funzione di $\bar{\nu}$ (cioè del *colore*). Scriveremo quindi:

$$\boxed{\mathfrak{S}(h) = I(\bar{\nu}) [1 + \cos(2\pi \bar{\nu} h)]} \quad (5)$$

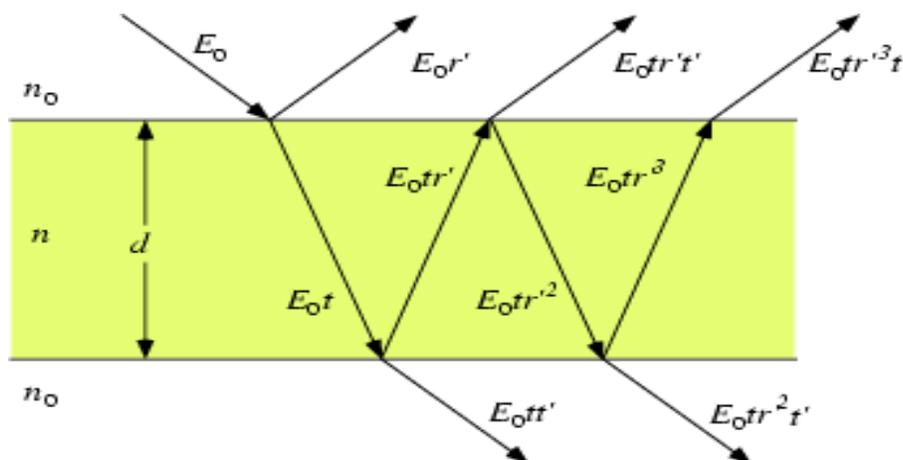
Chiamiamo **interferogramma monocromatico** la funzione $\mathfrak{S}(h)$ dell'incremento (o **scan**) $h = x_1 - x$.

La sovrapposizione di due onde fin qui descritta si realizza con l'interferometro di Michelson, il cui schema è riportato in figura:



Un raggio proveniente dalla sorgente viene diviso dal **beamsplitter** in due raggi: il primo viene inviato ad uno specchio mobile, riflesso da questo e successivamente ancora dallo splitter e inviato al detector. Esso percorre una distanza $s + l_1 + d$, dove s è la distanza tra la sorgente e lo splitter e d è la distanza tra lo splitter e il detector. Il

secondo raggio viene invece riflesso dallo splitter verso uno specchio fisso, da questo riflesso e, attraverso lo splitter, inviato al detector: esso percorre quindi la distanza $s + l_2 + d$. La differenza dei due percorsi è quindi lo *scan* $h = l_1 - l_2$. La figura seguente mostra l'azione di un beamsplitter:



Quest'azione richiede uno studio particolare che qui omettiamo. Dal detector viene misurata (utilizzando l'effetto fotoelettrico) l'intensità $\mathfrak{S}(h)$. L'interferogramma $\mathfrak{S}(h)$ si ottiene facendo variare lo *scan* h in un intervallo simmetrico $[-a, a]$. Questo viene realizzato con un moto (rettilineo) uniforme dello specchio mobile.

2 - Interferogramma policromatico.

Nel caso di un'onda elettromagnetica policromatica, dobbiamo considerare l'**interferogramma policromatico**

$$\mathfrak{S}(h) = \int_0^{+\infty} I(\bar{\nu}) [1 + \cos(2\pi\bar{\nu}h)] d\bar{\nu}. \quad (6)$$

In realtà questo integrale va considerato sull'intervallo $[\bar{\nu}_m, \bar{\nu}_M]$, essendo $\bar{\nu}_m$ e $\bar{\nu}_M$ il minimo ed il massimo valore del numero d'onda della luce policromatica emessa dalla sorgente,

$$\mathfrak{S}(h) = \int_{\bar{\nu}_m}^{\bar{\nu}_M} I(\bar{\nu}) [1 + \cos(2\pi\bar{\nu}h)] d\bar{\nu}. \quad (6')$$

Convien tuttavia, per il momento, considerare l'integrale improprio (6).

Osservazione 1. Per $h = 0$ si trova

$$\mathfrak{S}(0) = 2 \int_0^{+\infty} I(\bar{\nu}) d\bar{\nu}. \quad (7)$$

Quindi la (6') si può riscrivere

$$\mathfrak{S}(h) = \frac{1}{2} \mathfrak{S}(0) + \int_0^{+\infty} I(\bar{\nu}) \cos(2\pi\bar{\nu}h) d\bar{\nu} \quad (8)$$

Osservazione 2. Per $h = 0$, cioè per $x_1 = x$, le due onde coincidono e danno quindi un'onda di ampiezza $2A$. Dunque nella (3') l'ampiezza A va rimpiazzata con $2A$. Segue che

$$\mathfrak{S}(0) = \frac{A^2}{2\pi}.$$

Osservazione 3. La funzione $\mathfrak{S}(h)$ è pari (simmetrica rispetto ad $h = 0$). Per $h \rightarrow +\infty$, il contributo dell'integrale (8) tende a zero (le onde interferiscono tra loro in modo da annullarsi reciprocamente). Possiamo quindi scrivere

$$\mathfrak{S}(+\infty) \doteq \lim_{h \rightarrow +\infty} \mathfrak{S}(h) = \frac{1}{2} \mathfrak{S}(0).$$

Questa formula fornisce un importante **test di taratura** dell'interferometro.

3 - Dall'interferogramma allo spettro.

Acquisito (e memorizzato nel computer) l'interferogramma $\mathfrak{S}(h)$, occorre determinare la funzione $I(\bar{\nu})$, detta **spettro**, risolvendo l'*equazione integrale* (8) rispetto all'incognita $I(\bar{\nu})$. Si può dimostrare che quest'equazione si risolve esplicitamente con la formula

$$I(\bar{\nu}) = \int_0^{+\infty} [\mathfrak{S}(h) - \frac{1}{2} \mathfrak{S}(0)] \cos(2\pi\bar{\nu}h) dh. \quad (9)$$

Ricordiamo inoltre che, a meno del fattore 4π , $I(\bar{\nu})$ è il quadrato dell'ampiezza della componente monocromatica di numero d'onda $\bar{\nu}$:

$$I(\bar{\nu}) = \frac{1}{4\pi} A^2(\bar{\nu}).$$

Facciamo a questo proposito due osservazioni fondamentali.

Osservazione 1. L'utilizzo della formula (9) comporta un *errore di fase* dovuto alla "fisica" dell'interferometro. Ce lo mostra la matematica: se poniamo $f(h) \doteq \mathfrak{S}(h) - \frac{1}{2} \mathfrak{S}(0)$, allora la (8) diventa

$$f(h) = \int_0^{+\infty} I(\bar{\nu}) \cos(2\pi\bar{\nu}h) d\bar{\nu}.$$

Quest'integrale è simmetrico intorno a $h = 0$, dato che il coseno è una funzione pari. Una perdita di simmetria può essere data da un *fattore di fase addizionale* φ dovuto all'azione dello splitter e degli specchi, per cui la formula precedente va in realtà sostituita da

$$f(h) = \int_0^{+\infty} I(\bar{\nu}) \cos(2\pi\bar{\nu}h - \varphi) d\bar{\nu}. \quad (10)$$

Perché dobbiamo tener conto di un tale elemento di disturbo φ ? In ottica geometrica la luce è rappresentata da **raggi** (rette o semirette, o segmenti di retta); in elettromagnetismo da un'onda, magari da un'onda piana (vedi l'inizio). Dopo una riflessione (per

mezzo di uno specchio) o dopo una rifrazione, che cosa può cambiare? Come raggio sappiamo tutto sulle leggi di riflessione e rifrazione. Come onda, la frequenza resta la stessa, la direzione dell'onda piana segue le leggi di cui sopra. Cosa resta da valutare? Un possibile (e reale) addendo agli argomenti di seno e coseno: un fattore addizionale di fase, appunto.

Come vedremo nel prossimo paragrafo, è un fatto veramente sorprendente (e fortunato!) che il "disturbo" dato dall'incognita φ (in generale funzione di $\bar{\nu}$) può essere eliminato mediante la *trasformata di Fourier* della funzione $f(h)$.

Osservazione 2. Lo strumento deve in realtà memorizzare due tipi di interferogrammi e trasformarli in due spettri. Il primo, chiamiamolo $\mathfrak{S}_0(h)$, viene ottenuto senza la presenza di un campione e genera uno **spettro di fondo** (o **background**) $I_0(\bar{\nu})$ che tiene conto delle varie componenti monocromatiche della luce emessa dalla sorgente e degli (incogniti) assorbimenti di energia dovuti all'ambiente in cui si propaga l'onda elettromagnetica (composizione dell'aria, materiali usati per il beamsplitter, specchi, etc.). Il secondo, $\mathfrak{S}_s(h)$, viene ottenuto interponendo il campione da esaminare tra l'interferometro ed il detector. Il corrispondente spettro $I_s(\bar{\nu})$, consente, tenuto conto di $I_0(\bar{\nu})$, di determinarne le componenti molecolari.

4 - La trasformata di Fourier.

Data una funzione $f(x)$ (reale e a variabile reale) soddisfacente ad opportune condizioni, per ogni valore del parametro reale u risulta determinato l'integrale improprio

$$\widehat{f}(u) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{2\pi i u x} dx. \quad (1)$$

La funzione $\widehat{f}(u)$ della variabile u così definita prende il nome di **trasformata** (di Fourier) **della funzione** $f(x)$. Si dimostra che, nota $\widehat{f}(u)$, si può ricostruire la funzione originaria con l'**antitrasformata** fornita da un analogo integrale:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(u) e^{-2\pi i u x} du. \quad (2)$$

Osservazione 1. La trasformata (1) può dare luogo a **funzioni generalizzate**, dette anche **distribuzioni**. Senza per ora entrare nel merito di questo importante concetto, consideriamo un esempio fondamentale di funzione generalizzata: la **delta di Dirac** $\delta(x - x_0)$. Essa può essere definita dall'uguaglianza

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0), \quad (3)$$

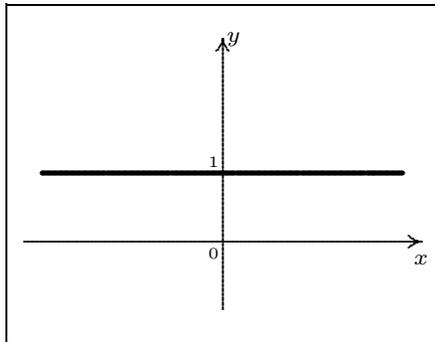
per ogni funzione $f(x)$ soddisfacente a opportune condizioni. Si può inoltre dimostrare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i (u - u_0)x} dx = \delta(u - u_0). \quad (4)$$

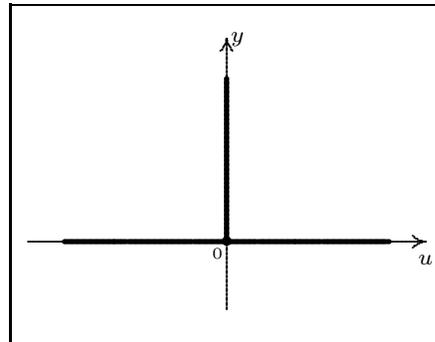
Posto in particolare $u_0 = 0$, si ricava

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x} dx = \delta(u). \quad (4')$$

Il primo membro è nient'altro che la trasformata di Fourier della funzione costante $f(x) = 1$, il secondo è la delta di Dirac nell'origine:

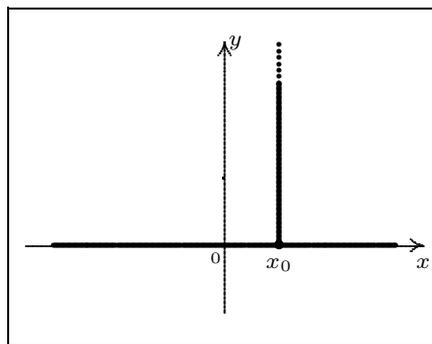


La funzione $f(x) = 1$



La sua trasformata $\hat{f}(u) = \delta(u)$

In attesa di una definizione precisa della delta di Dirac, per la quale si richiede la definizione di distribuzione, la possiamo interpretare come una "funzione" il cui grafico è una semiretta parallela all'asse y e estremo un punto x_0 dell'asse x ,



La delta di Dirac $\delta(x - x_0)$

la cui area però va intesa uguale a 1 (?).

Osservazione 2. La trasformata di Fourier $\hat{f}(u)$ di $f(x)$ è in generale una funzione a valori complessi. Infatti la (1) è equivalente a

$$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(2\pi u x) dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(2\pi u x) dx, \quad (5)$$

mentre l'antitrasformata (2) diventa

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u) \cos(2\pi u x) du - i \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u) \sin(2\pi u x) du. \quad (6)$$

A sua volta la (5) può assumere la forma

$$\widehat{f}(u) = Cf(u) + iSf(u) \quad (7)$$

ponendo

$$Cf(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(2\pi ux) dx, \quad Sf(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(2\pi ux) dx. \quad (8)$$

Queste due ultime operazioni sulla funzione $f(x)$ sono dette rispettivamente **trasformata coseno** e **trasformata seno**.

Ritorniamo ora all'interferogramma policromatico. Ricordata l'ultima equazione del paragrafo precedente, poniamo nelle formula precedenti

$$\begin{aligned} f(x) &\doteq \Im(x) - \frac{1}{2} \Im(0) = \int_0^{\bar{\nu}_M} I(\bar{\nu}) \cos(2\pi\bar{\nu}x - \varphi) d\bar{\nu} \\ &= \int_0^{\bar{\nu}_M} I(\bar{\nu}) \cos \varphi \cos(2\pi\bar{\nu}x) d\bar{\nu} + \int_0^{\bar{\nu}_M} I(\bar{\nu}) \sin \varphi \sin(2\pi\bar{\nu}x) d\bar{\nu}. \end{aligned} \quad (9)$$

Applichiamo a questa funzione la trasformata coseno:

$$\begin{aligned} Cf(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(2\pi ux) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\bar{\nu}_M} I(\bar{\nu}) \cos \varphi \cos(2\pi\bar{\nu}x) \cos(2\pi ux) d\bar{\nu} dx \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\bar{\nu}_M} I(\bar{\nu}) \sin \varphi \sin(2\pi\bar{\nu}x) \cos(2\pi ux) d\bar{\nu} dx. \end{aligned}$$

Siccome l'incognita fase φ non dipende da x (cioè dall'incremento h), possiamo scrivere

$$\begin{aligned} Cf(u) &= \int_0^{\bar{\nu}_M} I(\bar{\nu}) \cos \varphi \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi\bar{\nu}x) \cos(2\pi ux) dx \right] d\bar{\nu} \\ &\quad + \int_0^{\bar{\nu}_M} I(\bar{\nu}) \sin \varphi \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi\bar{\nu}x) \cos(2\pi ux) dx \right] d\bar{\nu}. \end{aligned}$$

Osserviamo che l'ultimo integrale improprio è nullo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi\bar{\nu}x) \cos(2\pi ux) dx = 0,$$

perché il seno e il coseno sono rispettivamente funzioni dispari e pari, per cui il prodotto risultante è una funzione dispari. Resta quindi

$$Cf(u) = \int_0^{\bar{\nu}_M} I(\bar{\nu}) \cos \varphi \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi\bar{\nu}x) \cos(2\pi ux) dx \right] d\bar{\nu}.$$

Tuttavia,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi\bar{\nu}x) \cos(2\pi ux) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{2\pi i(\bar{\nu}+u)x} + e^{2\pi i(\bar{\nu}-u)x}] dx,$$

e per la formula (4) quest'ultimo integrale diventa $= \frac{1}{2} [\delta(\bar{\nu} + u) + \delta(\bar{\nu} - u)]$. Dunque:

$$Cf(u) = \frac{1}{2} \int_0^{\bar{\nu}_M} I(\bar{\nu}) \cos \varphi [\delta(\bar{\nu} + u) + \delta(\bar{\nu} - u)] d\bar{\nu}.$$

Riscriviamo questa formula

$$Cf(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} I(\bar{\nu}) \cos \varphi [\delta(\bar{\nu} + u) + \delta(\bar{\nu} - u)] d\bar{\nu},$$

tenuto conto che fuori dall'intervallo $[0, \nu_M]$ l'interferogramma $I(\bar{\nu})$ si annulla. Allora, per la definizione (3) della delta di Dirac, *pur essendo φ una funzione di $\bar{\nu}$* , non la si deve integrare, e risulta semplicemente,

$$Cf(x) = \frac{1}{2} \cos \varphi I(x).$$

In maniera analoga si dimostra che

$$Sf(x) = \frac{1}{2} \sin \varphi I(x).$$

Di qui segue la formula risolutiva

$$\boxed{I(x) = 2 \sqrt{(Cf(x))^2 + (Sf(x))^2} = 2 |\hat{f}(x)|} \quad (10)$$

che, posto $x = \bar{\nu}$, fornisce lo spettro conoscendo la trasformata di Fourier di $f(x)$, cioè dell'interferogramma $\mathfrak{S}(x)$, essendo per definizione (vedi la (9)) $f(x) = \mathfrak{S}(x) - \frac{1}{2} \mathfrak{S}(0)$, con $x = h$. Il disturbo φ è completamente annullato.

Eliminare l'errore di fase purtroppo non basta: sono ancora presenti altri errori, non trascurabili, dovuti al fatto che gli integrali rispetto allo scan h da $-\infty$ a $+\infty$ sono in realtà presi tra limiti finiti $-h_M$ e $h_M > 0$ (l'interferometro è ovviamente uno strumento con dimensioni *finite!*). Questa limitazione genera un errore. Al paragrafo 7 vedremo come questo errore non sia di poco conto e come lo si possa ridurre. Si richiede ancora l'intervento della matematica, per avere uno strumento il più possibile preciso.

5 - Funzioni generalizzate, la delta di Dirac.

Consideriamo l'insieme \mathcal{D} formato da tutte le funzioni $\phi(x)$, a valori nel campo complesso, soddisfacenti alle seguenti proprietà:

(i) $\phi(x)$ è definita su tutto l'asse x , quindi su $(-\infty, +\infty)$.

- (ii) $\phi(x)$ ammette derivata di ogni ordine n in ogni punto x .
 (iii) $\phi(x)$ ha **supporto compatto**, vale a dire l'insieme dei punti in cui non è nulla è contenuto in un intervallo limitato.

Richiediamo inoltre che:

- (iv) Ogni successione di funzioni $\phi_n(x) \in \mathcal{D}$ convergente ad una funzione $\phi(x) \in \mathcal{D}$ è tale che per ogni intero positivo k la successione delle derivate k -esime $D^k \phi_n(x)$ converge alla derivata k -esima $D^{(k)} \phi(x)$.

Quest'insieme è uno **spazio vettoriale**, nel senso che per ogni coppia di funzioni (ϕ, ψ) di \mathcal{D} , si ha

$$\alpha\phi + \beta\psi \in \mathcal{D}$$

per ogni scelta dei numeri complessi α e β .

Lo chiamiamo **spazio delle funzioni test** o **funzioni di prova**. Si noti che tali funzioni sono continue ed **integrabili** su tutto \mathbb{R} , nel senso che l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx,$$

che equivale ad un integrale proprio posto che la $\phi(x)$ ha supporto compatto, esiste ed è finito.

Chiamiamo **funzionale** ogni regola \mathcal{F} che associa ad ogni funzione test $\phi \in \mathcal{D}$ un ben definito numero $\mathcal{F}(\phi)$ (reale o complesso). Per esempio, la legge che associa ad ogni ϕ il suo integrale tra $-\infty$ e $+\infty$ è un funzionale. Così dicasi della legge che invece associa l'integrale su di un prefissato intervallo chiuso $[a, b]$.

Un esempio importante è dato dalla **delta di Dirac** δ , che associa ad ogni ϕ il suo valore nell'origine,

$$\delta(\phi) \doteq \phi(0), \tag{1}$$

oppure la **delta traslata** δ_a che associa ad ogni ϕ il suo valore $\phi(a)$,

$$\delta_a(\phi) \doteq \phi(a), \tag{2}$$

Un funzionale \mathcal{F} si dice **lineare** se

$$\mathcal{F}(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha\mathcal{F}(\phi) + \beta\mathcal{F}(\psi). \tag{3}$$

Gli esempi precedenti sono tutti funzionali lineari (verificare).

Un funzionale \mathcal{F} si dice **continuo** se per ogni successione $\phi_n \rightarrow 0$ (convergente, secondo quanto detto sopra, alla funzione nulla) si ha pure $\mathcal{F}(\phi_n) \rightarrow 0$.

Chiamiamo **funzione generalizzata** o **distribuzione** ogni funzionale lineare continuo su \mathcal{D} . Il loro insieme forma uno spazio vettoriale (secondo una naturale definizione di somma e di prodotto per un numero) denotato con \mathcal{D}' .

Una funzione generalizzata \mathcal{F} si dice **regolare** se può esprimersi nella forma integrale (se esiste una funzione $f(x)$ per cui)

$$\mathcal{F}(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x) dx. \quad (4)$$

In questo caso adottiamo la notazione

$$\mathcal{F}(\phi) = \langle f, \phi \rangle.$$

La delta di Dirac non è regolare: non troviamo nessuna funzione $\delta(x)$, nel senso ordinario, per cui

$$\delta(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\phi(x) dx = \phi(0) \quad (5)$$

o per cui

$$\langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \delta(x-a) dx. \quad (5')$$

Sarà tuttavia conveniente per i calcoli mantenere queste scritte puramente formale, attribuendo alla "funzione" $\delta(x)$ (oppure alla $\delta(x-a)$) un significato puramente intuitivo, ma supportato dal seguente ragionamento.

Consideriamo una successione di funzioni $f_n(x)$ ed una funzione test $\phi(x)$. Supponiamo che gli integrali

$$z_n \doteq \langle f_n, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) \phi(x) dx$$

esistano. Se la successione $f_n(x)$ converge ad una funzione $f(x)$, allora la successione numerica z_n converge a $z = \langle f, \phi \rangle$. Se invece la successione f_n non converge, la successione numerica z_n può invece convergere ad un numero z .

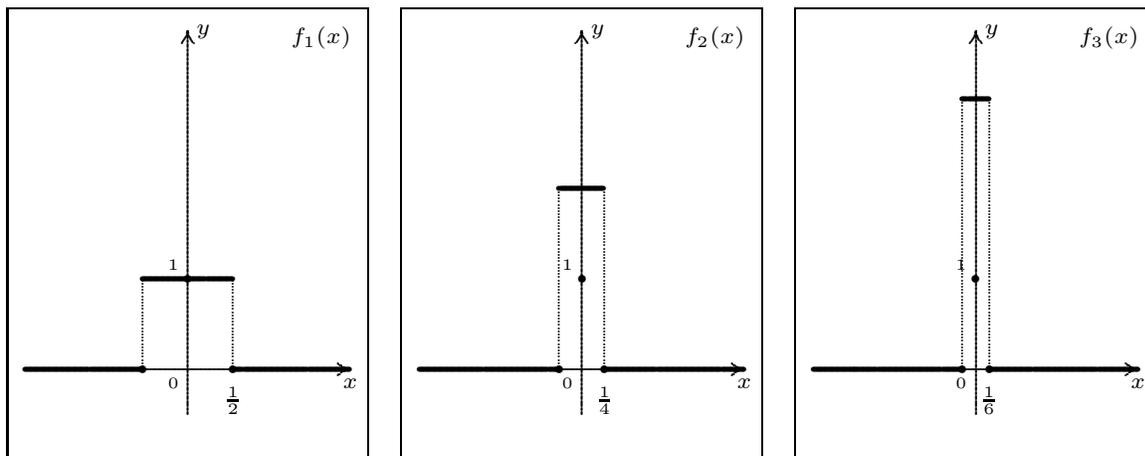
È questo il caso della seguente successione:

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & |x| < \frac{1}{2n}, \\ 0, & |x| \geq \frac{1}{2n}. \end{cases} \quad (6)$$

Osserviamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} n dx = 1.$$

Questo si nota bene dal diagramma di queste funzioni: l'area dei rettangoli determinati dal loro grafico è sempre = 1.



Questa successione di funzioni non è convergente, ma lo è quella dei numeri z_n :

$$z_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) \phi(x) dx = n \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \phi(x) dx = \dots$$

Infatti, per il teorema del valor medio delle funzioni continue, quest'ultimo integrale vale $\phi(\xi)$ dove ξ è un punto interno all'intervallo d'integrazione $[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]$, di ampiezza $1/n$:

$$\dots = n \frac{1}{n} \phi(\xi) = \phi(\xi).$$

Risulta quindi, sempre per la continuità di $\phi(x)$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \phi(0).$$

Dunque, pur essendo la successione f_n non convergente, quando la applichiamo ad una qualunque funzione test $\phi(x)$ otteniamo una successione numerica convergente a $\phi(0)$. Per quanto sopra visto, possiamo porre per definizione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle f_n, \cdot \rangle = \delta. \quad (7)$$

In altri termini, la delta di Dirac può essere intesa come il limite di una successione di funzioni generalizzate regolari. Una tale successione non è unica (se ne possono considerare altri esempi).

6 - La derivata di un funzionale.

L'estensione delle usuali operazioni sulle funzioni ordinarie alle funzioni generalizzate porta alla soppressione di molte restrizioni. Per questa ragione le funzioni generalizzate estendono in maniera considerevole le proprietà del calcolo. Per esempio, in base alla definizione che ora diamo, ogni funzione generalizzata (regolare o no) ammette la derivata.

Definizione. Dicesi **derivata** di un funzionale \mathcal{F} il funzionale $\mathcal{F}' = D\mathcal{F}$ definito da

$$\boxed{\mathcal{F}'(\phi) = -\mathcal{F}(\phi')} \quad (1)$$

Con ϕ' s'intende ovviamente la derivata della funzione test ϕ : ricordiamo che queste funzioni sono indefinitamente derivabili, per definizione, e che anche ϕ' è una funzione test.

Perché questa definizione? e, in particolare, perché il segno $-$?

Senza entrare in sottili dettagli, osserviamo solo che questa definizione è giustificata dal seguente ragionamento. Prendiamo un funzionale del tipo $\mathcal{F} = \langle f, \cdot \rangle$, dove $f(x)$ è una funzione derivabile. Insieme a questo consideriamo anche il funzionale $\mathcal{F}' = \langle f', \cdot \rangle$. Seguiamo attentamente le definizioni date sopra, compresa quella per cui $\langle f, \phi \rangle$ è una (funzione) costante, per cui

$$\mathcal{F}'(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\phi(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi'(x) dx = -\langle f, \phi' \rangle.$$

(... continua, vedi la prossima versione)

Prof. S. Benenti

IL METODO DEI MINIMI QUADRATI

1 - Il metodo dei minimi quadrati.

Dati n punti (x_i, y_i) del piano (x, y) , ha interesse, per vari motivi che vedremo più avanti, determinare la retta di equazione $y = mx + q$ che, pur non passando per tutti questi punti, è però tale da rendere minima la sommatoria

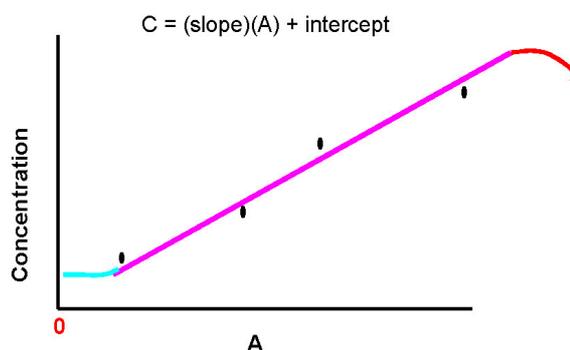
$$\sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - q)^2, \quad (1)$$

che rappresenta la somma dei quadrati delle differenze tra i valori y_i dati e le ordinate dei punti corrispondenti alle ascisse x_i che stanno sulla retta stessa.

La ricerca di tale retta risponde alla seguente esigenza: i punti (x_i, y_i) rappresentano dati sperimentali di un fenomeno che *si sa* o *si suppone* essere legati da una relazione lineare, cioè del tipo $y = mx + q$. È chiaro tuttavia che i dati sperimentali soffrono di errori ed è quindi praticamente impossibile che i suddetti punti siano allineati. D'altra parte, la condizione di minimo della somma (1) soddisfa a interessanti proprietà statistiche (studiate da Gauss).

Determinare la retta in questione, detta **retta di regressione lineare**, equivale a determinare il suo coefficiente angolare m (*slope*) e la sua intercetta q (*intercept*).

Concentration Determination



Per questo consideriamo la sommatoria (1) come funzione delle due variabili (m, q) ,

$$f(m, q) \doteq \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - q)^2, \quad (2)$$

e determiniamo i valori di queste due variabili in cui questa funzione ha un minimo. A prima vista resta ovviamente il dubbio dell'esistenza di un tale minimo. Comunque, procediamo col ricordare, dall'analisi delle funzioni a due variabili, che questi valori devono essere soluzione delle equazioni

$$\frac{\partial f}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial q} = 0.$$

Per la definizione (2), queste equazioni si esplicitano in

$$\begin{cases} \sum_i (y_i - mx_i - q) x_i = 0, \\ \sum_i (y_i - mx_i - q) 1_i = 0, \end{cases}$$

dove con 1_i s'intende il numero 1 per ogni valore dell'indice $i = 1, \dots, n$. Esse sono quindi rispettivamente equivalenti alle equazioni

$$\begin{cases} \sum_i x_i^2 m + \sum_i x_i q = \sum_i x_i y_i, \\ \sum_i x_i m + n q = \sum_i y_i, \end{cases}$$

che formano un sistema lineare nelle incognite (m, q) . Siccome il determinante di questo sistema è

$$\Delta \doteq n \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2 \quad (3)$$

con la regola di Cramer si trova

$$\begin{cases} m = \frac{1}{\Delta} (n \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i) \\ q = \frac{1}{\Delta} (\sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i) \end{cases} \quad (4)$$

Con queste formule si determinano i valori (m, q) della retta cercata.

Esercizio 1. Dimostrare che per questi valori la funzione (2) ha effettivamente un minimo.

Esercizio 2. Trattare l'analogo problema per cui la retta cercata si assume passante per l'origine, cioè del tipo $y = mx$ (caso **omogeneo**).

Esercizio 3. Trattare l'analogo problema in cui si suppone che il fenomeno studiato abbia un andamento non più lineare bensì quadratico: $y = ax^2 + bx + c$.

2 - Elaborazione statistica di n dati (x_i) .

Ad un numero finito n di dati (x_i) si associano varie grandezze statistiche, chiamate genericamente **indici**. Questi si distinguono in

Indici di tendenza centrale o di posizione: media \bar{x} , mediana \hat{x} , moda \tilde{x} .

Indici di variabilità: misurano il grado di variabilità o dispersione: varianza s^2 , deviazione standard (o scarto quadratico medio) s , scarto medio assoluto $s.a.$, coefficiente di variazione $c.v.$.

Media (aritmetica) o baricentro:

$$\bar{x} \doteq \frac{1}{n} \sum_i x_i.$$

Teorema. La media è il punto di minimo della funzione

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_i (x - x_i)^2.$$

Osservazione 1. Il fattore $1/n$ non è essenziale, ma dà alla funzione il significato di "media".

Il valore minimo di questa funzione prende il nome di **varianza**:

$$s_x^2 \doteq \frac{1}{n} \sum_i (\bar{x} - x_i)^2.$$

Deviazione standard o scarto quadratico medio:

$$s_x \doteq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_i (\bar{x} - x_i)^2}.$$

La varianza (ed anche la deviazione standard) è una misura di quanto i punti siano sparpagliati, o eterogenei, cioè si discostino dalla loro media. Si ha $s = 0$ se e solo se tutti i numeri x_i coincidono.

Formula equivalente:

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \overline{(x^2)} - \bar{x}^2. \quad (\heartsuit)$$

Scarto medio assoluto:

$$s.a. \doteq \frac{1}{n} \sum_i |\bar{x} - x_i|.$$

Coefficiente di variazione:

$$c.v. \doteq \frac{s_x}{\bar{x}}.$$

Il coefficiente di variazione è la "normalizzazione" della varianza rispetto alla media. A valori maggiori del coefficiente di variazione corrisponde maggior variabilità dei dati.

Domanda: questi indici hanno delle limitazioni?

Mediana: è il punto \hat{x} di minimo della funzione

$$g(x) = \frac{1}{n} \sum_i |x - x_i|.$$

Teorema. Se si dispongono in ordine crescente i numeri x_i allora: se $n = 2m$ (pari), \hat{x} coincide con l'elemento mediano; se $n = 2m + 1$ (dispari), \hat{x} è un qualunque numero compreso tra i due elementi mediani. In questo secondo caso si conviene di prendere il valore medio dei due elementi mediani (punto centrale dell'intervallo mediano).

3 - Elaborazione di n coppie di dati (x_i, y_i) .

Covarianza:

$$c_{xy} \doteq \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_i x_i y_i - \bar{x}\bar{y} = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}.$$

I dati si dicono **statisticamente indipendenti** se la covarianza è nulla: $c_{xy} = 0$. (*vedi la regressione lineare*).

Retta di regressione lineare: retta $y = mx + q$ per cui risulta minima la quantità ("errore quadratico medio")

$$E(m, q) = \frac{1}{n} \sum_i (mx_i + q - y_i)^2.$$

Teorema:

$$m = \frac{c_{xy}}{s_x^2}, \quad q = \bar{y} - m\bar{x}.$$

Osservazione 1. La retta di regressione passa per il **baricentro** (\bar{x}, \bar{y}) .

Osservazione 2. Si può anche introdurre la retta di regressione "**orizzontale**" (quella di prima è "**verticale**", $x = m'y + q'$, che rende minima la funzione

$$V(m', q') = \sum_i (m'y_i + q' - x_i)^2.$$

Teorema: anche questa retta passa per il baricentro e inoltre

$$mm' = r^2 = \frac{c_{xy}^2}{s_x^2 s_y^2}, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Osservazione 3. Si possono considerare due casi o "vincoli" particolari. (1) La retta di regressione è orizzontale: $m = 0$. Segue che $q = \bar{y}$ è la media delle y_i . (2) La retta

passa per l'origine (regressione lineare "omogenea"): $q = 0$. Segue che $m = \bar{y}/\bar{x}$. La retta passa per l'origine ed il baricentro.

Coefficiente di correlazione lineare: r . Teorema: $r = 1$ se e solo se le due rette di regressione coincidono.

Osservazione 4. Quanto più r è vicino a 0 tanto più i punti sono dispersi lontano dalle rette di regressione. Valuta quanto è ragionevole rappresentare i punti come valori di una funzione lineare. Per $r > .9$ si ha un buon andamento rettilineo. Per $r < .5$ i punti sono a "nuvola".

Osservazione 5. Caso in cui le (x_i) sono n ed hanno un "passo" costante h : $i = 1, \dots, n$ e $x_{i+1} = x_i + h$. Sia δ l'ampiezza dell'intervallo:

$$\begin{aligned}\delta &= x_n - x_1 = (n - 1)h. \\ x_i &= x_1 + (i - 1)h. \\ \bar{x} &= x_1 + \frac{1}{2}\delta = x_1 + \frac{1}{2}(n - 1)h.\end{aligned}\tag{\diamond}$$

Dimostrare che

$$s_x^2 = \frac{1}{12} h^2 (n^2 - 1) = \frac{1}{12} \frac{n + 1}{n - 1} \delta^2.\tag{\dagger}$$

Idee. (1) Considerare la retta che rende minima la somma delle distanze al quadrato da una retta (in senso ortogonale). (2) La retta che rende minima la somma delle distanze (a potenza 1, o a potenza qualsiasi; verticale, orizzontale, ortogonale). (3) Regressione parabolica: minimizzare la somma al quadrato delle distanze da $y = ax^2 + bx + c$. (4) Regressione cubica: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (tiene conto dei flessi).

4 - Caso continuo.

Viene spontanea l'idea di estendere le considerazioni precedenti al caso di un insieme "continuo" (nel senso di "non discreto") di dati. Sia data una funzione $y = f(x)$ su \mathbb{R} (occorrerà fare alcune ipotesi strutturali su tale funzione, necessarie per l'esistenza delle grandezze che andiamo a introdurre). La valutiamo in un intervallo $[a, b]$ di ampiezza δ .

Medie:

$$\begin{aligned}\bar{x} &\doteq \frac{1}{\delta} \int_a^b x \, dx = a + \frac{\delta}{2} = b - \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}(a + b). \\ \bar{y} &\doteq \frac{1}{\delta} \int_a^b f(x) \, dx = \frac{1}{\delta} [F(b) - F(a)],\end{aligned}$$

dove $F(x)$ è una qualunque primitiva di $f(x)$: $F'(x) = f(x)$.

Varianza della x (vedi formula (\heartsuit)):

$$s_x^2 \doteq \bar{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{1}{\delta} \int_a^b x^2 \, dx - (b - \frac{\delta}{2})^2 = \dots = \frac{1}{12} \delta^2.$$

Si conferma dalla (†) per $n \rightarrow +\infty$. **Covarianza:**

$$c_{xy} \doteq \frac{1}{\delta} \int_a^b (x - \bar{x})(y - \bar{y}) dx = \frac{1}{\delta} \int_a^b x f(x) dx - \bar{x}\bar{y}.$$

Integrando per parti si trova:

$$\int x f(x) dx = xF(x) - G(x),$$

dove $F(x)$ è una qualunque primitiva di $f(x)$ e $G(x)$ una qualunque primitiva di $F(x)$:

$$F'(x) = f(x), \quad G'(x) = F(x).$$

Dunque

$$c_{xy} = \frac{1}{\delta} [bF(b) - aF(a) - G(b) + G(a)] - \bar{x}\bar{y}.$$

Retta di regressione lineare:

$$m = \frac{c_{xy}}{s_x^2} = \frac{12}{\delta^3} [bF(b) - aF(a) - G(b) + G(a)] - \frac{12}{\delta^2} \bar{x}\bar{y}, \quad q = \bar{y} - m\bar{x}.$$

Slope di $f(x)$: è la funzione $m_\delta(x)$ che dà il coefficiente angolare della retta di regressione di $f(x)$ nell'intervallo $[x - \delta, x]$. Nella formula precedente si sostituisce $b \mapsto x$, $a \mapsto x - \delta$, $\bar{x} \mapsto x - \frac{\delta}{2}$:

$$\begin{aligned} m_\delta(x) &= \frac{12}{\delta^3} \left[xF(x) - (x - \delta)F(x - \delta) - G(x) + G(x - \delta) \right. \\ &\quad \left. - (x - \frac{\delta}{2})(F(x) - F(x - \delta)) \right] \\ &= \frac{12}{\delta^3} \left[\frac{\delta}{2} (F(x) + F(x - \delta)) + G(x - \delta) - G(x) \right]. \end{aligned}$$

Applicando la formula di Taylor nell'intervallo $[x - \delta, x]$ alle funzioni $F(x)$ e $G(x)$ si trova:

$$m_\delta(x) = f'(x - \delta) + \frac{1}{2} f'''(x - \delta) \delta + \dots$$

e si ha la conferma ($f'(x)$ è supposta continua) che

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} m_\delta(x) = f'(x).$$

Osservazione importante. Quest'ultima formula mostra che la slope di una funzione è un buon *surrogato* della derivata. Anzi, la si può assumere come definizione di **derivata** di una funzione (non derivabile nel senso ordinario). **Problema:** sotto quali condizioni (per la f) questo limite esiste?

Media mobile della slope:

$$mm(\varepsilon, \delta, x) \doteq mm_{(\varepsilon, \delta)}(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^x m_\delta(t) dt.$$

Risulta:

$$mm(\varepsilon, \delta, x) = \frac{12}{\delta^3} \left[\frac{\delta}{2} \left(G(x) - G(x - \varepsilon) + G(x - \delta) - G(x - \delta - \varepsilon) \right) + H(x - \delta) - H(x - \delta - \varepsilon) \right],$$

dove $H(x)$ è una primitiva di $G(x)$: $H'(x) = G(x)$.