Corso di Matematica B per la Laurea in Chimica

a.a. 2003/04

S. Benenti, C. Chanu, A. Fino

Ultima versione marzo 2006

Con esercizi e temi d'esame svolti

Indice

Capitolo 5 - **I vettori.**

Capitolo 6 - **Le funzioni a più variabili.**

Capitolo 7 - **Il calcolo integrale.**

Capitolo 8 - **Le equazioni differenziali.**

Capitolo 9 - **I numeri complessi.**

CAPITOLO 5

I VETTORI

5.1 - I vettori come n-ple di numeri. In varie applicazioni della matematica si è utile e necessario considerare e operare sull'insieme $\mathbb{R}^n$ costituito da n-ple ordinate di numeri reali (o, come vedremo più avanti, di numeri complessi), che chiamiamo **vettori** e denotiamo con

$$\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n] \tag{1}$$

oppure con

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Nel primo caso diciamo che si tratta di un **vettore riga**, nel secondo di **vettore colonna**. I numeri reali v_i prendono il nome di **componenti** del vettore $\mathbf{v}$. L'intero positivo n, cioè il numero delle componenti del vettore, prende il nome di **dimensione** del vettore. Si usa anche la notazione con parentesi tonde,

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n), \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Sui vettori si introducono alcune definizioni e operazioni fondamentali. Per semplicità ci riferiremo al caso $n = 3$, ed avvertendo che tutte le cose che diremo si estendono facilmente al caso di n qualsiasi. Useremo la notazione colonna.

Vettore nullo. È il vettore le cui componenti sono tutte zero,

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Norma o modulo di un vettore. È il numero

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}. \tag{5}$$

Un vettore si dice **unitario** se $|\mathbf{v}| = 1$.

Prodotto di un vettore per un numero. È il vettore definito da

$$a\mathbf{v} = \begin{bmatrix} av_1 \\ av_2 \\ av_3 \end{bmatrix}.$$

È cioè quel vettore le cui componenti sono tutte moltiplicate per il numero a. Si osservi che

$$0\mathbf{v} = \mathbf{0}, \qquad 1\mathbf{v} = \mathbf{v}. \tag{6}$$

Somma di due vettori. È il vettore che ha per componenti la somma delle componenti "omologhe":

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

La **differenza** di due vettori $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ si definisce in maniera analoga. Per la somma di vettori valgono la **proprietà commutativa** e **associativa**:

$$\begin{cases} \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}, \\ \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}. \end{cases} \tag{8}$$

In relazione al prodotto per un numero valgono inoltre le **proprietà distributive**

$$\begin{cases} (a + b)\,\mathbf{v} = a\,\mathbf{v} + b\,\mathbf{v}, \\ a\,(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\,\mathbf{u} + a\,\mathbf{v}. \end{cases} \tag{9}$$

Il vettore nullo svolge il ruolo di elemento neutro nell'operazione di somma, nel senso che sommato ad un qualunque vettore, non lo cambia:

$$\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}. \tag{10}$$

Vettori opposti. Due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ si dicono **opposti** se la loro somma si annulla, $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Questo significa che le componenti omologhe dei due vettori sono opposte. Si scive allora

$$\mathbf{u} = -\mathbf{v}. \tag{11}$$

Si osservi che

$$-\mathbf{v} = (-1)\,\mathbf{v}. \tag{12}$$

Prodotto interno o prodotto scalare di due vettori. È il numero dato dalla somma dei prodotti delle componenti omologhe; lo si denota con $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3. \tag{13}$$

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà, di immediata verifica in base alla definizione (13):

$$\begin{cases} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \qquad \text{propr. commutativa} \\ (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, \qquad \text{propr. distributiva,} \\ (a\,\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = a\,(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}). \end{cases} \tag{14}$$

Dalla definizione (13) si osserva che, nel caso $\mathbf{u} = \mathbf{v}$,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2, \tag{15}$$

cioè che il prodotto scalare di un vettore per se stesso è uguale al quadrato del suo modulo. Si usa anche la notazione

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^2. \tag{16}$$

Due vettori si dicono **ortogonali** se il loro prodotto scalare è nullo, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Si usa in tal caso la notazione $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ (vedremo più avanti il significato geometrico di questa definizione).

Combinazione lineare di vettori. Dicesi **combinazione lineare** di un numero (qualsiasi) k di vettori, $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, un vettore del tipo

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \sum_{i=1}^{k} c_i\mathbf{v}_i, \tag{17}$$

dove i c_i sono dei numeri che prendono il nome di **coefficienti** della combinazione.

Vettori linearmente indipendenti. Dati k vettori, $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, questi si dicono **linearmente indipendenti** (brevemente, **indipendenti**) se non esiste nessuna loro combinazione lineare che dá il vettore nullo, se non quella i cui coefficienti sono tutti nulli, se vale cioè l'implicazione

$$\sum_{i=1}^{k} c_i\mathbf{v}_i = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad c_i = 0. \tag{18}$$

In caso contrario i vettori si dicono **dipendenti**. Si osserva che:

(i) Se i dati vettori sono dipendenti, allora uno di essi si esprime come combinazione lineare dei rimanenti vettori. Infatti, se esiste una loro c. l. a coefficienti non tutti nulli che dá il vettore nullo, $\sum_{i=1}^{k} c_i\mathbf{v}_i = 0$, supposto per esempio $c_1 \neq 0$, si ottiene, dividendo per c_1,

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\mathbf{v}_2 - \ldots - \frac{c_k}{c_1}\mathbf{v}_k.$$

(ii) Vale la proprietà inversa: se un vettore $\mathbf{v}$ è combinazione lineare di altri vettori, allora tutti insieme sono dipendenti.

(iii) Se uno dei dati vettori $\mathbf{v}_i$ è il vettore nullo, allora i vettori sono dipendenti. Infatti, se per es. è $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, allora la combinazione lineare $\sum_{i=1}^{k} c_i\mathbf{v}_i$ con $c_1 \neq 0$ e tutti gli altri coefficienti nulli dà il vettore nullo.

(iv) Se $k > n$ (cioè se il numero dei vettori supera la loro dimensione) allora essi sono necessariamente dipendenti. In altre parole, non esistono k vettori indipendenti con $k > n$.

Quest'ultima proprietà si può dedurre dal seguente fatto fondamentale (consideriamo ancora, per semplicità, il caso $n = 3$):

(v) Ogni vettore $\mathbf{v}$ (di dimensione 3) è combinazione lineare dei 3 vettori

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Infatti,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = v_1\mathbf{c}_1 + v_2\mathbf{c}_2 + v_3\mathbf{c}_3. \tag{20}$$

Si dice che i vettori $\mathbf{c}_i$ formano la **base canonica** dell'insieme dei vettori di dimensione 3. Più in generale diciamo che 3 vettori indipendenti formano una **base**: ogni vettore risulta combinazione lineare di questi.

5.2 - Punti nel piano e nello spazio. Abbiamo visto che un numero reale rappresenta un punto su di una retta, una volta che su questa si fissi un punto origine (rappresentante lo zero), un verso (rappresentante l'ordinamento dei numeri) ed una unitá di misura (cioè il punto rappresentante in numero 1). Abbiamo anche visto che una coppia di numeri (x, y) puó essere usata per rappresentare un punto nel piano, una volta fissati su questo una coppia di assi cartesiani (in genere, ortogonali e monometrici, cioè con le stesse unità di misura). Similmente, una terna di numeri (x, y, z) rappresenta un punto nello spazio tridimensionale, riferito a tre assi cartesiani ortogonali uscenti da un medesimo punto origine O.

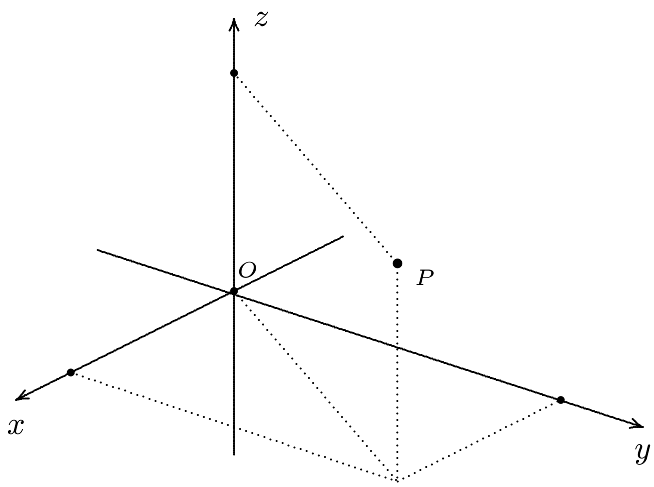


Fig. 5.1 - Coordinate di un punto nello spazio.

Il punto O e l'insieme dei tre assi (x, y, z) formano un **riferimento cartesiano** dello spazio tridimensionale. Anziché con (x, y) e (x, y, z), possiamo anche denotare con (x_1, x_2) e (x_1, x_2, x_3) le coordinate di un generico punto nel piano e nello spazio. Siamo in tal modo indotti a considerare anche quaterne (x_1, x_2, x_3, x_4) o quintuple $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ di numeri, ecc., che rappresenteranno punti in spazi di dimensione quattro, cinque ecc., che ovviamente non possiamo disegnare (neanche in prospettiva, come per lo spazio tridimensionale). Dunque, in generale, una **n-pla** di numeri reali

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

rappresenterà un punto nello spazio a n dimensioni (o n-spazio). In queste lezioni ci limiteremo però a considerare i soli casi $n = 2, 3$.

Possiamo riassumere le considerazioni precedenti osservando che, una volta fissato un riferimento cartesiano, l'insieme dei punti dello spazio (o del piano) si identifica con l'insieme dei vettori numerici a tre (o due) componenti. Questa interpretazione geometrica del concetto di vettore numerico si può rendere ancora più efficace se, insieme ad ogni punto P si considera il segmento di retta OP che unisce l'origine O al punto P, segmento che intendiamo orientato da O a P e quindi rappresentabile con una freccia che va da O a P.

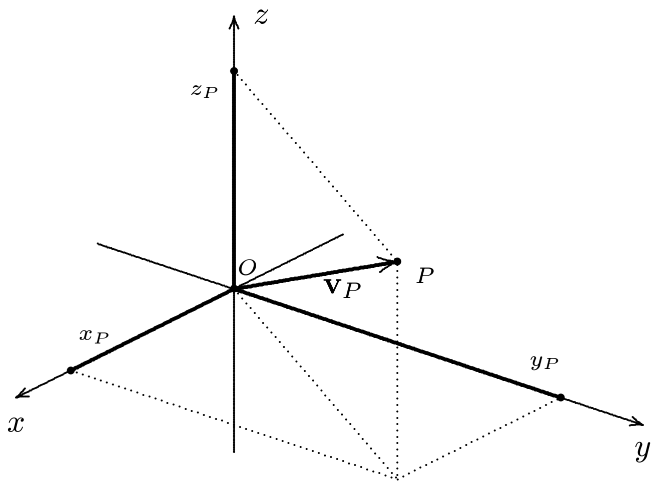


Fig. 5.2 - Vettore come segmento orientato uscente dall'origine.

Se denotiamo con $\mathbf{v}_P$ tale freccia, possiamo scrivere che

$$OP = \mathbf{v}_P = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix}$$

dove (x_P, y_P, z_P) sono le coordinate del punto P, intese come componenti del vettore $\mathbf{v}_P$. Ora però queste componenti si possono intendere come le lunghezze, con segno, delle proiezioni ortogonali sugli assi del segmento OP.

Possiamo allora dare una notevole interpretazione geometrica a tutte le nozioni ed operazioni definite sui vettori numerici al paragrafo precedente (il prodotto scalare di due vetori sarà esaminato nel §5.4).

(1) Il vettore nullo corrisponde all'origine, cioè al caso $P = O$.

(2) Il modulo del vettore $\mathbf{v}_P$ à la lunghezza del segmento OP.

(3) Moltiplicando $\mathbf{v}_P$ per un numero a si ottiene il vettore $\mathbf{v}_Q$ determinato dal punto Q che giace sulla retta di OP e che ha modulo moltiplicato per $|a|$. Se $a > 0$, il punto Q si trova dalla stessa parte di P rispetto all'origine O, dalla parte opposta se $a < 0$. In altre parole, $a\mathbf{v}_P$ è rappresentato da un segmento parallelo a $\mathbf{v}_P$, di modulo $|a||\mathbf{v}_P|$ ed equiorientato con $\mathbf{v}_P$ se $a > 0$.

(4) Due vettori $\mathbf{v}_P$ e $\mathbf{v}_Q$ individuano un parallelogramma, di vertici i punti O, P, R, Q, dove R è il vertice opposto a O. Allora la somma di due vettori $\mathbf{v}_P + \mathbf{v}_Q$ è il vettore

$\mathbf{v}_R$ corrispondente al punto R, quindi rappresentato dal segmento diagonale del parallelogramma uscente da O (questa proprietà è detta **regola del parallelogramma**):

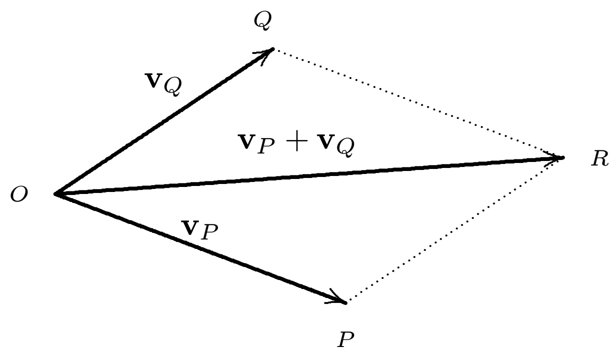


Fig. 5.3 - Somma di due vettori.

Infatti il punto R ha coordinate uguali alla somma delle coordinate dei punti P e Q.

(5) La differenza dei vettori $\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_Q$ è invece il vettore rappresentato dall'altra diagonale, orientata da Q a P, pensata uscente dall'origine.

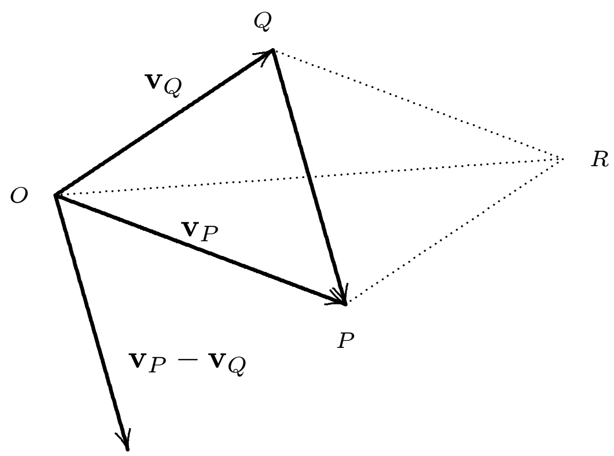


Fig. 5.4 - Differenza di due vettori.

5.3 - Vettori liberi e vettori applicati. Il fatto di considerare i vettori come segmenti orientati e di poterli quindi trasportare parallelamente a se stessi senza cambiarne l'orientamento e la lunghezza (come si è visto nel caso della differenza di due vettori, Fig. 5.4) porta alle nozioni di "vettore applicato" e "vettore libero". Un **vettore applicato** in un punto A è un segmento orientato AB, avente quindi origine in un punto A ed estremo in un secondo punto B. Preso un qualunque vettore $OP = \mathbf{v}_P$, se lo si trasporta parallelalmente a se stesso in modo da portare l'estremo O in un nuovo punto prefissato A, si ottiene un nuovo segmento orientato AB, quindi un vettore applicato in A. I due segmenti orientati OP e AB vengono a formare un parallelogramma.

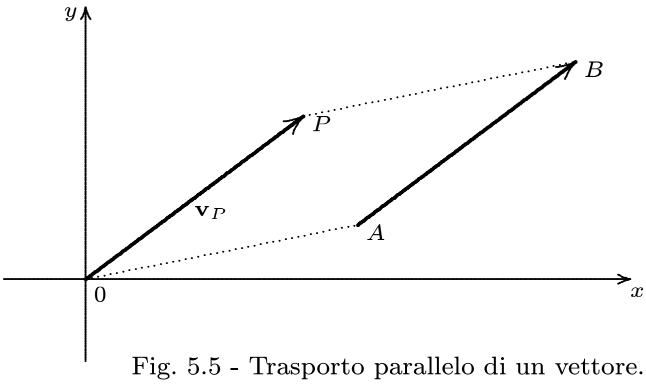


Fig. 5.5 - Trasporto parallelo di un vettore.

Il punto A e la retta determinata dai punti A e B prendono il nome, rispettivamente, di **punto** e **retta di applicazione** del vettore applicato. Se si lascia indeterminato il punto di applicazione si ottiene un **vettore libero**. Con questo termine s'intende, più precisamente, una **classe di equivalenza** di vettori applicati, chiamando **equivalenti** due vettori applicati ottenuti uno dall'altro per trasporto parallelo, quindi formanti un parallelogramma analogo a quello della Fig. 5.5. Ne consegue che un vettore libero è un'entità caratterizzata da

una **direzione**, un **verso**, una **intensità**.

Una direzione è rappresentata da un fascio di rette parallele. Una direzione ammette due versi, corrispondenti ai due possibili orientamenti di una retta del fascio. L'intensità (o modulo) di un vettore è il numero reale positivo uguale alla lunghezza di un qualunque segmento rappresentativo del vettore.

Un vettore libero unitario $\mathbf{u}$ si dice **versore**. Esso definisce infatti una direzione ed un verso. Un generico vettore libero $\mathbf{v}$ ammette una rappresentazione del tipo (20) del §5.1

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_1\mathbf{c}_1 + v_2\mathbf{c}_2 + v_3\mathbf{c}_3.$$

Osserviamo allora che i vettori della base canonica $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$, anche denotati con $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, sono versori paralleli ed equiorientati agli assi coordinati. Si chiamano anche **versori fondamentali** associati al riferimento cartesiano (O, x, y, z).

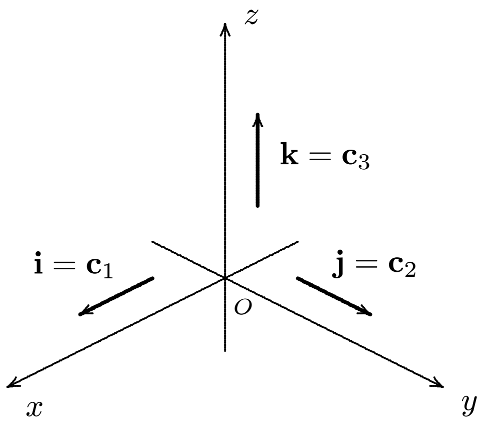


Fig. 5.6 - Versori fondamentali.

5.4 - Prodotto scalare. Definiamo **prodotto scalare** di due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, il numero

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\,\cos\theta} \tag{1}$$

dove θ è l'angolo compreso fra i due vettori, pensati applicati in un medesimo punto. La sua interpretazione geometrica è la seguente: è il modulo di uno dei due vettori $|\mathbf{u}|$ per la lunghezza con segno della proiezione dell'altro vettore $\mathbf{v}$ sulla retta di applicazione di $\mathbf{u}$, che è appunto il numero $|\mathbf{v}|\,\cos\theta$.

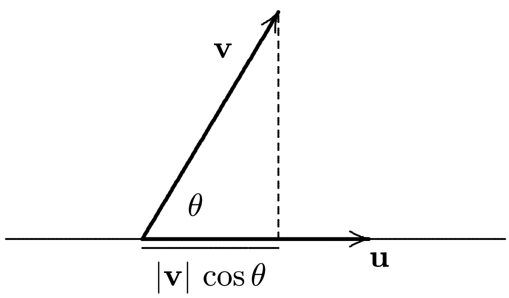


Fig. 5.7 - Prodotto scalare.

Un notevole significato fisico del prodotto scalare è il seguente: se il vettore $\mathbf{F}$ rappresenta una forza ed il vettore $\mathbf{s} = PQ$ uno spostamento, allora il prodotto scalare $\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$ rappresenta il lavoro della forza (supposta costante) nello spostamento $\mathbf{s}$.

Si osservi che il prodotto scalare è positivo se i due vettori formano un angolo acuto, negativo se l'angolo è ottuso. È nullo se i due vettori sono perpendicolari o **ortogonali**.

Nel §5.1 abbiamo definito come prodotto scalare il numero

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3} \tag{2}$$

essendo u_i e v_i $(i = 1, 2, 3)$ le componenti dei due vettori.

Il fatto notevole, che torna utile in varie applicazioni, è che le due definizioni sono equivalenti. Osserviamo innanzitutto la differenza fondamentale tra le due definizioni: la (1) fa ricorso a enti gometrici, il modulo dei due vettori (quindi la lunghezza dei segmenti rappresentativi) e l'angolo da essi formato; la (2) coinvolge invece le componenti. Si osservi, a questo proposito, che non sempre è facile calcolare l'angolo fra due vettori nello spazio. Tuttavia, accettata l'equivalenza delle due definizioni (1) e (2), da queste segue la possibilità di calcolare il coseno di tale angolo conoscendo le componenti dei vettori:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} = \frac{u_1\, v_1 + u_2\, v_2 + u_3\, v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\;\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}} \tag{3}$$

Di qui segue, in particolare, che

• *due vettori sono ortogonali (quindi* $\cos\theta = 0$*) se e solo se il loro prodotto scalare è nullo, quindi se e solo se*

$$u_1\, v_1 + u_2\, v_2 + u_3\, v_3 = 0. \tag{4}$$

Per dimostrare l'equivalenza delle due definizioni si parte con l'osservare che valgono per il prodotto scalare definito dalla (1) le proprietà formali (14) del §5.1, che qui riscriviamo:

$$\begin{cases} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \\ (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, \\ (a\,\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = a\,(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}). \end{cases} \tag{5}$$

La prima (proprietà commutativa) e la terza sono un'ovvia conseguenza della (1). Per dimostrare la seconda (proprietà distributiva) possiamo considerare il caso in cui $\mathbf{w}$ è unitario (non si perde generalità in virtù della $(5)_3$). Osserviamo che, ripetendo *mutatis mutandis* la Fig. 5.7 nella Fig. 5.8, il prodotto scalare di un vettore $\mathbf{u}$ per un vettore unitario $\mathbf{w}$ (pensati per comodità applicati nel medesimo punto A) è dato dalla proiezione di $\mathbf{u}$ sulla retta di applicazione di $\mathbf{w}$.

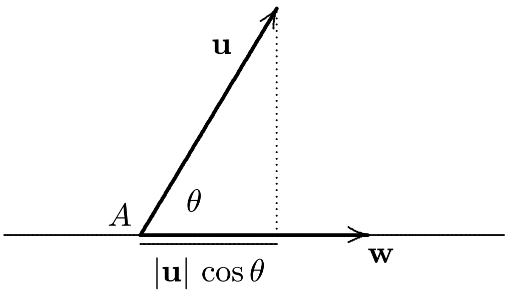


Fig. 5.8

D'altra parte, se $\mathbf{u}$ è rappresentato dal segmento orientato AB e se $\mathbf{v}$ lo si pensa applicato in B e quindi rappresentato da un segmento orientato BC, il vettore somma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ applicato in A è rappresentato, per la regola del parallelogramma, dal segmento AC. Una facilmente dimostrabile proprietà delle proiezioni di una "spezzata" ABC su di una retta ci dice che la somma delle proiezioni dei segmenti AB e BC è uguale alla somma delle proiezioni. Questo dimostra, per quanto visto sopra, che il prodotto scalare di $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ per $\mathbf{w}$ è appunto uguale alla somma dei prodotti scalari $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.

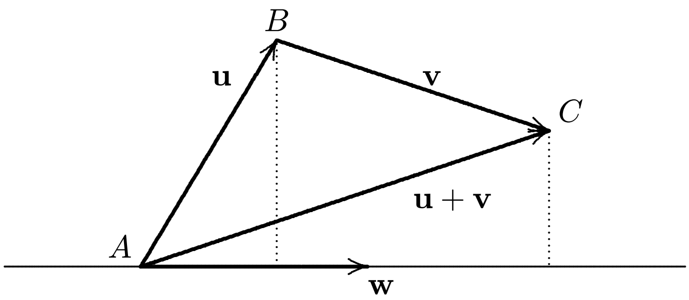


Fig. 5.9

Utilizziamo la proprietà distributiva ora dimostrata per calcolare il prodotto scalare

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1\mathbf{c}_1 + u_2\mathbf{c}_2 + u_3\mathbf{c}_3) \cdot (v_1\mathbf{c}_1 + v_2\mathbf{c}_2 + v_3\mathbf{c}_3), \tag{6}$$

tenendo conto che i versori fondamentali sono unitari e ortogonali, quindi che

$$\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases} \tag{7}$$

Il simbolo a due indici δ_{ij} che vale 1 o 0 a seconda che i due indici siano uguali o distinti prende il nome di **simbolo di Kronecker**. Dalla (6) segue allora subito la (2). Siccome il ragionamento è reversibile, l'equivalenza delle due definizioni è dimostrata.

Due osservazioni importanti:

• *I prodotti scalari di un vettore* **v** *per i versori principali forniscono le componenti del vettore:*

$$v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{c}_i. \tag{8}$$

• Utilizzando la proprietà distributiva e commutativa del prodotto scalare si può calcolare il quadrato (cioè il quadrato del modulo) della somma di due vettori. Essendo

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} + 2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

risulta

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \tag{9}$$

Analogamente:

$$(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \tag{10}$$

È interessante osservare che da quest'ultimo prodotto notevole segue immediatamente il **teorema di Carnot** sui triangoli. Si considerino infatti i due vettori applicati in un medesimo punto C. Posto $\mathbf{a} = CB$ e $\mathbf{b} = CA$, si ottiene un triangolo ABC. L'angolo θ in C è l'angolo formato dai due vettori **a** e **b**, la lunghezza c del lato opposto a C è $c = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ e la lunghezza dagli altri due lati è $a = |\mathbf{a}|$ e $b = |\mathbf{b}|$. La formula precedente si traduce allora in

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\theta,$$

che è appunto il teorema di Carnot.

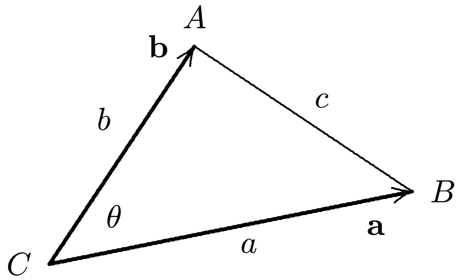


Fig. 5.10 - Il teorema di Carnot.

5.6 - Prodotto vettoriale. Il prodotto vettoriale di <u>due</u> vettori, denotato con $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, è il <u>vettore</u> definito dalle seguenti tre condizioni:

(1) La sua direzione è ortogonale (o perpendicolare) a entrambi i vettori (cioè ortogonale al piano formato dai due vettori, pensati applicati in un medesimo punto).

(2) Il suo verso è stabilito dalla **regola della mano destra**: la terna vettoriale ordinata $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})$ è disposta come le tre dita (pollice, indice, medio) della mano destra, oppure dalla **regola della vite**: ruotando $\mathbf{u}$ in modo da portarlo su $\mathbf{v}$ (percorrendo l'angolo minore) ci si "avvita" nel verso di $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

(3) Il suo modulo $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ è uguale all'area del parallelogramma formato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Si osservi che se θ è l'angolo compreso fra i due vettori (non più grande di π), allora

$$\boxed{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\,\sin\theta} \tag{1}$$

Infatti, preso il vettore $\mathbf{u}$ come base (di lunghezza $|\mathbf{u}|$) del parallelogramma, l'altezza risulta essere $|\mathbf{v}|\,\sin\theta$.

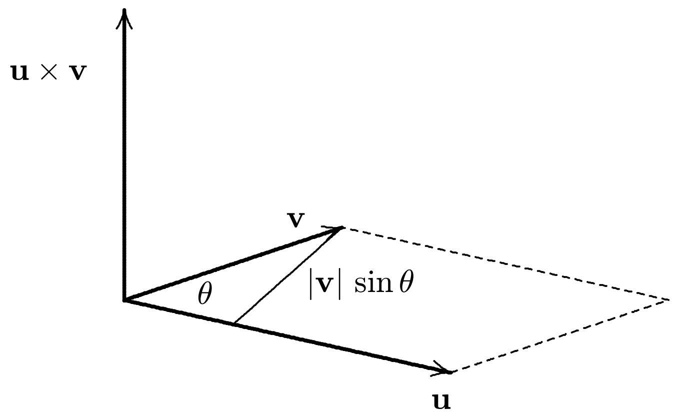


Fig. 5.11 - Prodotto vettoriale.

Si noti bene che la definizione di prodotto vettoriale dipende dalla scelta di un **orientamento** dello spazio e precisamente quello della *mano destra*. Se si considerasse la mano sinistra si avrebbe l'orientamento opposto e il prodotto vettoriale avrebbe verso opposto. L'orientamento della mano destra è quello universalmente adottato, salvo casi particolari, per esempio nella filettatura delle viti.

Il prodotto vettoriale gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
&\boxed{1}\ \mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\,\mathbf{v} \times \mathbf{u},\\
&\boxed{2}\ (a\,\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = a\,(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (a\,\mathbf{v}),\\
&\boxed{3}\ (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w},\\
&\boxed{4}\ \mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{u}\,||\,\mathbf{v},\\
&\boxed{5}\ \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0,\\
&\boxed{6}\ \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}\,\mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\,\mathbf{w},
\end{aligned} \tag{2}$$

La $\boxed{1}$ è la proprietà **anticommutativa**, immediata conseguenza della definizione (punto (2)). La $\boxed{2}$ è la proprietà associativa rispetto al prodotto per un numero (anche questa immediata conseguenza della definizione). La $\boxed{3}$ è la proprietà distributiva rispetto alla somma. La $\boxed{4}$ mostra che

- *l'annullarsi del prodotto vettoriale caratterizza il "parallelismo" dei vettori.*

Diciamo che due vettori sono **paralleli** se hanno la medesima direzione, ovvero se differiscono per un fattore moltiplicativo: $\mathbf{u} = a\mathbf{v}$ (oppure $\mathbf{v} = b\mathbf{u}$). Si noti infatti che in questo caso il parallelogramma individuato dai due vettori, supposti applicati nel medesimo punto, è nullo.

La $\boxed{5}$ è detta **proprietà ciclica** o **identità di Jacobi**: è conseguenza della proprietà $\boxed{6}$ detta **regola del doppio prodotto vettoriale**.

Si noti bene che: (i) Il prodotto vettoriale non è associativo: in generale infatti

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}).$$

La proprietà associativa viene "sostituita" dalla proprietà ciclica. (ii) Le proprietà $\boxed{3}$-$\boxed{6}$ non sono immediatamente deducibili dalla definizione di prodotto vettoriale, ma richiedono una dimostrazione piuttosto elaborata.

Anche per il calcolo del prodotto vettoriale vale quanto detto per il prodotto scalare: in genere non lo si calcola utilizzando le tre condizioni che lo definiscono. Questa volta, oltre all'angolo compreso θ, può anche essere difficile determinare la direzione ortogonale ai due vettori. Tuttavia, il suo calcolo risulta immediato, note le componenti dei due vettori. Infatti, se

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{c}_1 + u_2\mathbf{c}_2 + u_3\mathbf{c}_3, \qquad \mathbf{v} = v_1\mathbf{c}_1 + v_2\mathbf{c}_2 + v_3\mathbf{c}_3, \tag{3}$$

allora il prodotto vettoriale risulta dato dalla formula

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2\, v_3 - u_3\, v_2)\, \mathbf{c}_1 + (u_3\, v_1 - u_1\, v_3)\, \mathbf{c}_2 + (u_1\, v_2 - u_2\, v_1)\, \mathbf{c}_3} \tag{4}$$

Questa si dimostra partendo dalle (3), applicando la proprietà distributiva e utilizzando i prodotti vettoriali fondamentali seguenti, di immediata verifica in base alla dimostrazione:

$$\begin{cases} \mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_1 = 0 \\ \mathbf{c}_2 \times \mathbf{c}_2 = 0 \\ \mathbf{c}_3 \times \mathbf{c}_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_3 \\ \mathbf{c}_2 \times \mathbf{c}_3 = \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_3 \times \mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2 \end{cases} \tag{5}$$

Tuttavia, per il calcolo di un prodotto vettoriale si può utilizzare l'algoritmo del **determinante formale** di una matrice quadrata 3×3:

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}} \tag{6}$$

Immaginando che il simbolo a secondo membro di questa formula sia una "etichetta" avvolta intorno ad un cilindro, si sommano i tre prodotti ottenuti moltiplicando i tre elementi situati sulle tre diagonali discendenti e si sottraggono gli analoghi prodotti relativi alle tre diagonali ascendenti (**regola di Sarrus**). Il risultato di questo procedimento è proprio quello espresso dalla formula (3).

Nel caso di due vettori nel piano (x, y), essendo nulle le componenti rispetto all'asse z, si ha semplicemente

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_x\, v_y - u_y\, v_x)\, \mathbf{c}_3} \tag{7}$$

Si può anche qui utilizzare l'algoritmo del determinante, questa volta di una matrice 2×2 (prodotto degli elementi della diagonale discendente meno il prodotto degli elementi della diagonale ascendente):

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \mathbf{c}_3} \tag{8}$$

Notazioni. In molti testi per il prodotto scalare si usa il simbolo $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ o $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ e per il prodotto vettoriale il simbolo $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ (anziché $\times$). Il prodotto vettoriale è anche chiamato **prodotto esterno**.

5.7 - Prodotto misto. La combinazione del prodotto vettoriale e del prodotto scalare dà luogo al **prodotto misto** di <u>tre</u> vettori: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$. Si tratta del <u>numero</u> ottenuto moltiplicando scalarmente il vettore $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ per il vettore $\mathbf{w}$. Questo numero ha un notevole significato geometrico:

• *Il prodotto misto* $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ *rappresenta il volume (con segno) del parallelepipedo individuato dai vettori* $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, che denotiamo con $V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$:

$$\boxed{V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}} \tag{1}$$

Il segno del volume è positivo se, nell'ordine con cui sono presi, questi vettori si dispongono come le prime tre dita della mano destra (p<u>ollice</u>, <u>indice</u>, <u>medio</u>), negativo in caso contrario.

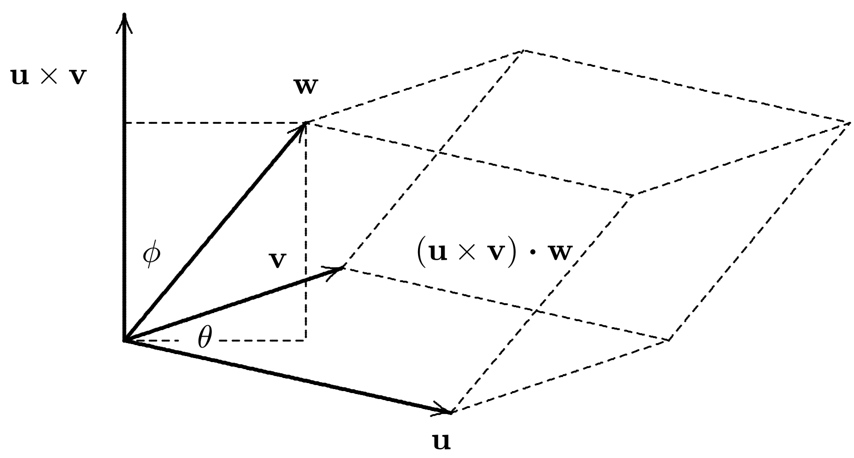


Fig. 5.12 - Prodotto misto.

Per dimostrare la (1) basta osservare che

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|\, |\mathbf{w}|\, \cos\phi,$$

dove ϕ è l'angolo formato da $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, e che i due numeri $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ e $|\mathbf{w}| \cos \phi$ rappresentano rispettivamente area di base e altezza del parallelepipedo in questione. Per quel che riguarda il segno di questo volume, si osservi (con l'aiuto della figura) che, fissati $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e quindi $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, se il vettore $\mathbf{w}$ forma un angolo acuto con $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ allora $\cos \phi$ è positivo e il prodotto misto è positivo. D'altra parte questa è proprio la situazione in cui la terna $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ è disposta come le prime tre dita della mano destra. Se invece i due vettori formano un angolo ottuso, per cui $\cos \phi$, e quindi il prodotto misto è negativo, si è nel caso opposto in cui la stessa terna corrisponde alle prime tre dita della mano sinistra.

Da quest'osservazione segue immediatamente che il volume del parallelepipedo non cambia, neanche in segno, se si permutano ciclicamente i tre vettori, cioè che

$$V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = V(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}) = V(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

per cui vale la **proprietà ciclica** del prodotto misto:

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{w} \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}} \tag{2}$$

Per il prodotto misto sussite inoltre la **proprietà di scambio**: il prodotto misto non cambia se si scambiano fra loro i simboli di prodotto scalare e di prodotto vettoriale,

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}} \tag{3}$$

Infatti per la proprietà ciclica e per la commutatività del prodotto scalare si ha successivamente:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}.$$

Per il prodotto misto vale infine **proprietà alternante**: *il prodotto misto cambia di segno se si scambiano tra loro due vettori*:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= -\, \mathbf{v} \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= -\, \mathbf{u} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= -\, \mathbf{w} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \end{aligned}} \tag{4}$$

Questo segue direttamente dall'interpretazione geometrica del segno del volume; infatti se si scambiano due vettori si cambia l'orientamento della terna e quindi il segno del volume.

$\boxed{\text{E}}$ Dimostrare la proprietá distributiva $\boxed{3}$ del prodotto vettoriale, §5.6, utilizzando le proprietá del prodotto misto e la proprietá distributiva del prodotto scalare.

Richiamiamo quanto detto al §5.1: tre vettori $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ si dicono **linearmente dipendenti** se uno di essi è combinazione lineare degli altri due, cioè se sussistono delle uguaglianze del tipo $\mathbf{u} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$, ecc.. In questo caso, se si pensano i tre vettori applicati nel medesimo punto P, essi determinano un piano passante per P (si dicono pertanto "complanari").

Osserviamo allora che la condizione $V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ corrisponde al caso in cui il parallelepipedo da essi formato ha volume nullo, cioè alla complanarità dei tre vettori (in particolare, qualcuno dei vettori potrebbe essere nullo). Dunque:

• *La condizione* $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ *(prodotto misto nullo) caratterizza la lineare dipendenza ovvero la complanarità dei tre vettori, pensati applicati nel medesimo punto.*

Ricordiamo che la lineare indipendenza è caratterizzata dall'implicazione seguente:

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = b = c = 0,$$

una combinazione lineare dei tre vettori uguagliata a zero implica necessariamente che i tre coefficienti sono nulli. In questo caso *ogni vettore è esprimibile come combinazione lineare di* $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$. In altre parole, i tre vettori $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ formano un **base** per la rappresentazione di tutti i vettori.

Il prodotto misto si può calcolare direttamente attraverso le componenti cartesiane dei vettori con la formula

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = u_1\, v_2\, w_3 + u_2\, v_3\, w_1 + u_3\, v_1\, w_2 - u_3\, v_2\, w_1 - u_2\, v_1\, w_3 - u_1\, v_3\, w_2} \tag{6}$$

Questa formula segue immediatamente dalla formula relativa al prodotto vettoriale. Per rendere "automatico" il calcolo del prodotto misto si utilizza l'algoritmo del "determinante di ordine 3":

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}} \tag{7}$$

Il procedimento è analogo a quello visto per il prodotto vettoriale: immaginando che il simbolo a secondo membro di questa formula sia una "etichetta" avvolta intorno ad un cilindro, si sommano i tre prodotti delle tre diagonali discendenti e si sottraggono quelli delle tre diagonali ascendenti (**regola di Sarrus**). Un fatto interessante da osservare è che il risultato del calcolo non cambia se le componenti dei tre vettori si dispongono su tre colonne, anziché su tre righe:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \tag{8}$$

L'ordine con cui si dispongono i vettori va invece mantenuto. Infatti se si scambiano fra loro due vettori (cioè due righe o due colonne delle matrici considerate), il risultato cambia di segno.

5.8 - Matrici. Le considerazioni precedenti ci portano ad introdurre il concetto di **matrice**. In generale per **matrice** $m \times n$ s'intende una tabella rettangolare di numeri (o, come vedremo, anche di funzioni) costituita da m righe ed n colonne. Per esempio,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

è una matrice 3×4 (3 righe e 4 colonne). Se $m = n$ si ha una **matrice quadrata di ordine** n. Per esempio,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

è una matrice quadrata di ordine 3.

Per rappresentare una matrice, al posto delle parentesi quadre $[\ \ ]$, si usano anche le parentesi tonde $(\ \ )$ o le doppie barre $\|\ \ \|$.

Una matrice costituita da una sola riga o da una sola colonna si dice **vettore riga** o **vettore colonna** rispettivamente:

$$\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]\,, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Si noti che una matrice a m righe ed n colonne può pensarsi formata da m vettori riga oppure da n vettori colonna.

Ad ogni matrice <u>quadrata</u> $\mathbf{A}$ di numeri viene associato un numero, detto **determinante della matrice**, denotato con $\det \mathbf{A}$ o anche con $|\mathbf{A}|$.

La definizione generale di determinante di una matrice quadrata e le sue proprietà vengono esaminate in altri corsi. Nel caso di matrici di ordine 3 il calcolo del determinante si esegue con la regola di Sarrus, di cui si é detto al paragrafo precedente: se

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

allora

$$\boxed{\begin{aligned} \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \\ = u_1\, v_2\, w_3 + u_2\, v_3\, w_1 + u_3\, v_1\, w_2 - u_3\, v_2\, w_1 - u_2\, v_1\, w_3 - u_1\, v_3\, w_2 \end{aligned}} \tag{1}$$

Per esempio

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} &= 2 \cdot 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) \cdot 0 \\ &= -6 + 0 - 2 - 12 + 0 - 8 - 0 = -28. \end{aligned}$$

Nel caso invece di una matrice quadrata di ordine 2, il determinante è dato dalla formula

$$\boxed{\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc} \tag{2}$$

Per esempio,

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5.$$

5.9 - Piani nello spazio. Un'equazione del tipo

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0} \tag{1}$$

dove (a, b, c, d) sono quattro numeri reali, rappresenta un **piano** nello spazio riferito a coordinate cartesiane (x, y, z). Appartengono a questo piano tutti e soli quei punti P le cui tre coordinate (x, y, z) soddisfano a quest'equazione. Se $d = 0$ (siamo nel caso di un'equazione <u>omogenea</u>) allora il piano passa per l'origine O degli assi: infatti questo punto ha coordinate $(0, 0, 0)$ soddisfacenti all'equazione. Inoltre, il piano di equazione (1) è ortogonale al vettore (libero) $\mathbf{v}$ di componenti (a, b, c):

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Per riconoscere questo fatto partiamo dal problema seguente: *determinare l'equazione del piano che passa per un prefissato punto P_0 di coordinate (x_0, y_0, z_0) e che è perpendicolare al vettore $\mathbf{v}$ di componenti (a, b, c).* Il piano in questione sarà il <u>luogo</u> <u>geometrico</u> (cioè l'insieme) dei punti P, di coordinate generiche (x, y, z), tali che il vettore

$$P_0P = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}$$

è ortogonale al vettore $\mathbf{v}$. Questa condizione di ortogonalità si esprime con l'annullarsi del prodotto scalare del vettore P_0P col vettore $\mathbf{v}$,

$$\mathbf{v} \cdot P_0P = 0,$$

dunque con l'equazione

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \tag{2}$$

Si osserva allora che questa equazione assume proprio la forma (1), posto

$$d = -(ax_0 + by_0 + cz_0).$$

$\boxed{\text{E}}$ Determinare l'equazione di un piano passante per tre punti dati.

$\boxed{\text{E}}$ Determinare la distanza di un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ da un piano di equazione (1).

$\boxed{\text{E}}$ Determinare l'angolo formato da due piani. Per esempio, l'angolo minore di $\pi/2$ compreso fra i piani di equazione $2x - y + z = 0$ e $x + 2y - z = 1$ (R. Il coseno dell'angolo $< \pi/2$ è uguale a $\frac{1}{6}$).

$\boxed{\text{E}}$ Il caso delle rette nel piano euclideo riferito ad un sistema di coordinate (x, y) si tratta in maniera analoga (e più semplice): una retta nel piano è rappresentata da un'equazione del tipo

$$ax + by + c = 0.$$

Questa retta è ortogonale al vettore $\mathbf{v}$ di componenti (a, b).

5.10 - Sistemi di equazioni lineari. La discussione di un sistema di n equazioni lineari in n incognite è molto facilitata dall'interpretazione geometrica di queste equazioni. Vediamo il caso di un sistema di 3 equazioni in 3 incognite (x, y, z), cioè del tipo

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \tag{1}$$

dove $a_1, \dots, d_3$ sono numeri assegnati. In particolare la matrice quadrata

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

prende il nome di **matrice dei coefficienti**, mentre i numeri (d_1, d_2, d_3) prendono il nome di **termini noti**. Se questi sono tutti nulli, si dice che il sistema è **omogeneo**:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Le tre equazioni (1) rappresentano tre piani, Π_1, Π_2 e Π_3, rispettivamente. Pertanto, *una soluzione* (x_*, y_*, z_*) *del sistema* (1) *rappresenta le coordinate di un punto* P_* *che sta sui tre piani contemporaneamente, cioè che appartiene alla loro intersezione*:

$$(x_*, y_*, z_*) \text{ soluzione del sistema (1)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad P_* = (x_*, y_*, z_*) \in \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3.$$

Questa interpretazione geometrica facilita la discussione del sistema di equazioni (1). Occorre a questo scopo considerare anche i vettori ortogonali ai piani,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Esaminiamo il caso in cui questi sono linearmente indipendenti (ciò significa che, pensati applicati in un medesimo punto, essi non sono complanari). Questo caso è caratterizzato dalla condizione

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5}$$

Siccome $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ non sono paralleli, anche i piani corrispondenti Π_1 e Π_2 non sono paralleli e quindi si intersecano in una retta r. Pensiamo i vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ applicati in un punto di r. I vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono ortogonali a r e siccome $\mathbf{v}_3$ non giace sul piano da essi formato, il terzo piano Π_3 non è parallelo ad r e quindi la interseca in un solo punto. È pertanto questo il caso in cui i tre piani hanno uno ed un solo punto d'intersezione e concludiamo di conseguenza che:

• *Il sistema* (1) *ha una ed una sola soluzione se e soltanto se il determinante della matrice dei coefficienti* (2) *non è nullo*, vale cioè la condizione (5).

Se in particolare il sistema è omogeneo, i piani passano tutti e tre per l'origine $O = (0,0,0)$. Quindi:

• *Se vale la condizione* (5) *allora il sistema omogeneo* (3) *ammette come unica soluzione la soluzione* $(0,0,0)$.

Un metodo rapido per calcolare l'unica soluzione è dato dalla **regola di Cramer**, rappresentata dalle formule seguenti:

$$x_* = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad y_* = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad z_* = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Si osservi che (x_*, y_*, z_*) sono dati da una frazione con denominatore $\det \mathbf{A}$ e con numeratore il determinante della matrice dei coefficienti dove però la prima colonna, e rispettivamente la seconda e la terza, è sostituita dalla colonna dei termini noti.

Restano da esaminare i casi seguenti, per i quali i tre vettori $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ sono dipendenti, vale a dire

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

(I) I tre piani coincidono: le soluzioni sono le coordinate dei punti di questo unico piano (si dice allora che le soluzioni sono ∞^2).

(II) I tre piani sono paralleli e almeno uno distinto dagli altri due: nessuna soluzione.

(III) due piani hanno una retta in comune ed il terzo è parallelo a questa e non la contiene: nessuna soluzione.

(IV) I tre piani passano per una medesima retta: ∞^1 soluzioni (rappresentate dai punti di questa retta).

$\boxed{\text{E}}$ Discutere le proprietà delle equazioni (1) nei quattro casi sopra elencati, corrispondenti all'esistenza di nessuna o di infinite soluzioni.

5.11 - Rette e curve parametrizzate. Poniamoci il problema seguente: *determinare la retta passante per un prefissato punto* $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ *e parallela ad un prefissato vettore* $\mathbf{v}$ *di componenti* (a, b, c). Questa retta sarà il luogo dei punti P, di coordinate generiche (x, y, z), tali che il vettore P_0P è parallelo al vettore $\mathbf{v}$, quindi del tipo

$$P_0P = t\,\mathbf{v}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

In altre parole, al variare del parametro t su tutto l'insieme dei numeri reali, il punto P descriverà la retta cercata. L'equazione vettoriale (1) si traduce nel sistema di tre equazioni

$$\begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \\ z - z_0 = ct \end{cases} \tag{2}$$

Quindi le coordinate del generico punto P sono espresse con le **equazioni parametriche della retta**

$$\boxed{\begin{array}{c} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{array}} \tag{3}$$

Possiamo considerare una situazione più generale, di un generico punto P le cui coordinate sono funzioni assegnate di un parametro t:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{4}$$

Al variare del parametro t nel dominio di definizione di queste funzioni, il punto P descrive una **curva** nello spazio. Le (4) sono appunto le **equazioni parametriche** della curva. Intrepretato t come "tempo", le (4) rappresentano il "moto" del punto P. Possiamo anche interpretare le funzioni (4) come componenti del **vettore posizione** del punto P rispetto all'origine O: $\mathbf{r} = OP$. Abbiamo dunque la rappresentazione di una curva (o di un moto) come **funzione vettoriale**, più precisamente come **vettore dipendente da un parametro**,

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{bmatrix} \tag{5}$$

Ha senso considerare il limite del rapporto incrementale di questa funzione,

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \tag{6}$$

che, se esiste ed è finito, chiamiamo **derivata del vettore** $\mathbf{r}(t)$. Siccome il vettore differenza che compare a numeratore del rapporto incrementale congiunge il punto $P(t)$ (tale che $OP(t) = \mathbf{r}(t)$) al punto $P(t+h)$, entrambi sulla curva, al limite la retta da questi determinata tende alla tangente alla curva nel punto $P(t)$. Pertanto:

• *Il vettore* $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ *è in ogni punto (cioè per ogni valore del parametro) tangente alla curva.*

Interpretate le (5) come equazioni di moto di un punto, il vettore $\mathbf{v}(t)$ rappresenta il **vettore velocità istantanea** di questo punto. Le sue componenti sono date dalle derivate delle funzioni(4):

$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Si osservi che nel caso delle equazioni parametriche di una retta (3) questo vettore è dato proprio da $\mathbf{v} = [a, b, c]$. Si tratta di un vettore costante. Infatti le (3), interpretate come equazioni di moto, rappresentano un **moto rettilineo uniforme** (cioè a velocità vettoriale costante).

Se si procede ad un'ulteriore derivazione (ammesso che questa derivata seconda esista) si ottiene il **vettore accelerazione istantanea**

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \tag{8}$$

le cui componenti sono le derivate seconde delle funzioni (4):

$$\mathbf{a}(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Si osservi che nel caso di equazioni del tipo (3) (moto rettilineo uniforme) si ha $\mathbf{a} = 0$.

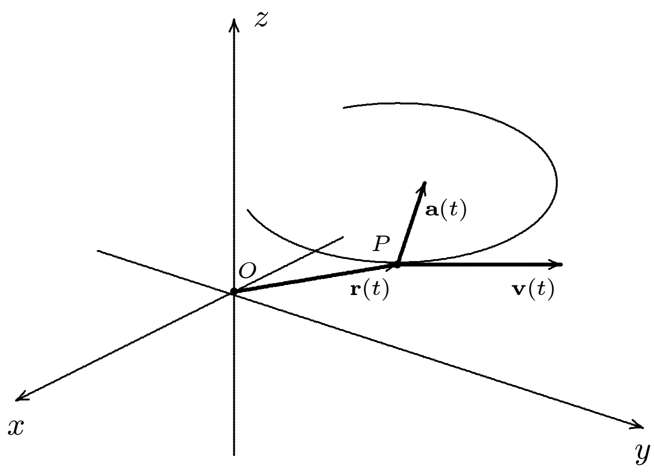


Fig. 5.13 - Vettori posizione, velocità e accelerazione.

In genere, i vettori velocità e accelerazione si pensano applicati nel punto P.

$\boxed{\text{E}}$ Equazioni parametriche del tipo

$$\mathbf{r}(t) : \begin{cases} x = r \, \cos \omega t \\ y = r \, \sin \omega t \\ z = 0 \end{cases} \tag{10}$$

con r e ω costanti positive, rappresentano un **moto circolare uniforme**: la curva rappresentata è la circonferenza sul piano (x, y) ci centro l'origine e raggio r. Infatti dalle (10) si ricava l'equazione $x^2 + y^2 = r^2$. Il vettore velocità è dato da

$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} -\, r\omega \sin \omega t \\ r\omega \cos \omega t \\ 0 \end{bmatrix}$$

il cui modulo è costante

$$|\mathbf{v}| = r\omega.$$

Il numero ω rappresenta la **velocità angolare**. L'accelerazione è data da

$$\mathbf{a}(t) = \begin{bmatrix} -\, r\omega^2 \cos \omega t \\ -\, r\omega^2 \sin \omega t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dal confronto con le (10) Si riconosce che

$$\mathbf{a} = \, -\, \omega^2 \mathbf{r},$$

cioè che l'accelerazione è costante in modulo, pari a $\omega^2 r$, ed è diretta e orientata verso il centro.

$\boxed{\text{E}}$ Ripetere le considerazioni precedenti per le curve di equazioni

$$\mathbf{r}(t) : \begin{cases} x = a \, \cos \omega t \\ y = b \, \sin \omega t \\ z = 0 \end{cases} \tag{11}$$

e

$$\mathbf{r}(t) : \begin{cases} x = r \, \cos \omega t \\ y = r \, \sin \omega t \\ z = kt, \end{cases} \tag{12}$$

con a, b, r e k costanti positive. Nel primo caso la curva è una **ellisse** (di semiassi a e b), nel secondo un'**elica circolare**, di raggio r (il moto corrispondente è la composizione di un moto circolare uniforme sul piano (x, y) e di un moto rettlineo uniforme lungo l'asse z).

$\boxed{\text{E}}$ Dimostrare che per la derivata del prodotto scalare e del prodotto vettoriale di due vettori dipendenti da un parametro vale la regola di Leibniz:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \qquad \frac{d}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

$\boxed{\text{E}}$ Dimostrare che la derivata di un vettore di modulo costante è ovunque ortogonale al vettore.

***

Esercizi di calcolo vettoriale.

1.- Dati i vettori $\mathbf{u} = [1, 2, 3]$ e $\mathbf{v} = [-1, 0, 2]$, calcolare:

(1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \dots$

(2) $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \dots$

(3) $|\mathbf{u}| = \dots$

(4) $|\mathbf{v}| = \dots$

(5) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \dots$

(6) $\cos\theta = \dots$

(7) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \dots$

(8) $\sin\theta = \dots$

(10) area del triangolo da essi formato quando applicati in un medesimo punto $= \dots.$

2.- Dati i due vettori $\mathbf{u} = [-1, -1, -1]$ e $\mathbf{v} = [2, 0, 2]$, determinare un terzo vettore ortogonale ad entrambi.

3.- Calcolare l'area del triangolo di vertici (A, B, C) con

$$\begin{array}{lll} A = (1, 0, 1), & B = (0, 1, 1), & C = (1, 1, -1), \\ A = (2, 2, 0), & B = (-1, 0, 2), & C = (0, 4, 3). \end{array}$$

4.- Sul piano (x, y) calcolare l'area del triangolo di vertici $A = (-1, -1)$, $B = (1, 3)$, $C = (4, 0)$.

5.- Calcolare l'angolo compreso tra la diagonale di un cubo e gli spigoli.

6.- Calcolare la componente del vettore $\mathbf{v} = [2, -1, 3]$ secondo il vettore $\mathbf{u} = [4, -1, 2]$.

7.- Dire se i vettori $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ sono linearmente indipendenti:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = [1, 1, 0] \\ \mathbf{v} = [1, 1, 1] \\ \mathbf{w} = [0, 1, -1] \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{u} = [0, 1, 1] \\ \mathbf{v} = [0, 2, 1] \\ \mathbf{w} = [1, 5, 3] \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{u} = [1, 2, -2] \\ \mathbf{v} = [2, -3, 1] \\ \mathbf{w} = [0, 1, 2] \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{u} = [2, 1, -1] \\ \mathbf{v} = [5, 7, 1] \\ \mathbf{w} = [3, 6, 2] \end{cases}$$

Calcolare il volume del tetraedro da essi formato quando applicati in un medesimo punto.

8.- Calcolare il volume del tetraedro di vertici i punti $A = (0, 1, 1)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (3, -2, 0)$ e $D = (-2, -2, -2)$.

9.- Scrivere l'equazione del piano ortogonale al vettore $\mathbf{v}$ e passante per il punto P_0:

(1) $\mathbf{v} = (1, -1, 3), \quad P_0 = (4, 2, -1)$

(2) $\mathbf{v} = (-2, 3, -1), \quad P_0 = (2, 0, -1/2),$

(3) $\mathbf{v} = (-1, 0, 5), \quad P_0 = (0, 0, 1).$

10.- Scrivere l'equazione del piano passante per i tre punti:

(1) $P_1 = (2, 1, 1), \quad P_2 = (3, -1, 1), \quad P_3 = (4, -1, 1),$

(2) $P_1 = (-2, 3, 1), \quad P_2 = (2, 2, 3), \quad P_3 = (-4, -1, 1).$

11.- Trovare un vettore parallelo alla retta d'intersezione dei piani

(1) $2x - y + z = 1, \qquad 3x + y + z = 2$

(2) $2x + y - 5z - 2 = 0, \qquad 3x - 2y + z - 3 = 0.$

12.- Scrivere le equazioni parametriche delle rette passanti per i due punti:

(1) $P_1 = (1, 1, -1)$ e $P_2 = (-2, 1, 3)$,

(2) $P_1 = (-1, 5, 2)$ e $P_2 = (3, -4, 1)$.

13.- Determinare i vettori velocità e accelerazione delle curve seguenti.

(1) $(e^t, \cos t, \sin t)$

(2) $(\sin 2t, \log(1 + t), t)$

(3) Nel piano: $(\cos t, \sin t), \quad (\cos t, \sin 2t), \quad (\cos t, \sin 3t).$

Capitolo 6

Le funzioni a più variabili

6.1 - Funzioni a più variabili. Denotiamo con $\mathbb{R}^n$, dove n è un numero intero positivo, l'insieme delle n-ple di numeri reali $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_i)$. Una **funzione** di n variabili è una legge (una regola, una formula) che produce un numero $y \in \mathbb{R}$ per ogni valore assegnato alla n-pla $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. La si denota genericamente con

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\mathbf{x}). \tag{1}$$

Una tale funzione si dice, più precisamente, **funzione reale** (o **a valori reali**) **nelle** n **variabili reali** $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Queste ultime si dicono **variabili indipendenti**, mentre la y si dice **variabile dipendente**. Nel caso $n = 1$ ritroviamo il concetto di funzione ad una variabile $y = f(x)$, studiato nella parte A del corso.

Insieme alla legge (1) va anche specificato il **dominio** della funzione, cioè il sottinsieme $D \subseteq \mathbb{R}^n$ dove si intende considerare le variabili indipendenti. Se il dominio D non è specificato, s'intende che esso è tutto l'insieme dove la legge $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è ben definita, cioè il **campo** o **dominio di esistenza** della funzione. L'insieme di tutti i valori assunti da una funzione a n variabili prende il nome di **immagine** o **insieme immagine** della funzione: si tratta di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ (eventualmente tutto $\mathbb{R}$).

In questo corso, per semplicità, verranno quasi sempre considerate funzioni a 2 variabili $(x_1, x_2) = (x, y)$. Denoteremo pertanto una generica funzione a due variabili con

$$z = f(x, y). \tag{2}$$

Le coppie di valori delle due variabili (x, y) individuano punti nel piano riferito a coordinate cartesiane (x, y). Il dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ di una tale funzione è quindi un sottinsieme del piano.

$\boxed{\text{E}}$ L'area z di un rettangolo di base x ed altezza y è esprimibile con la funzione

$$z = f(x, y) = xy \tag{3}$$

il cui campo di esistenza D_{es} coincide con tutto il piano $\mathbb{R}^2$. Tuttavia in questo caso ha senso considerare come dominio D il solo primo quadrante, dove $x > 0$ e $y > 0$. Quindi $D = \mathbb{R}^2_+$.

$\boxed{\text{E}}$ La pressione p di un gas di Van der Waals è esprimibile come funzione della temperatura assoluta T e del volume V secondo la formula

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2},$$

dove (a, b, R) sono costanti fisiche positive prefissate. In questo caso la variabile dipendente è $z = p$, quelle indipendenti sono $x = T$ e $y = V$, e la funzione in questione si esprime, con queste notazioni, con la formula

$$z = \frac{Rx}{y-b} - \frac{a}{y^2}, \tag{4}$$

Il suo dominio di esistenza D_{es} è

$$D_{es} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq b,\ y \neq 0\}.$$

Tuttavia questa funzione ha senso fisico soltanto per valori positivi del volume $V = y$ e della temperatura assoluta $T = x$, per cui il suo dominio deve intendersi

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq b,\ y > 0,\ x > 0\}.$$

6.2 - Rappresentazione grafica delle funzioni a due variabili. Per le funzioni a due variabili si può dare una **rappresentazione grafica**, detta anche **rappresentazione topografica**, nello spazio tridimensionale euclideo, riferito ad una terna di assi cartesiani (x, y, z) con origine in un punto O. Il **grafico** di una funzione $z = f(x, y)$ è costituito da quei punti $P = (x, y, z)$ aventi come prime due coordinate i valori di $(x, y) \in D$ e come terza coordinata il valore $z = f(x, y)$. In genere (cioè per funzioni non troppo complicate) il grafico è una superficie, detta **superficie topografica**, nello spazio tridimensionale che si proietta sopra il dominio D del piano (x, y). Questa superficie ha la proprietà di incontrare in un solo punto le parallele all'asse z uscenti dai punti di D.

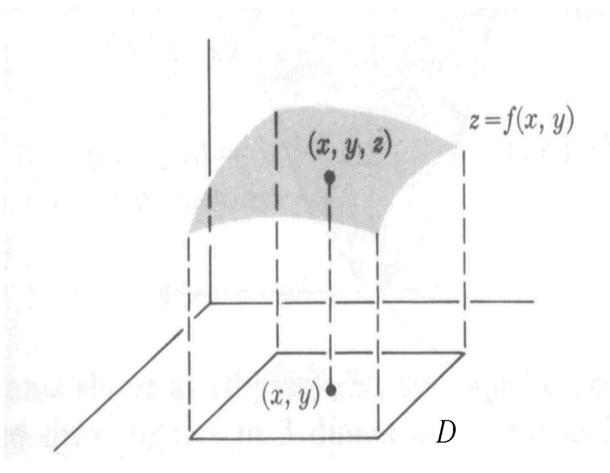


Fig. 6.1 - Grafico di una funzione.

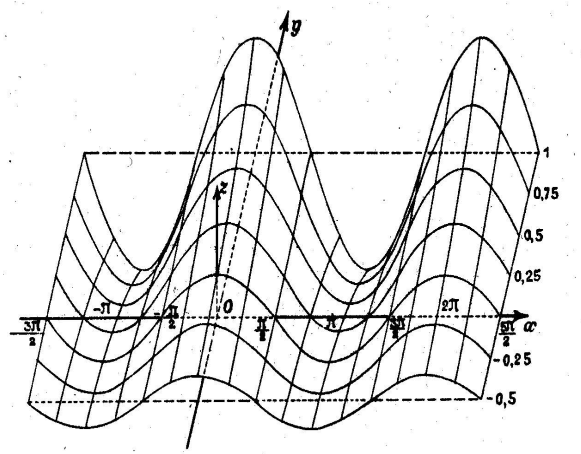


Fig. 6.2 - Rappresentazione topografica della funzione $z = e^y \cos x$.

Si può anche rappresentare una funzione a due variabili rimanendo nel piano (x, y), mediante le sue **linee** o **curve di livello**. Queste sono le proiezioni sul piano (x, y) delle intersezioni della superficie topografica con piani ortogonali all'asse z (detti **piani di livello**, e sono quindi le curve definite dalle equazioni del tipo

$$f(x, y) = c$$

dove c è una costante. Ogni curva è contrassegnata con il valore della corrispondente costante c. L'insieme delle curve che così si generano prende anche il nome di **abaco cartesiano** della funzione. La Fig. 6.3 mostra il legame tra il grafico di una generica funzione e le sue curve di livello. L'analogia con i plastici topografici e le curve altimetriche è evidente: la z rappresenta l'altitudine di un punto di coordinate (x, y).

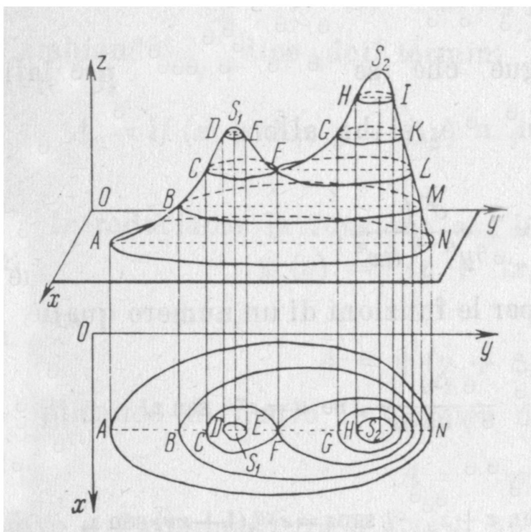


Fig. 6.3 - Grafico e curve di livello.

Per qualche valore di questa costante la curva di livello può degenerare in un punto, in un insieme di punti "isolati", in una curva con più "rami", oppure nell'insieme vuoto.

$\boxed{\text{E}}$ La funzione $z = x^2 + y^2$ ha come grafico un paraboloide di rotazione intorno all'asse z. Le curve di livello hanno equazione $x^2 + y^2 = c$ e sono delle circonferenze concentriche di centro l'origine e raggio $\sqrt{c}$.

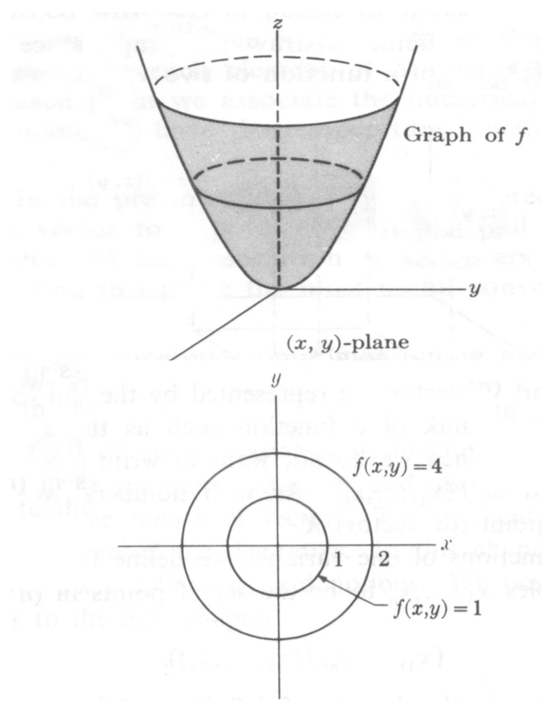


Fig. 6.4 - Grafico e curve di livello della funzione $z = x^2 + y^2$.

$\boxed{\text{E}}$ La funzione (3) di §6.1, $z = xy$, viene rappresentata da un insieme di iperboli equilatere di equazione $xy = c$. La Fig. 6.5 riporta le curve di livello solo nel dominio del primo quadrante (valori non negativi di x e y).

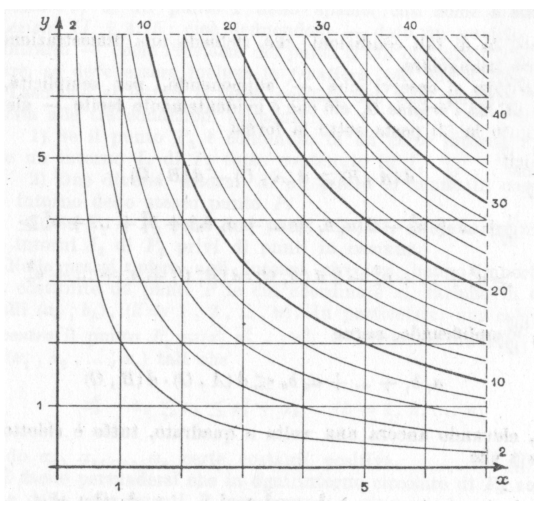


Fig. 6.5 - Curve di livello di $z = xy$.

6.3 - Geometria analitica nel piano. La geometria analitica studia le proprietà geometriche delle figure attraverso le proprietà algebrico-analitiche delle equazioni (o disequazioni) che le rappresentano. Un'equazione del tipo

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

con a primo membro una funzione a due variabili $F(x, y)$, rappresenta un insieme di punti (o "luogo geometrico") del piano riferito a coordinate cartesiane (x, y): stanno in quest'insieme tutti e soli i punti le cui coordinate soddisfano l'equazione.

L'insieme rappresentato da un'equazione del tipo (1) è in genere una **curva**, ma potrebbe anche essere costituito da più curve, da punti "isolati", o addirittura essere l'insieme vuoto.

Esempi:

$$\begin{array}{ll} x^2 + y^2 - 1 = 0, & \text{circonferenza di raggio 1 e centro l'origine,} \\ x^2 + y^2 = 0, & \text{l'origine,} \\ x^2 + y^2 + 1 = 0, & \text{insieme vuoto,} \\ x^2 - y^2 = 0, & \text{le due rette bisettrici dei quadranti.} \end{array}$$

L'equazione (1) rappresenta una retta se la funzione F è un polinomio di primo grado, cioè del tipo

$$F(x, y) = ax + by + c$$

con (a, b, c) numeri reali, una **conica** (ellisse, iperbole, parabola) se F è un polinomio di secondo grado (con certe condizioni sui coefficienti). Nel caso di una curva di livello c di una funzione $f(x, y)$ è

$$F(x, y) = f(x, y) - c.$$

Le seguenti osservazioni sono fondamentali:

• La moltiplicazione di un'equazione per un numero (diverso da 0) non cambia l'insieme di punti rappresentato.

• Se gli insiemi (o curve) A e B sono rappresentati rispettivamente dalle equazioni $F(x, y) = 0$ e $G(x, y) = 0$ allora l'**equazione prodotto**

$$F(x, y)\, G(x, y) = 0 \tag{2}$$

rappresenta l'insieme **unione** $A \cup B$. Infatti i punti che soddisfano anche ad una sola delle due equazioni soddisfano alla (2); viceversa, un punto che soddisfa alla (2) annulla o la F o la G e quindi sta in almeno uno dei due insiemi.

• Il sistema di equazioni

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ G(x, y) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

rappresenta invece l'insieme **intersezione** $A \cap B$. Infatti, i punti di intersezione stanno in entrambi gli insiemi e hanno quindi coordinate che soddisfano contemporaneamente a entrambe le equazioni. Dunque il problema della ricerca delle soluzioni di sistemi di equazioni in due variabili (x, y) può interpretarsi *geometricamente* come ricerca delle intersezioni di curve piane.

$\boxed{\text{E}}$ L'equazione

$$x^2 - y^2 = 0$$

rappresenta le rette bisettrici dei quadranti perché equivale all'equazione prodotto

$$(x - y)(x + y) = 0$$

e ciascuna delle due equazioni $x - y = 0$, $x + y = 0$ rappresenta appunto una bisettrice.

$\boxed{\text{E}}$ Un sistema di equazioni del tipo

$$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0, \end{cases}$$

dove $(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$ sono numeri reali, ha al massimo due soluzioni reali. Infatti la prima equazione rappresenta una retta e la seconda una circonferenza (se $\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma > 0$) e sappiamo che una retta ed una circonferenza hanno due punti d'intersezione (se sono secanti), o uno (se sono tangenti) o nessuno. L'assenza di soluzioni reali si ha anche nel caso in cui $\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma < 0$, perché la seconda equazione non è soddisfatta da nessuna coppia di numeri reali.

6.4 - Continuità. Anche per le funzioni a due variabili si definisce la nozione di **continuità**, che intuitivamente si traduce nel fatto che il corrispondente diagramma è una superficie senza "lacerazioni". Si parla pertanto di "continuità superficiale". Per questa definizione si deve ricorrere al concetto di intorno di un punto del piano. Un **intorno circolare aperto** di un punto P_0 del piano $\mathbb{R}^2$ (nel caso di più di due variabili si parlerà di "intorno sferico") è semplicemente un disco di raggio qualsiasi e centro P_0 esclusa la circonferenza che lo delimita. Un insieme A del piano si dice **aperto** se per ogni punto $P \in A$ esiste un intorno circolare aperto di centro P tutto contenuto in A. Un insieme si dice invece **chiuso** se è il complementare di un insieme aperto. Un **intorno** di un punto del piano è semplicemente un aperto contenente P. Nelle considerazioni che qui facciamo non è tuttavia restrittivo intendere come intorno di un punto un intorno circolare, così come non era restrittivo intendere come intorno di un punto sulla retta reale un intervallo aperto (cioè esclusi gli estremi) contenente quel punto. Si dà allora la seguente definizione:

- Una funzione $z = f(x, y)$ si dice **continua in un punto** $P_0 = (x_0, y_0)$ del suo dominio di definizione D se comunque si fissi un intorno I del numero $z_0 = f(x_0, y_0)$ esiste un intorno A di P_0 tale che i valori che la funzione assume in A sono tutti contenuti in I. Una funzione si dice **continua** se è continua in tutti i punti del suo dominio di definizione.

La verifica della continuità di una funzione a due (o più) variabili è più delicata e complessa di quanto possa apparire a prima vista. Osserviamo a questo proposito che, preso un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ del dominio D di definizione, possiamo considerare una curva piana, di equazioni parametriche $\big(x(t), y(t)\big)$, tutta contenuta in D e passante per il punto P_0 per il valore $t = t_0$ del parametro, cioè tale che $(x_0, y_0) = \big(x(t_0), y(t_0)\big)$. Sostituendo le suddette equazioni parametriche nell'espressione di $f(x, y)$, si ottiene una funzione nella sola variabile t, che denotiamo per semplicità con $f(t)$,

$$f(t) = f\big(x(t), y(t)\big),$$

e che rappresenta la funzione $f(x, y)$ calcolata lungo la curva. In genere il limite di questa funzione per $t \to t_0$ dipende dalla curva scelta, cioè dal modo con cui ci avviciniamo al punto P_0. Si dimostra che

- *La funzione $f(x, y)$ è continua nel punto P_0 se e solo se questo limite non dipende dalla curva scelta ed è uguale al valore della funzione in P_0, cioè se*

$$\lim_{t \to t_0} f\big(x(t), y(t)\big) = f(x_0, y_0) \tag{†}$$

per ogni curva passante per P_0 per $t = t_0$.

Si noti bene che:

(i) Per verificare la continuità in P_0 non è sufficiente verificare la (†) considerando solo rette passanti per il punto, cioè solo equazioni parametriche del tipo $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$ (in questo caso $t_0 = 0$) e quindi verificare che il limite per $t \to 0$ della funzione

$$f(t) = f\big(x_0 + at, y_0 + bt\big)$$

esiste per ogni (a, b) ed è sempre uguale a $f(x_0, y_0)$.

(ii) Per verificare la **non continuità** in P_0 è invece sufficiente verificare che il suddetto limuite o non esiste per qualche retta di avvicinamento o che risulta diverso per almeno due rette.

$\boxed{\text{E}}$ Dimostriamo che la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}, & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{per } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

non è continua nell'origine. Sostituendo le equazioni parametriche $x = at$, $y = bt$, si ottine la funzione costante

$$f(t) = \frac{a^2 b^2}{a^4 + b^4}.$$

Il suo limite per $t \to 0$ è ovviamente uguale a questa costante e dipende quindi dai valori di (a, b): la funzione non è continua.

$\boxed{\text{E}}$ Esaminiamo il comportamento nell'origine della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 - y^2}, & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{per } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Essa è continua su tutte le rette passanti per l'origine. Risulta infatti in questo caso

$$f(t) = \frac{a^2 bt}{a^4 t^2 - b^2},$$

ed il limite di questa funzione per $t \to 0$ è sempre 0, qualunque siano (a, b). Però la funzione $f(x, y)$ non è continua superficialmente. Per riconoscerlo basta avvicinarsi all'origine con la curva di equazione

$$y = x^2 \sin \frac{1}{x},$$

osservando che il limite di questa funzione per $x \to 0$ è 0. Questa volta le equazioni parametriche sono $x = t$ e $y = t^2 \sin \frac{1}{t}$, per cui con la sostituzione in $f(x, y)$ si ottiene

$$f(t) = \frac{\sin \frac{1}{t}}{\cos^2 \frac{1}{t}}.$$

Per $t \to 0$ questa funzione non tende ad alcun limite.

A parte queste considerazioni, si dimostra che le funzioni polinomiali, razionali (frazioni di polinomi), irrazionali (contenenti radici), e le funzioni che risultano dalla composizione di funzioni continue (anche in una variabile), quindi in sostanza tutte le funzioni che si incontrano nelle ordinarie applicazioni alla fisica e alla chimica, sono continue in tutti i punti del loro dominio di esistenza.

6.5 - Derivate parziali. Data una funzione $z = f(x, y)$, si può pensare di tener fissa la variabile y (considerandola quindi come una costante) e di derivare la funzione $f(x, y)$ come funzione della sola variabile x. Si ottiene il questo modo (ammesso che esista) la **derivata parziale di $f(x, y)$ rispetto a x**. La si denota in vari modi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad f'_x, \qquad D_x f, \qquad D_1 f.$$

Analoga operazione si può fare considerando x costante; si ottiene la derivata parziale rispetto a y, denotata con

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad f'_y, \qquad D_y f, \qquad D_2 f.$$

Per esempio, le due derivate parziali della funzione $z = f(x, y) = \sin(3x + y^2)$ sono rispettivamente

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = 3 \cos(3x + y^2), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = 2\, y \cos(3x + y^2).$$

Va osservato che le derivate parziali sono ancora funzioni delle due variabili (x, y), per cui ha senso procedere ad ulteriori derivazioni. Si giunge così (ammesso che esistano) alle **derivate parziali seconde** che si denotano con

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

oppure con

$$f''_{xx}, \quad f''_{xy}, \quad f''_{yx}, \quad f''_{yy},$$

$$D^2_{xx}f, \quad D^2_{xy}f, \quad D^2_{yx}f, \quad D^2_{yy}f.$$

Nell'esempio considerato abbiamo

$$\begin{cases} f''_{xx} = \; -9 \sin(3x + y^2), \\ f''_{xy} = \; -6\, y \sin(3x + y^2), \\ f''_{yx} = \; -6\, y \sin(3x + y^2), \\ f''_{yy} = 2 \cos(3x + y^2) - 4\, y^2 \sin(3x + y^2). \end{cases}$$

Si osserva da quest'esempio che le due **derivate parziali miste** f''_{xy} e f''_{yx} coincidono. Non si tratta di un caso particolare ma di una *notevole proprietà generale*, valida sotto certe ipotesi sulla funzione e sulle sue derivate prime e seconde, di solito soddisfatte nelle normali applicazioni (per esempio l'esistenza e la continuità delle derivate seconde). Questa proprietà va sotto il nome di **teorema d'inversione dell'ordine delle derivazioni** o di **teorema di Schwarz**:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

L'operazione di derivata parziale si può reiterare ottenendo, se esistono, derivate parziali terze, quarte, ecc. Vale ancora per le derivate miste e subordinatamente alle ipotesi accennate, il teorema d'inversione dell'ordine delle derivazioni, il quale allora va interpretato con il fatto che gli operatori di derivata parziale

$$\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial y},$$

commutano, possono cioè applicarsi in ordine qualsiasi.

A differenza di quanto accade per le funzioni ad una sola variabile, la derivabilità di una funzione a più variabili (cioè l'esistenza di tutte le sue derivate parziali prime) non assicura la continuità. Questo però accade se tutte le derivate parziali sono continue. In questo caso si dice che la funzione è **differenziabile** o anche che è di classe C^1. Più in generale si dice che una funzione a più variabili è di classe C^k se ammette derivate parziali continue fino all'ordine k compreso. Una funzione continua è anche detta di classe C^0. L'essere **di classe** C^k implica essere di classe C^h per qualsiasi $h < k$, quindi anche C^0. Nel seguito supporremo tacitamente che tutte le funzioni considerate siano di classe C^1 o di classe sufficientemente elevata in modo da garantire la validità delle formule scritte.

6.6 - Derivata totale. Data una funzione $z = f(x, y)$, si consideri il caso in cui le variabili (x, y) sono a loro volta funzioni di un'unica variabile indipendente t:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \tag{1}$$

Si genera di conseguenza una funzione della variabile t,

$$z = f\big(x(t), y(t)\big),$$

che chiamiamo **funzione composta** della f e denotiamo semplicemente con $f(t)$. Le funzioni (1) possono interpretarsi come equazioni parametriche di una curva sul piano (x, y). La funzione composta $f(t)$ è dunque la funzione $f(x, y)$ *calcolata lungo la curva.*

Se si vuole calcolare la derivata di $f(t)$ si possono applicare le regole per la derivazione delle funzioni ad una variabile. Questa derivata si può tuttavia calcolare attraverso la **formula della derivata totale** o della **derivata di una funzione composta**:

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}} \tag{2}$$

dove nelle derivate parziali, funzioni a loro volta di (x, y), si devono pensare sostituite le funzioni (1). La funzione df/dt così ottenuta prende il nome di **derivata totale** della funzione f. L'estensione di questa formula al caso di più di due variabili è immediata. Come si vede, si tratta della somma dei prodotti delle singole derivate parziali prime per le corrispondenti derivate (ordinarie) delle funzioni parametriche (1).

$\boxed{!}$ Seguendo l'analogia, messa in evidenza dalla Fig. 6.2, tra la rappresentazione grafica di una funzione e le carte topografiche (dove la funzione $z = f(x, y)$ è l'altitudine), osserviamo che le equazioni parametriche (1) rappresentano il moto di un punto lungo una strada tracciata sulla carta topografica (vista dall'alto, cioè nel piano (x, y)) e quindi la funzione composta $f(t)$ rappresenta l'altitudine al tempo t del punto mobile. Di conseguenza, la derivata totale df/dt rappresenta la "velocità ascensionale" del punto. Questa derivata, divisa per il modulo della "velocità orizzontale"

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2},$$

rappresenta la "pendenza" della strada.

$\boxed{\text{E}}$ Se $z = f(x, y) = xy^2$ e se $x = \cos(\omega t)$, $y = \sin(\omega t)$, allora la funzione composta è

$$f(t) = \cos(\omega t)\ \sin^2(\omega t). \tag{3}$$

La sua derivata si può calcolare o direttamente, applicando le regole di derivazione delle funzioni ad una sola variabile alla $f(t)$ espressa dalla (3), o attraverso la formula (2). Seguendo il primo metodo si ha

$$\begin{aligned} f'(t) &= \big(\cos(\omega t)\big)' \sin^2(\omega t) + \cos(\omega t)\,\big(\sin^2(\omega t)\big)' \\ &= -\,\omega \sin(\omega t) \cdot (\sin^2 \omega t) + \cos(\omega t) \cdot 2\omega \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) \\ &= -\,\omega\, \sin^3(\omega t) + 2\omega\, \cos^2(\omega t) \cdot \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Nel seguire il secondo metodo si osserva innanzitutto che

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy,$$

e che
$$\frac{dx}{dt} = -\,\omega\,\sin\omega t, \qquad \frac{dy}{dt} = \omega\,\cos\omega t,$$
per cui, applicando la (2),
$$\frac{df}{dt} = -\,\omega\,y^2(t)\,\sin(\omega t) + 2\omega x(t)y(t)\,\cos(\omega t) = -\,\omega\,\sin^3(\omega t) + 2\omega\,\cos^2(\omega t)\,\sin\omega t.$$

6.7 - Gradiente. Le derivate parziali di una funzione f possono interpretarsi come componenti di un vettore, detto **gradiente di** f, denotato con grad(f) o con ∇f (si legge "nabla" di f). Si pone cioè
$$\nabla f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j}. \tag{1}$$
Si tratta più precisamente di un **campo vettoriale**: con questo termine s'intende una legge che assegna ad ogni punto P di coordinate (x, y) un ben determinato vettore applicato in P. Si osservi infatti che per ogni valore che possiamo assegnare alle variabili (x, y) la (1) fornisce un un vettore, che possiamo considerare applicato nel punto P avente queste coordinate.

Con queste posizioni si osserva che il secondo membro della formula della derivata totale può interpretarsi come prodotto scalare della velocità
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{bmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{bmatrix}$$
per il gradiente di f. La formula (2) di §6.6 si può dunque scrivere:
$$\boxed{\frac{df}{dt} = \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}} \tag{2}$$

6.8 - Derivata direzionale. Data la funzione $z = f(x, y)$, se ne considerino i valori lungo una retta nel piano (x, y) passante per un punto fissato $P_0 = (x_0, y_0)$ e parallela al vettore $\mathbf{v} = [a, b]$, dunque di equazione
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_0 + at \\ y_0 + bt \end{bmatrix}.$$
La derivata della corrispondente funzione composta, per il valore $t = 0$ del parametro (istante iniziale), risulta essere
$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0} = \nabla f|_{P_0} \cdot \mathbf{v} = a\,\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} + b\,\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}, \tag{1}$$

dove col simbolo $|_{P_0}$ s'intende che il gradiente ∇f va calcolato nel punto P_0, corrispondente alla posizione del punto P per $t = 0$. Il numero così ottenuto prende il nome di **derivata della funzione f secondo il vettore v nel punto** P_0 e si denota anche con

$$\frac{df}{d\mathbf{v}}.$$

Se in particolare il vettore $\mathbf{v}$ è unitario (un versore), la derivata $df/d\mathbf{v}$ prende il nome di **derivata direzionale della funzione** f. Le componenti (a, b) del versore $\mathbf{v}$, che soddisfano alla condizione $a^2 + b^2 = 1$, prendono il nome di **coseni direttori**. Essi infatti sono uguali ai coseni degli angoli formati da $\mathbf{v}$ con gli assi x e y.

6.9 - Teorema del gradiente. Si consideri una qualunque curva di livello $f(x, y) = c$ ed una sua rappresentazione parametrica vettoriale $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. La funzione composta di $f\big(\mathbf{r}(t)\big)$ è ovviamente costante, perché f è costante su ogni curva di livello. Dunque la sua derivata totale è nulla e per la formula (2) di §6.7 si ha

$$\nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0.$$

Si osservi però che il vettore $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ è tangente alla curva di livello. Allora quest'uguaglianza mostra che il gradiente è ortogonale alla curva stessa. È così dimostrata la prima parte del **teorema del gradiente**:

• *Il gradiente di una funzione $f(x, y)$ è ovunque ortogonale alle curve di livello $f(x, y) = c$ ed è orientato nel verso di f crescente.*

Che il gradiente abbia verso concorde con il crescere della funzione f segue dal fatto che se consideriamo la derivata della f lungo una retta ortogonale ad una qualunque curva di livello e nel verso del gradiente stesso, troviamo, applicando la formula (1) di §6.8, con $\mathbf{v} = \nabla f$,

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0} = \big(\nabla f \cdot \nabla f\big)|_{P_0} = |\nabla f|^2_{P_0} \geq 0.$$

Questo mostra che la derivata lungo questa retta, nel verso del gradiente, è positiva o nulla, quindi che la funzione composta $f(t)$ non è decrescente.

Va inoltre osservato che il modulo del gradiente (la "lunghezza" del vettore) ∇f è tanto più grande quanto più "fitte" sono le curve di livello della funzione.

$\boxed{\text{E}}$ Si considerino per esempio le due funzioni $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ e $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ed i loro gradienti:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} x \\ \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{x}, \qquad \nabla g = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}.$$

Si ha rispettivamente,

$$|\nabla f| = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad |\nabla g| = 1.$$

Entrambi questi gradienti determinano un campo vettoriale **radiale** (in ogni punto la retta di applicazione del gradiente passa per l'origine) e orientato in opposizione all'origine. Nel primo caso il gradiente in un punto P è uguale al vettore OP trasportato e applicato in P. Nel secondo, è il **versore radiale** $\mathbf{u} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Per entrambe le funzioni le curve di livello $f(x, y) = c$ e $g(x, y) = c$ sono delle circonferenze centrate nell'origine, di equazione, rispettivamente

$$x^2 + y^2 = 2c, \qquad x^2 + y^2 = c^2.$$

Le prime hanno raggio $\sqrt{2c}$, le seconde raggio c. Pertanto, al crescere della distanza dall'origine e al crescere uniforme di c, le circonferenze si distribuiscono uniformemente nel secondo caso, mentre si infittiscono nel primo.

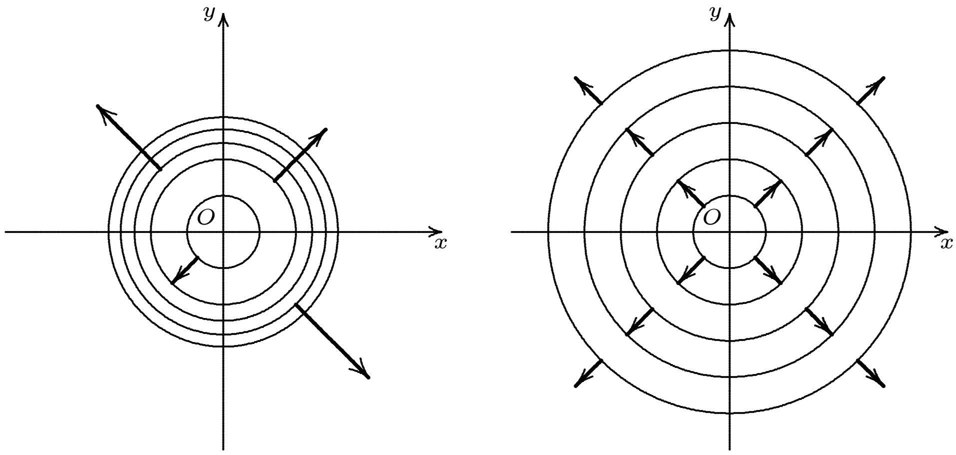


Fig. 6.6 - Gradienti delle funzioni $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ e $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e curve di livello per $c = 1, 2, 3, 4, 5$.

Il teorema del gradiente trova una notevole applicazione in fisica: interpretata la funzione come **potenziale**, il suo gradiente è la **forza** generata da questo potenziale; le curve di livello prendono il nome di **curve equipotenziali** ed il teorema del gradiente afferma che la forza è ovunque ortogonale alle curve equipotenziali.

Tutto questo si estende facilmente al caso di funzioni a tre variabili, quindi a funzioni nello spazio tridimensionale. Anziché di curve di livello o equipotenziali si parlerà di superfici di livello o equipotenziali.

6.10 - Piani tangenti ad una superficie. Se ci poniamo nello spazio tridimensionale di coordinate (x, y, z) osserviamo che un'equazione del tipo

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

dove la F è una funzione a tre variabili, determina (in genere) una superficie: appartengono alla superficie quei punti le cui coordinate soddisfano all'equazione. Un esempio è dato dall'equazione di un piano, dove la funzione F è del tipo

$$F(x, y, z) = ax + by + cz + d.$$

Un altro semplice esempio è quello della sfera di raggio r centrata nell'origine, rappresentata dall'equazione (1) con

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2.$$

In maniera analoga a quanto visto per le funzioni a due variabili, si introduce il vettore (tridimensionale) gradiente della funzione F,

$$\nabla F = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{2}$$

e si osserva che esso è ortogonale alla superficie di equazione (1). Di conseguenza, fissato un qualunque punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ di questa superficie e calcolato in esso il valore del gradiente, il piano tangente sarà composto da quei punti $P = (x, y, z)$ tali che il vettore P_0P è ortogonale al vettore gradiente in P_0, cioè tali che

$$\nabla F|_{P_0} \cdot P_0P = 0.$$

L'equazione del piano tangente in P_0 alla superficie di equazione (1) è dunque

$$\boxed{F'_x|_{P_0}(x - x_0) + F'_y|_{P_0}(y - y_0) + F'_z|_{P_0}(z - z_0) = 0} \tag{3}$$

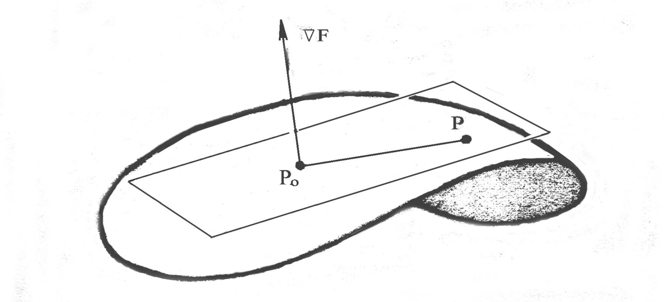


Fig. 6.7 - Piano tangente ad una superficie in un punto P_0.

$\boxed{\text{E}}$ L'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

rappresenta una sfera di raggio 1 centrata nell'origine. In questo caso la funzione F è data da

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

ed il suo gradiente è

$$\nabla F = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}.$$

Consideriamo sulla sfera il punto $P_0 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$. In questo punto si ha

$$\nabla F|_{P_0} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi il piano tangente ha equazione

$$\sqrt{2}(x - 1/\sqrt{2}) + \sqrt{2}(y - 1/\sqrt{2}) = 0,$$

che si semplifica in

$$x + y = \sqrt{2}.$$

Applichiamo ora queste considerazioni al caso del grafico di una funzione $z = f(x, y)$. Esso è rappresentato dall'equazione (1) con

$$F(x, y, z) = z - f(x, y). \tag{4}$$

Di conseguenza

$$\nabla F = \begin{bmatrix} -f'_x \\ -f'_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

e, applicando l'equazione (3), si deduce che:

• *Il piano tangente al grafico di una funzione* $z = f(x, y)$ *in un punto* $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ *ha equazione*

$$(z - z_0) - f'_x|_{P_0}(x - x_0) - f'_y|_{P_0}(y - y_0) = 0 \tag{5}$$

cioè

$$\boxed{z = z_0 + f'_x|_{P_0}(x - x_0) + f'_y|_{P_0}(y - y_0)} \tag{6}$$

Da questa equazione segue che:

• *Il piano tangente al grafico è "orizzontale", cioè parallelo al piano* (x, y)*, se e soltanto se nel punto* P_0 *si annullano entrambe le derivate parziali.*

Infatti in questo caso, e solo in questo caso, l'equazione (6) si riduce a $z = z_0$.

6.11 - Punti critici o stazionari. Data una funzione $z = f(x, y)$, i punti del piano (x, y) in cui si annulla il suo gradiente ∇f, dove si annullano cioè entrambe le derivate parziali, prendono il nome di **punti critici** o **punti stazionari** della funzione. I punti stazionari si determinano risolvendo le equazioni

$$\boxed{\begin{aligned} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{aligned}} \tag{1}$$

Come abbiamo visto alla fine del § precedente, in corrispondenza a questi punti il piano tangente al grafico è orizzontale.

Un punto stazionario $P_* = (x_*, y_*)$ di una funzione a due variabili può essere punto di:

• **massimo locale in senso debole**, se esiste un intorno di P_* dove $f(x, y) \leq f(x_*, y_*)$, dove cioè la funzione assume sempre valori non superiori a quello assunto in P_*;

• **massimo locale in senso forte o stretto**, se esiste un intorno di P_* dove $f(x, y) < f(x_*, y_*)$, valendo l'uguaglianza solo nel punto P_*;

• **minimo locale in senso debole**, se esiste un intorno di P_* dove $f(x, y) \geq f(x_*, y_*)$;

• **minimo locale in senso forte o stretto**, se esiste un intorno di P_* dove $f(x, y) > f(x_*, y_*)$, valendo l'uguaglianza solo nel punto P_*;

• **sella o colle**, in tutti gli altri casi.

Esempi:

[1] Il diagramma di Fig. 6.3 mostra che la funzione rappresentata ha due punti di massimo locale in senso stretto in S_1 e S_2 ed un punto di sella in F. Il punto S_2 è anche punto di **massimo assoluto** o **massimo globale** (almeno per la porzione di funzione rappresentata dal grafico).

[2] La funzione di Fig. 6.4 ha un minimo locale in senso stretto nell'origine, che è anche minimo (assoluto) della funzione.

[3] La funzione $z = x^2$, interpretata come funzione a due variabili (x, y), ha tutto l'asse y costituito da punti di minimo debole.

Per riconoscere il tipo di un punto stazionario, non conoscendo il grafico della funzione, si può procedere col **metodo della separatrice** o col **metodo dell'hessiano**.

6.12 - Il metodo della separatrice. Sia $P_* = (x_*, y_*)$ un punto critico della funzione $z = f(x, y)$ e sia $z_* = f(x_*, y_*)$ il valore assunto dalla f in P_*. Sul piano (x, y) consideriamo la curva di livello di equazione

$$f(x, y) = z_*, \tag{1}$$

che scriviamo anche sotto la forma

$$f_*(x, y) = 0, \tag{2}$$

introdotta la funzione (nulla nel punto critico)

$$f_*(x, y) = f(x, y) - z_* = f(x, y) - f(x_*, y_*). \tag{3}$$

Questa curva, che contiene ovviamente il punto critico P_* e che chiamiamo **separatrice**, puó anche ridursi al solo punto critico oppure essere costituita da più <u>rami</u>. In ogni caso, la separatrice divide l'intorno di P_* in zone in cui $f(x, y) > z_*$, cioè $f_* > 0$, <u>zone positive</u> (che possiamo "ombreggiare") da altre in cui $f(x, y) < z_*$, cioè $f_* < 0$, <u>zone negative</u> (che possiamo lasciare "bianche"). Si comprende allora che in P_* abbiamo un:

[1] massimo stretto, se la separatrice si riduce ad un punto con intorno una zona negativa (bianca);

[2] minimo stretto, se la separatrice si riduce ad un punto con intorno una zona positiva (ombreggiata);

[3] minimo o massimo debole, se, comunque sia la separatrice, l'intorno di P_* è sempre positivo (ombreggiato) o, rispettivamente, sempre negativo (bianco);

[4] punto di sella, se la separatrice è formata da uno o più rami che dividono l'intorno di P_* in zone di tipo diverso.

$\boxed{\text{E}}$ Sia $f(x,y) = (x^2 - ay)(x^2 - by)$ con a e b numeri <u>positivi</u> diversi fra loro: $a \neq b$. Le derivate parziali prime sono

$$\begin{cases} f'_x = 2x\left[2x^2 - (a+b)\,y\right] \\ f'_y = 2ab\,y - (a+b)\,x^2. \end{cases}$$

Uguagliandole a zero si ottiene un sistema di due equazioni algebriche

$$\begin{cases} x\left[2x^2 - (a+b)\,y\right] = 0 \\ 2ab\,y - (a+b)\,x^2 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni danno le coordinate dei punti critici. Ponendo $x = 0$ si ha necessariamente $y = 0$ (perché $ab \neq 0$). Supponendo invece $x \neq 0$ la prima equazione fornisce

$$x^2 = \tfrac{a+b}{2}\,y,$$

mentre la seconda fornisce, in ogni caso,

$$x^2 = \tfrac{2ab}{a+b}\,y.$$

Queste equazioni sono compatibili se e solo se i due coefficienti a secondo membro sono uguali, cioè per $(a+b)^2 = 4ab$, vale a dire per $(a-b)^2 = 0$, ciò che è escluso dall'ipotesi $a \neq b$. Conclusione: l'unica soluzione possibile del sistema è $(x_*, y_*) = (0,0)$: l'origine è il solo punto critico della funzione. Siccome

$$z_* = f(0,0) = 0,$$

la curva separatrice relativa a questo punto critico ha equazione

$$f_*(x,y) \equiv f(x,y) - z_* \equiv f(x,y) \equiv (x^2 - ay)(x^2 - by) = 0.$$

Si tratta di una coppia di parabole $\mathcal{P}_a$ e $\mathcal{P}_b$ di equazione

$$y = \tfrac{1}{a}\,x^2, \qquad y = \tfrac{1}{b}\,x^2$$

rispettivamente. Entrambe hanno vertice nell'origine, come asse l'asse y e sono rivolte verso l'alto (essendo per ipotesi $a, b > 0$). Supposto $a > b$, la parabola $\mathcal{P}_a$ sta al di sotto della $\mathcal{P}_b$. Dobbiamo quindi stabilire il segno della funzione $f_*(x,y) = f(x,y) - z_*$ (che in questo caso coincide con la stessa $f(x,y)$) nelle quattro zone delimitate da queste parabole. Per far questo basta valutare il segno della funzione in un punto qualsiasi di ognuna delle zone. Per esempio in

$$P_1 = (0,-1), \quad P_3 = (0,1), \quad P_2 = (1,c), \quad P_4 = (-1,c),$$

dove

$$c = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{a} + \tfrac{1}{b}\right) = \tfrac{1}{2}\,\tfrac{a+b}{ab}$$

è l'ordinata del punto intermedio ai due punti delle parabole di ascissa 1. Il calcolo mostra che

$$f(0,1) = f(0,-1) = ab > 0, \quad f(-1,c) = f(1,c) = -\frac{(a-b)^2}{ab} < 0,$$

e quindi che le zone a cui appartengono questi punti sono di segno alterno. Dunque il punto critico è una sella.

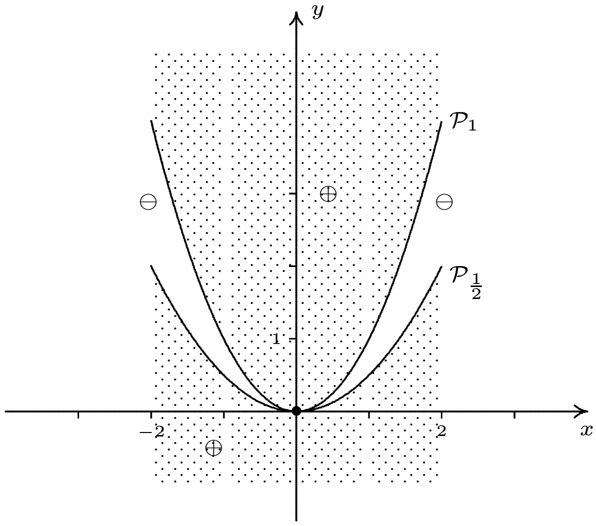


Fig. 6.8 - Separatrici del punto critico $(0,0)$ di $f(x,y) = (x^2 - ay)(x^2 - by)$ nel caso $a = 2$, $b = 1$.

6.13 - Il metodo dell'hessiano. Data una funzione $z = f(x,y)$, diciamo sua **matrice hessiana** la matrice quadrata 2×2 delle sue derivate seconde:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Diciamo invece **hessiano** il determinante di questa matrice

$$H(x,y) = \det \mathbf{H} = f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2, \tag{2}$$

ricordando che $f''_{xy} = f''_{yx}$. Si osservi che l'hessiano è esso stesso una funzione di (x,y). Si può dimostrare che

• *Se in un punto critico $P_* = (x_*, y_*)$ di f l'hessiano è negativo, $H < 0$, allora il punto è una sella. Se invece l'hessiano è positivo, $H > 0$, allora il punto è un massimo o minimo in senso stretto se si ha rispettivamente $f''_{xx} < 0$ o $f''_{xx} > 0$.*

Questo teorema non fornisce indicazioni nel caso in cui $H = 0$ (questo caso viene di solito chiamato caso dubbio; va trattato col metodo della separatrice). Va inoltre osservato che nel caso $H > 0$ si ha

$$f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0,$$

quindi non può essere $f''_{xx} = 0$ o $f''_{yy} = 0$. Di qui segue inoltre che

$$f''_{xx} f''_{yy} > 0,$$

cioè che queste due derivate seconde hanno lo stesso segno. Di conseguenza, le condizioni $f''_{xx} > 0$ o $f''_{xx} < 0$ richieste dal teorema nel caso $H > 0$ possono essere sostituite da $f''_{yy} > 0$ o $f''_{yy} < 0$ rispettivamente.

$\boxed{\text{E}}$ Consideriamo la funzione $f(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + xy$, il cui dominio di definizione è tutto $\mathbb{R}^2$ meno gli assi coordinati. Le sue derivate parziali sono

$$f'_x = -\frac{1}{x^2} + y, \qquad f'_y = \frac{1}{y^2} + x.$$

I punti critici sono determinati quindi dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2} - y = 0, \\ \frac{1}{y^2} + x = 0. \end{cases}$$

Dovendo essere $x \neq 0$ e $y \neq 0$ (altrimenti si esce dal dominio di definizione della funzione) sostituendo la y dalla prima nella seconda, si trova successivamente $x + x^4 = 0$, $x(1 + x^3) = 0$, $1 + x^3 = 0$, quindi $x = -1$. Segue che $y = 1$ e quindi che la funzione ammette un solo punto critico in $P_1 = (-1, 1)$. Le derivate seconde sono

$$f''_{xx} = \frac{2}{x^3}, \quad f''_{xy} = 1, \quad f''_{yy} = -\frac{2}{y^3},$$

quindi la matrice hessiana è

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & -\frac{2}{y^3} \end{bmatrix}$$

e il determinante hessiano

$$H(x, y) = -\left(1 + \frac{4}{(xy)^3}\right).$$

In particolare $H(-1, 1) = 3 > 0$, quindi il punto critico può essere o un massimo o un minimo. Siccome in $(-1, 1)$ è $f''_{xx} = -2 < 0$, il punto critico è un massimo (in senso stretto).

6.14 - La formula di Taylor. La formula di Taylor, che abbiamo visto per una funzione ad una variabile, ammette un'estensione al caso di funzioni a due o più variabili.

Grazie a questa formula è possibile approssimare una funzione mediante un polinomio (a più variabili), conoscendone i valori delle derivate parziali in un punto prefissato.

Sia $f(x, y)$ una funzione a due variabili definita in un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (il caso di una funzione a più di due variabili si tratta allo stesso modo, con ovvie modifiche). Ricordiamo che una funzione è **di classe** C^k (con $k \in \mathbb{N}$) se le sue derivate parziali sono tutte continue fino all'ordine k compreso. Per esempio, una funzione è di classe C^2 se ha derivate parziali prime e seconde continue.

Indichiamo con $f(P)$ il valore della funzione in un punto $P \in D$: è il valore di $f(x, y)$ quando a (x, y) si assegnano i valori delle coordinate del punto P.

Si può dimostrare che:

• *Se $f(x, y)$ è una funzione di classe C^2 in D e se $P_0 = (x_0, y_0)$ è un punto prefissato di D, allora per ogni punto $P = (x, y) \in D$, distinto da P_0 e tale che il segmento P_0P è tutto contenuto in D, esiste un punto $P_* = (x_*, y_*)$ sul segmento P_0P (distinto dagli estremi, vedi Fig. 6.9) per cui sussiste l'uguaglianza*

$$\begin{aligned} f(P) &= f(P_0) + f'_x(P_0)\,(x - x_0) + f'_y(P_0)\,(y - y_0) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\, f''_{xx}(P_*)\,(x - x_0)^2 + f''_{xy}(P_*)\,(x - x_0)(y - y_0) + \tfrac{1}{2}\, f''_{yy}(P_*)\,(y - y_0)^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Questa formula prende il nome di **formula di Taylor di ordine** 1 **nel punto** P_0.

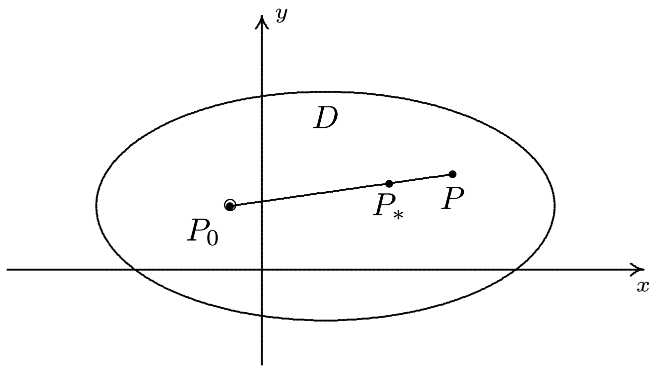


Fig. 6.9

Osserviamo innanzitutto che l'enunciato afferma che un punto P_* che rende valida quest'uguaglianza esiste, sul segmento che va da P_0 al punto P, ma non ci dice dove esso effettivamente sia né ci dà modo di determinarlo. Tuttavia, malgrado quest'indeterminazione, la formula (1) è di una certa utilità. Per riconoscerlo, spezziamola nelle due formule

$$\begin{cases} f(P) = f(P_0) + f'_x(P_0)\,(x - x_0) + f'_y(P_0)\,(y - y_0) + R_1 \\ R_1 = \frac{1}{2}\, f''_{xx}(P_*)\,(x - x_0)^2 + f''_{xy}(P_*)\,(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}\, f''_{yy}(P_*)\,(y - y_0)^2, \end{cases} \tag{2}$$

e osserviamo che l'indeterminazione dovuta al punto P_* compare solo nel termine R_1, che prende il nome di **resto**. Fissato il punto P_0, questo resto dipende da P e P_*, cioè dalle quattro variabili (x, y, x_*, y_*). Qualora fossimo in grado di darne una **stima**, cioè di stabilire un confine superiore del suo valore assoluto, per P e P_* variabili in un intorno di P_0, e qualora tale confine fosse trascurabile, potremmo approssimare la funzione $f(x, y)$, nell'intorno del punto P_0, con il polinomio di primo grado in $(x - x_0)$ e $(y - y_0)$ che compare a primo membro della $(2)_1$:

$$\boxed{f(x, y) \simeq f(P_0) + f'_x(P_0)\,(x - x_0) + f'_y(P_0)\,(y - y_0)} \tag{3}$$

I coefficienti di questo polinomio sono i valori assunti in $P_0 = (x_0, y_0)$ dalla funzione f e dalle sue due derivate parziali prime. Ricordato allora che il grafico della funzione è una superficie di equazione $z = f(x, y)$ nello spazio tridimensionale di coordinate (x, y, z), osserviamo che

• *approssimare la funzione* $f(x, y)$ *con la formula* (3) *equivale ad approssimare il suo grafico con il suo piano tangente nel punto* (x_0, y_0, z_0)*, posto* $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Infatti, l'uguaglianza nella (3) si traduce nell'uguaglianza

$$z = z_0 + f'_x(P_0)\,(x - x_0) + f'_y(P_0)\,(y - y_0), \tag{4}$$

che coincide con l'equazione (6), §6.10, del piano tangente al grafico.

L'approssimazione lineare della funzione fornita dalla formula di Taylor di ordine 1 può essere migliorata utilizzando la **formula di Taylor di ordine 2**, valida nel caso in cui la funzione è (almeno) di classe C^3:

$$\begin{aligned} f(P) =&f(P_0) + f'_x(P_0)\,(x - x_0) + f'_y(P_0)\,(y - y_0) \\ &+ \tfrac{1}{2}\, f''_{xx}(P_0)\,(x - x_0)^2 + f''_{xy}(P_0)\,(x - x_0)(y - y_0) + \tfrac{1}{2}\, f''_{yy}(P_0)\,(y - y_0)^2 \\ &+ R_2, \end{aligned} \tag{5}$$

con il resto R_2 dato da

$$\begin{aligned} R_2 =&\tfrac{1}{3!}\,\big[f'''_{xxx}(P_*)\,(x - x_0)^3 + 3\, f'''_{xxy}(P_*)\,(x - x_0)^2(y - y_0) \\ &+ 3\, f'''_{xyy}(P_*)\,(x - x_0)(y - y_0)^2 + f'''_{yyy}(P_*)\,(y - y_0)^3\big], \end{aligned} \tag{6}$$

dove $P_* = (x_*, y_*)$ è ancora un punto P_* opportuno all'interno del segmento P_0P (diverso, in generale, da quello realtivo alla formula di ordine 1). Se questo resto è trascurabile, la (5) mostra che la funzione è approssimabile con un polinomio di grado 2 nei monomi $x - x_0$ e $y - y_0$,

$$\boxed{\begin{aligned} f(x, y) \simeq&f(P_0) + f'_x(P_0)\,(x - x_0) + f'_y(P_0)\,(y - y_0) + \\ &+ \tfrac{1}{2}\, f''_{xx}(P_0)\,(x - x_0)^2 + f''_{xy}(P_0)\,(x - x_0)(y - y_0) + \tfrac{1}{2}\, f''_{yy}(P_0)\,(y - y_0)^2 \end{aligned}} \tag{7}$$

i cui coefficienti sono forniti dai valori in P_0 della funzione e delle sue derivate parziali prime e seconde.

Si può procedere oltre con l'ordine di approssimazione. Infatti, se la funzione è di classe C^{n+1} almeno, vale una formula di Taylor di ordine n. La si può esprimere in maniera sintetica considerando l'operatore

$$D = h\,D_x + k\,D_y = h\,\frac{\partial}{\partial x} + k\,\frac{\partial}{\partial y}$$

per cui

$$D f = h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y},$$

e le sue potenze formali successive:

$$\begin{aligned} D^2 &= (h\, D_x + k\, D_y)(h\, D_x + k\, D_y) = h^2\, D_{xx} + 2\, h\, k\, D^2_{xy} + k^2\, D^2_{yy} \\ D^3 &= (h\, D_x + k\, D_y)(h\, D_x + k\, D_y)(h\, D_x + k\, D_y) = \dots \end{aligned}$$

ecc. La formula di Taylor di ordine n si scrive allora come sommatoria di queste potenze:

$$f(P) = f(P_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}\, D^i f(P_0) + R_n, \tag{8}$$

dove le derivate parziali vanno calcolate nel punto $P_0 = (x_0, y_0)$ con

$$h = x - x_0, \qquad k = y - y_0.$$

Per il resto R_n sussiste l'espressione

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\, D^n f(P_*), \tag{9}$$

essendo questa volta le derivate parziali calcolate in un punto opportuno $P_* = (x_*, y_*)$ del segmento $P_0 P$.

$\boxed{\text{E}}$ Si verifichi che nel caso $n = 1$ e $n = 2$ si ritrovano le formule di Taylor precedenti.

$\boxed{\text{E}}$ Determinare il polinomio approssimante di grado 2 in $P_0 = (0, 0)$ della funzione

$$f(x, y) = \log(1 + x + 2y).$$

Si ha successivamente:

$$\begin{aligned} & f(P_0) = f(0,0) = 0, \\ & f'_x = \frac{1}{1+x+2y}, \qquad && f'_x(P_0) = f'_x(0,0) = 1, \\ & f'_y = \frac{2}{1+x+2y}, && f'_y(0,0) = 2, \\ & f''_{xx} = \frac{-1}{(1+x+2y)^2}, && f''_{xx}(0,0) = -1, \\ & f''_{xy} = \frac{-2}{(1+x+2y)^2}, && f''_{xy}(0,0) = -2, \\ & f''_{yy} = \frac{-4}{(1+x+2y)^2}, && f''_{yy}(0,0) = -4. \end{aligned}$$

Quindi dalla formula (7) si trova

$$f(x, y) \simeq x + 2y - \tfrac{1}{2}\,(x^2 + 4xy + 4y^2).$$

$\boxed{\text{E}}$ Calcolare il polinomio approssimante di grado 2 per le seguenti funzioni, rispettivamente nei punti $P_0 = (0,0)$, $P_0 = (0,1)$, $P_0 = (1,0)$ e $P_0 = (1,1)$:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \sin(xy), \\
f(x,y) &= \cos(xy), \\
f(x,y) &= \log(1+xy), \\
f(x,y) &= \sin(x^2+y^2), \\
f(x,y) &= e^{x+y}, \\
f(x,y) &= x + xy + 2y^2.
\end{aligned}$$

Si trova, in quest'ultimo caso, che il polinomio "approssimante" coincide, qualunque sia il punto P_0, con la funzione stessa. Infatti, siccome la funzione è essa stessa un polinomio di grado 2, le sue derivate terze sono tutte identicamente nulle, quindi il resto si annulla sempre: $R_2 = 0$

***

Esercizi

[A] Determinare il dominio di definizione delle funzioni $f(x,y) =$:

1. $\sqrt{x^2 - 2x + y}$.
2. $\arcsin(x^2 + y^2 - 3)$.
3. $\dfrac{\log(xy-1)}{x^2+y^2-2x+6y}$.
4. $\log \dfrac{3x-y}{2x+y-3}$.

[B] Scrivere le derivate parziali prime e seconde delle funzioni $f(x,y) =$:

1. $x^2y^5 + 1$.
2. $\cos(xy)$.
3. $e^y \sin x^2$.
4. e^{xy}.
5. $x^2 \sin(xy^{-1})$.
6. $\arctan(x + y^2)$.
7. Calcolare la derivata totale delle funzioni precedenti (1,3,4) sulla curva di equazioni parametriche $x = t^2$, $y = t\cos t$.

[C] Determinare le derivate direzionali delle seguenti funzioni:

1. $\log\sqrt{x^2+y^2}$ nel punto $P = (1,1)$, nella direzione del vettore $\mathbf{v} = [2,1]$.
2. $xy + yz + zx$, $P = (-1,1,7)$, $\mathbf{v} = [3,4,-12]$ (funzione a tre variabili!)

3. $x^2 + 2y^2$, $P = (1, 1)$, $\mathbf{v} = [a, b]$, $|\mathbf{v}| = 1$: determinare $[a, b]$ in modo che la derivata direzionale sia massima.

[D] Determinare le rette e piani seguenti:

1. Retta tangente alla curva $x^2y + y^3 = 10$ nel punto $(1, 2)$.

2. Piano tangente alla superficie $xy + yz + zx - 1 = 0$ nel punto $(1, 1, 0)$.

3. Idem: $2y - z^3 - 3xz = 0$ nel punto $(1, 7, 2)$.

4. Idem: $x^2y^2 + xz - 2y^3 = 10$ nel punto $(2, 1, 4)$.

5. Retta tangente alla curva di intersezione delle superfici $x^2+y^2+z^2 = 49$ e $x^2+y^2 = 13$ nel punto $(3, 2, -6)$.

6. Idem: $xy + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ nel punto $(2, 1, -2)$.

(In questi ultimi due esercizi la retta tangente può anche essere espressa come intersezione dei due piani tangenti nel punto alle superfici).

[E] Determinare e analizzare i punti critici delle seguenti funzioni $f(x, y) =$:

1. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$.

2. $x^2 + xy^2$.

3. $x^2y - y^3$.

4. $x^2 + xy^2 + y^4$.

5. $xy(6 - x^2 - y^2)$.

Quest'ultima funzione ammette ben 9 punti critici: l'origine, più altri 8 punti, situati sulle 2 ellissi di equazione $6 - 3x^2 - y^2 = 0$ e $6 - x^2 - 3y^2 = 0$.

Capitolo 7

Il calcolo integrale

7.1 - Primitive di una funzione. In questo e nei paragrafi seguenti consideriamo solo funzioni $f(x)$ definite in un intervallo (limitato o no). Se una funzione è definita in più intervalli, allora quanto si dirà si potrà e dovrà applicare ad ogni singolo intervallo di definizione.

Definizione. Data una funzione $f(x)$ (definita in un intervallo), diciamo sua **primitiva** una qualunque funzione derivabile $F(x)$ la cui derivata è uguale a $f(x)$: $F'(x) = f(x)$.

Va precisato che se $f(x)$ è definita in un intervallo con un estremo incluso, p.es. l'estremo sinistro a, allora $F(x)$ è una sua primitiva se $F'(x) = f(x)$ in ogni punto x interno all'intervallo e se inoltre la sua derivata destra in a esiste ed è uguale al valore $f(a)$ della funzione: $F'_+(a) = f(a)$. Analogamente, se l'estremo destro b è incluso, deve essere $F'_-(b) = f(b)$.

Per le primitive di una funzione sussistono due teoremi fondamentali:

Teorema 1. Teorema generale sulle primitive. *Se una funzione $f(x)$, definita in un intervallo, ammette una primitiva $F(x)$, allora ne ammette infinite e tutte del tipo $F(x) + c$, con c costante arbitraria.*

Teorema 2. Teorema di esistenza di una primitiva di una funzione continua. *Una funzione continua in un intervallo ammette una primitiva (quindi infinite primitive).*

A proposito del Teorema 1 osserviamo che è ovvio che se F è una primitiva allora anche $F + c$ è una primitiva di f, perché da $F' = f$ segue $(F + c)' = f$, qualunque sia la costante c. Un po' meno ovvio è dimostrare che <u>tutte</u> le primitive di f si ottengono da <u>una</u> (qualunque) primitiva aggiungendo a questa tutte le possibili costanti. Occorre innanzitutto dimostrare il lemma seguente:

Lemma . *Se una funzione derivabile ha derivata nulla in un intervallo allora essa è costante in quell'intervallo.*

Fatto questo, si osserva che se $F(x)$ e $G(x)$ sono due primitive di $f(x)$ allora da $F' = f$ e $G' = f$ segue $(G - F)' = G' - F' = 0$. Dunque per il lemma $G - F$ è una costante, $G - F = c$, per cui $G = F + c$.

Esempi. (1) Se $f(x) = x^2$, una sua primitiva è $F(x) = \frac{1}{3}\,x^3$. Tutte le primitive sono quindi del tipo $\frac{1}{3}\,x^3 + c$. (2) Se $f(x) = \sin x$, una sua primitiva è $F(x) = -\cos x$. Tutte le primitive sono quindi del tipo $c - \cos x$.

7.2 - Integrali indefiniti. Per **integrale indefinito** di una funzione $f(x)$ s'intende l'insieme di tutte le sue primitive $F(x)$. Lo si denota con il simbolo

$$\boxed{\int f(x)\,dx}$$

Si pone dunque

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \{F(x) \mid F'(x) = f(x)\}}$$

Poiché tuttavia le primitive differiscono tra loro per una costante, è consuetudine scrivere

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c}$$

dove c è una costante arbitraria e $F(x)$ una qualsiasi primitiva.

L'intervento del simbolo di differenziale dx dopo il simbolo di integrale rende più facile e "automatica" l'applicazione delle regole di integrazione che ora vedremo.

L'operazione di integrazione di una funzione, cioè il calcolo delle sue primitive, è l'operazione "inversa" della derivazione e, come quest'ultima, si basa sulla conoscenza di **integrali fondamentali** (cioè di integrali di funzioni fondamentali) e sull'utilizzo di **regole di integrazione**. Una prima tabella di integrali fondamentali si ottiene leggendo "a rovescio" le tabelle delle derivate fondamentali note:

Tab. 1

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$x^p \quad (p \neq 1)$	$\dfrac{x^{p+1}}{p+1} + c$
$\dfrac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$

Tab. 2

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c \quad (= -\arccos x + c)$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$
e^x	$e^x + c$
a^x	$\dfrac{a^x}{\log a} + c$
$\sinh x$	$\cosh x + c$
$\cosh x$	$\sinh x + c$

Ossevazioni importanti. (1) A proposito della seconda riga di Tab. 1 osserviamo che $\log\lvert x\rvert$ è una funzione definita e derivabile per ogni $x \neq 0$ e che la sua derivata è proprio

$\frac{1}{x}$ (sparisce il simbolo di valore assoluto). (2) Con il simbolo $+c$ intendiamo sommata alla funzione una costante arbitraria; osserviamo quindi, nella prima riga di Tab. 2, che l'integrale indefinito può essere espresso con $\arcsin x + c$ oppure, in maniera equivalente, con $-\arccos x + c$ (ma non si tratta evidentemente della stessa costante c).

7.3 - Regole d'integrazione. Siccome la derivata di una costante per una funzione è uguale alla costante per la derivata della funzione e la derivata di una somma (o differenza) di funzioni è uguale alla somma (o differenza) delle derivate, valgono per l'integrale indefinito regole analoghe che si possono riassumere nella

$\boxed{1}$ **Regola di linearità**: l'integrale di una **combinazione lineare** di funzioni $a\,f(x)+\ldots+b\,g(x)$, con $a,\ldots,b$ costanti, detti **coefficienti** della combinazione, è uguale alla combinazione lineare (con gli stessi coefficienti) degli integrali:

$$\boxed{\int \big(a\,f(x)+\ldots+b\,g(x)\big)\,dx = a\int f(x)\,dx+\ldots+b\int g(x)\,dx} \tag{1}$$

$\boxed{\text{E}}$ $\int(x+2\,\sin x)\,dx = \int x\,dx + 2\int \sin x\,dx = \frac{1}{2}\,x^2 - 2\,\cos x + c$.

$\boxed{!}$ Nel calcolo di un integrale è sempre bene applicare la "regola della "verifica": calcolato un integrale indefinito, derivare la funzione ottenuta per verificare se si ritrova la funzione integranda.

$\boxed{!}$ Nel caso di una funzione costante $f(x)=a$ si ha ovviamente: $\int a\,dx = a\,x + c$. In particolare quindi, per $a=1$,

$$\int dx = x + c.$$

Osserviamo allora che i simboli $\int d$ si eliminano a vicenda, producendo però una costante additiva arbitraria. Infatti, a parte l'esempio precedente, denotando al solito con $F(x)$ una primitiva di $f(x)$ e ricordato che $dF(x) = F'(x)dx$, abbiamo in generale

$$F(x)+c = \int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = \int dF(x).$$

L'ultimo passaggio mostra appunto che $\int d$ si eliminano. Lo stesso accade per $d\int$: si ha infatti

$$d\int f(x)\,dx = d\big(F(x)+c\big) = dF(x) + dc = F'(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

$\boxed{2}$ **Regola di integrazione per parti**. Questa regola e quella seguente si basano entrambe su questa premessa: supponiamo che la funzione integranda $f(x)$ sia decomponibile nel prodotto di due funzioni, $f(x) = g(x)\cdot h(x)$, e che uno dei fattori, p.es. $h(x)$, si riconosca subito essere la derivata di una funzione nota $H(x)$. Possiamo allora scrivere successivamente

$$h(x)\,dx = H'(x)\,dx = dH(x)$$

In altri termini: abbiamo fatto "passare" il fattore $h(x)$ sotto il simbolo di differenziale d, con una integrazione (di qui il termine "integrazione per parti"). Scriviamo allora:

$$\int f(x)\,dx = \int g(x)\,h(x)\,dx = \int g(x)\,dH(x). \tag{2}$$

Fatto questo, possiamo proseguire osservando che per il differenziale di un prodotto di funzioni, come per la derivata di un prodotto, vale la regola di Leibniz, per cui

$$d(gH) = H\,dg + g\,dH.$$

Quindi, $g\,dH = d(gH) - H\,dg$ e lo sviluppo precedente si completa in

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx = \int g(x)\,h(x)\,dx = \int g(x)\,dH(x) &= \int d\big(g(x)\,H(x)\big) - \int H(x)\,dg(x)\\ &= g(x)\,H(x) - \int H(x)\,g'(x)\,dx.\end{aligned} \tag{3}$$

Siamo così condotti al calcolo di un altro integrale indefinito, quello della funzione $H(x)\,g'(x)$. Se siamo fortunati e lo sappiamo calcolare, il problema è risolto. Altrimenti occorrerà procedere a qualche altro artificio. Lo sviluppo (3), che rappresenta la regola di integrazione per parti, si sintetizza dunque nelle formule

$$\begin{gathered}\boxed{\int g(x)\,h(x)\,dx = \int g(x)\,dH(x) = g(x)\,H(x) - \int H(x)\,dg(x)}\\ \boxed{H(x) \in \int h(x)\,dx}\end{gathered} \tag{4}$$

intendendo, nella seconda, che $H(x)$ è una qualunque primitiva di $h(x)$.

$\boxed{\text{E}}$ In quest'esempio è $g(x) = \log x$, $h(x) = x$, quindi $H(x) = \frac{1}{2}\,x^2$:

$$\begin{aligned}\int x\,\log x\,dx &= \tfrac{1}{2}\int \log x\,dx^2 = \tfrac{1}{2}\,x^2\,\log x - \tfrac{1}{2}\int x^2\,d(\log x)\\ &= \tfrac{1}{2}\,x^2\,\log x - \tfrac{1}{2}\int \tfrac{x^2}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}\,x^2\,\log x - \tfrac{1}{2}\int x\,dx = \tfrac{1}{2}\,x^2\,\log x - \tfrac{1}{4}\,x^2 + c.\end{aligned}$$

Dunque:

$$\int x\,\log x\,dx = \tfrac{1}{2}\,x^2\left(\log x - \tfrac{1}{2}\right) + c.$$

$\boxed{\text{E}}$ In quest'esempio la funzione $h(x)$ è addirittura la costante 1, per cui $H(x) = x$:

$$\int \log x\;dx = x\;\log x - \int x\;d(\log x) = x\;\log x - \int dx = x\;\log x - x + c.$$

Abbiamo pertanto trovato l'integrale indefinito

$$\boxed{\int \log x\;dx = x\;\big(\log x - 1\big) + c} \tag{5}$$

$\boxed{\text{E}}$ A volte può accadere, come in quest'esempio, che il metodo d'integrazione per parti conduca allo stesso integrale di partenza, cambiato di segno:

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\,dx &= \int \cos x\,d(\sin x) = \cos x\,\sin x - \int \sin x\,d(\cos x)\\ &= \cos x\,\sin x + \int \sin^2 x\,dx = \cos x\,\sin x + \int (1-\cos^2 x)\,dx\\ &= \cos x\,\sin x + x - \int \cos^2 x\,dx.\end{aligned}$$

Riportando l'ultimo integrale a primo membro si trova il primo integrale della seguente tabella di integrali utili (gli altri si trovano con un metodo analogo).

Tab. 3

$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\,(x + \sin x\,\cos x) + c$
$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\,(x - \sin x\,\cos x) + c$
$\int \cosh^2 x\,dx = \frac{1}{2}\,(x + \sinh x\,\cosh x) + c$
$\int \sinh^2 x\,dx = \frac{1}{2}\,(x - \sinh x\,\cosh x) + c$

$\boxed{3}$ **Regola della funzione composta**. Ha le stesse premesse della regola di integrazione per parti, vale a dire la formula (2). Posto $u = H(x)$, può accadere che $g(x)$ sia una funzione composta

$$g(x) = \bar{g}(u), \quad u = H(x),$$

e che inoltre si sappia calcolare una primitiva $\bar{G}(u)$ di $\bar{g}(u)$. Abbiamo allora, completando la formula (2):

$$\boxed{\begin{aligned}\int f(x)\,dx = \int g(x)\,h(x)\,dx = \int g(x)\,dH(x) = \int \bar{g}(u)\,du\\ = \bar{G}(u) + c = \bar{G}\big(H(x)\big) + c\end{aligned}} \tag{6}$$

$\boxed{\text{E}}$ In quest'esempio abbiamo $u = H(x) = x^2$, $\bar{g}(u) = \sin u$:

$$\int x\,\sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\int \sin x^2\,d(x^2) = \frac{1}{2}\int \sin u\,du = -\,\frac{1}{2}\,\cos u + c = -\,\frac{1}{2}\,\cos x^2 + c.$$

$\boxed{4}$ **Regola della sostituzione di variabile**. Consiste nell'esprimere la x come funzione <u>invertibile</u> di un'altra variabile t: $x = g(t)$, $t = g^{-1}(x)$. Questa regola è espressa dalla formula

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f\big(g(t)\big)\,dg(t) = \int f\big(g(t)\big)\,g'(t)\,dt} \tag{7}$$

La scelta della funzione $g(t)$ deve essere tale da rendere più facile operare sulla nuova funzione integranda $f\big(g(t)\big)\, g'(t)$. Determinata una primitiva di quest'ultima, si sostituisce alla t la funzione inversa $t = g^{-1}(x)$ e si ottiene una primitiva di $f(x)$.

$\boxed{\text{E}}$ Calcoliamo i primi due integrali della tabella seguente (il terzo si calcola in maniera analoga al secondo).

Tab. 4

$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\Big(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\Big) + c$
$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\Big(\log\big(x+\sqrt{1+x^2}\big) + x\sqrt{1+x^2}\Big) + c$
$\int \sqrt{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{x^2-1} - \log\big(x+\sqrt{x^2-1}\big)\Big) + c$

Per il primo integrale osserviamo che con la sostituzione $x = \sin t$ si ha $1 - x^2 = \cos^2 t$ esso si trasforma in

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \cos t\, d\sin t = \int \cos^2 t\, dt.$$

In questa sostituzione si è inteso t variabile nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dove $\cos t \geq 0$ e dove si ha l'invertibilità, $t = \arcsin x$. Si può allora procedere con un'integrazione per parti ed ottenere:

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\big(t + \sin t\, \cos t\big) + c.$$

Adesso occorre ritornare alla variabile x, tenendo conto che $t = \arcsin x$ e $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2}$ (la scelta $\cos t = -\sqrt{1-x^2}$ è da escludersi avendo seclto l'intervallo in cui $\cos t \geq 0$). Di qui segue il primo integrale di Tab. 4 (si poteva anche procedere, in maniera del tutto analoga, con la sostituzione $x = \cos t$).

Per trattare il secondo integrale ricorriamo alla sostituzione $x = \sinh t$, invertibile su tutto $\mathbb{R}$, per cui $1 + x^2 = \cosh^2 t$. Si ottiene:

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \int \cosh t\, d\sinh t = \int \cosh^2 t\, dt.$$

Si può allora procedere con un'integrazione per parti come già visto. Si trova:

$$\int \cosh^2 t\, dt = \tfrac{1}{2}(t + \sinh t\, \cosh t) + c.$$

Per ritornare alla variabile x e trovare la seconda formula nella Tab. 4 si osserva che $\cosh t = \sqrt{1+\sin^2 t} = \sqrt{1+x^2}$ e inoltre che la relazione inversa di $x = \sinh t$ è data da (come risulta dalla prima delle formule (3) del §11, Cap. 3)

$$t = \log\big(x + \sqrt{1+x^2}\big). \tag{8}$$

Infatti, essendo per definizione

$$\sinh t = \tfrac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right), \qquad \cosh t = \tfrac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right),$$

si ha, sommando membro a membro,

$$e^t = \sinh t + \cosh t = x + \sqrt{1+x^2}.$$

Prendendo il logaritmo di quest'uguaglianza si trova la (8).

7.4 - Valor medio di una funzione. La **media** o **valor medio** di un insieme di n numeri $(y_i) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ è, come ben noto, il numero definito da

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}. \tag{1}$$

Questo tipo di media prende anche il nome di **media aritmetica**.

Come si estende la nozione di valor medio al caso dei valori assunti da una funzione $f(x)$ in un certo intervallo (chiuso) $[a, b]$? Ad esempio, come si definisce la "temperatura media" di un ambiente in un intervallo di tempo prefissato, posto che la temperatura T è rappresentabile mediante una funzione $T = f(t)$ del tempo t? Un metodo potrebbe essere questo: prendere la media dei valori $y_i = f(x_i)$ della $f(x)$ misurati in intervalli regolari della x, cioè per una successione di n valori x_i intervallati da un passo costante h, cioè tali che $x_{i+1} = x_i + h$, a partire da $x_1 = a$ (estremo sinistro dell'intervallo) per finire con $x_n = b$ (estremo destro):

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}. \tag{2}$$

Il passo $h = x_{i+1} - x_i$ è, in questo caso, dato da

$$h = \frac{b-a}{n-1}.$$

È chiaro che la **media n-esima** così calcolata dipende dal numero n delle misure; più alto è questo numero (quindi più piccolo è il passo), più raffinata è la misura del valor medio della funzione. È anche chiaro che gli intervalli (x_i, x_{i+h}) dei punti di misura devono avere ampiezza costante, altrimenti la media aritmetica (1) dei corrispondenti y_i darebbe una misura falsata del valor medio della funzione: i valori y_i corrispondenti a intervalli più brevi "peserebbero" di più sul risultato. È di conseguenza naturale definire il **valor medio** di una funzione $f(x)$ come il limite della successione delle medie n-esime μ_n per $n \to +\infty$ (quindi per $h \to 0$).

Possiamo tuttavia seguire un'altra via, non legata al concetto di limite ma che, come si potrebbe dimostrare, conduce allo stesso risultato (almeno per le funzioni continue).

Ritornando al caso di n numeri, supponiamo di rappresentarli mediante un istogramma, cioè con dei rettangoli di base 1 e altezza y_i:

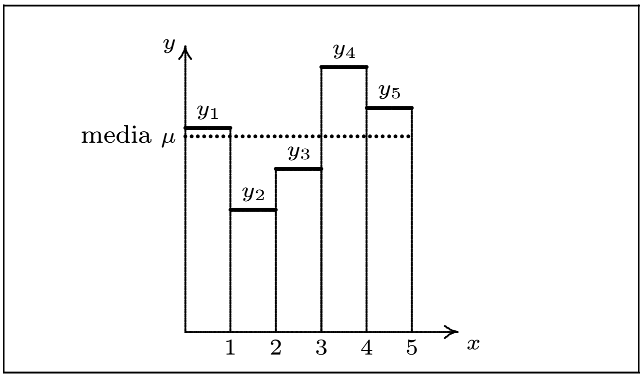


Fig. 7.2 - Media di n numeri ($n = 5$).

Risulta chiaro dalla definizione (1) che ora il numero μ è interpretabile come altezza del rettangolo che ha come base l'intervallo $[0, n]$ e area uguale alla somma A delle aree dei rettangoli di base 1 e altezza y_i:

$$\mu = \frac{A}{n}.$$

Per una funzione possiamo procedere allo stesso modo. Il grafico della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$, dove si vuole misurare la media, definisce un **rettangoloide**:

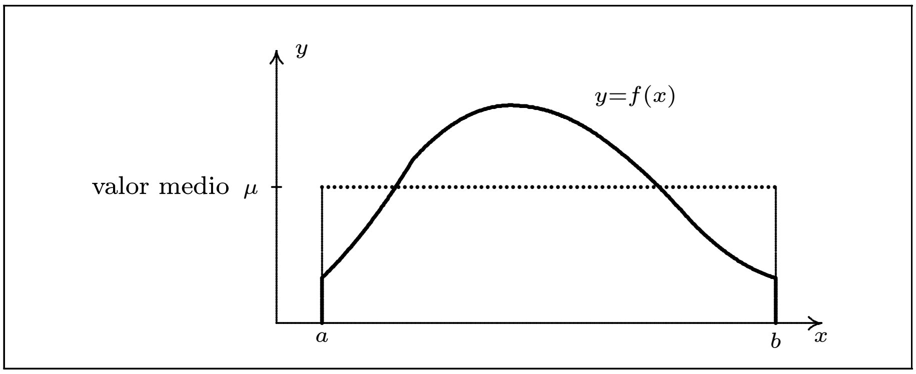


Fig. 7.3 - Valor medio di una funzione.

Denotata con $A_a^b(f)$ l'area del suddetto rettangoloide, poniamo per definizione

$$\mu = \text{valor medio} = \frac{A_a^b(f)}{b-a} \tag{3}$$

Ciò significa che μ è l'altezza del rettangolo equivalente al rettangoloide, cioè della stessa area A, con la stessa base.

Nella Fig. 7.2 si sono rappresentati sono valori positivi delle y_i, così come nella Fig. 7.3 si è considerata una funzione a valori positivi. Nella definizione di media, vanno considerate negative le aree relative a zone in cui la funzione è negativa.

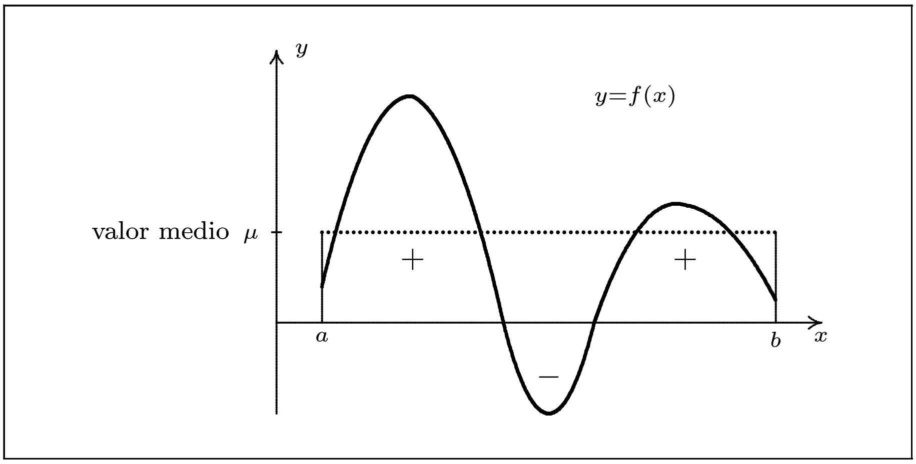


Fig. 7.4 - Valor medio di una funzione con valori positivi e negativi.

Ricordiamo che se la funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo $[a, b]$, allora essa ammette un valore massimo M ed un valore minimo m (teorema di Weierstrass), per cui $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$. È *intuitivo* il fatto che anche il valor medio μ della funzione nell'intervallo è compreso fra questi due valori:

$$m \leq \mu \leq M.$$

Di qui, per il teorema dei valori intermedi, segue il **Teorema del valor medio di una funzione continua**:

Teorema. *Data una funzione $f(x)$ continua in $[a, b]$, esiste (almeno) un punto x_* di quest'intervallo dove il valore $f(x_*)$ della funzione coincide col suo valor medio.*

Si osservi che questo non accade per la media di un numero "discreto", cioè finito, di valori (y_i), la quale può anche non coincidere con uno di essi. Per esempio, se la media del vostro "libretto" è 27, non è detto che abbiate preso 27 in qualche esame. Invece, se vi dicono che la temperatura media tra le ore 8 di ieri e le ore 8 di oggi è stata di 10°, potete stare certi che in quell'intervallo temporale c'è stato almeno un istante in cui la temperatura è stata proprio di 10° (perché la temperatura varia con continuità).

Tutto quanto ora detto è sensato, ma ha un *piccolo* difetto: non sappiamo come calcolare l'area $A_a^b(f)$!

7.5 - Teorema fodamentale del calcolo integrale.

Accettiamo per il concetto di area di una figura piana i seguenti assiomi:

$\boxed{1}$ L'area di un rettangolo è il prodotto della lungezza dei lati.

$\boxed{2}$ Se l'intersezione di due figure piane è vuota o costituita da punti o segmenti, allora l'area totale è la somma delle due aree (ammesso che esistano).

Adattiamo questi assiomi al caso dell'area di un rettangoloide:

$\boxed{1}$ $A_a^a = 0$.

$\boxed{2}$ $A_a^b + A_b^c = A_a^c$.

Questa uguaglianza, chiara per $a < b < c$, la intendiamo valida qualunque siano a, b, c.

Ponendo $a = c$ segue allora il *teorema*:

$\boxed{\text{T1}}$ $A_a^b = -A_b^a$.

$\boxed{3}$ L'area $A_a^b(f)$ è equivalente all'area di un rettangolo di base $[a, b]$ e altezza uguale ad un numero μ compreso tra il massimo e il minimo della funzione f in $[a, b]$.

Chiamiamo questo numero (vedi sopra) **valor medio** della funzione. Segue allora (vedi sopra) il *teorema*

$\boxed{\text{T2}}$ Esiste un $\xi \in [a, b]$ tale che $f(\xi) = \mu = \frac{A_a^b}{b-a}$.

Se accettiamo queste *regole del gioco* possiamo stabilire un metodo per calcolare le aree dei rettangoloidi, secondo due teoremi fondamentali.

Teorema fondamentale del calcolo integrale. *Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$. Denotata con A_a^x l'area del rettangoloide sull'intervallo $[a, x]$, allora quest'area, interpretata come una funzione di x, è una primitiva di $f(x)$: $(A_a^x)' = f(x)$.*

Dimostrazione. Calcoliamo la derivata di A_a^x come limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[A_a^{x+h} - A_a^x\right] = \ldots$$

Per l'assioma $\boxed{2}$ segue

$$\ldots = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[A_a^x + A_x^{x+h} - A_a^x\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} A_x^{x+h} = \ldots$$

Per $\boxed{\text{T2}}$

$$\ldots = \lim_{h\to 0} f(\xi) = \ldots$$

dove ξ è compreso tra x e $x + h$. Pertanto, quando h tende a zero, questo punto tende a x. Quindi

$$\ldots = f(x). \qquad \blacksquare$$

Formula fondamentale del calcolo integrale. *Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$. Allora*

$$\boxed{A_a^b(f) = F(b) - F(a)} \tag{FF}$$

essendo $F(x)$ una uqalunque primitiva di $f(x)$.

Dimostrazione. Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora essa differisce dalla primitiva $A_a^x(f)$ per una costante:

$$A_a^x(f) = F(x) + c.$$

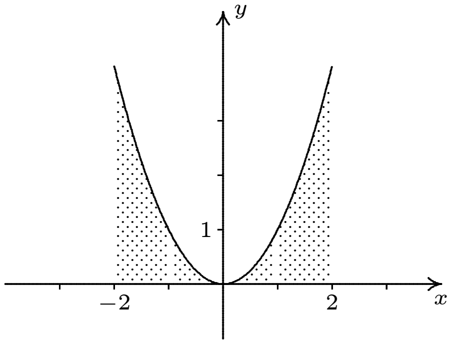
Ponendo $x = a$ e $x = b$, seguono le uguaglianze

$$0 = F(a) + c, \qquad A_a^b = F(b) + c,$$

dalle quali segue la formula fondamentale. $\blacksquare$

Vediamo alcuni esempi di applicazione della formula fondamentale del calcolo integrale.

$\boxed{\text{E}}$ Calcolare l'area A del rettangoloide definito dalla funzione $f(x) = x^2$ (parabola) in $[-2, 2]$.



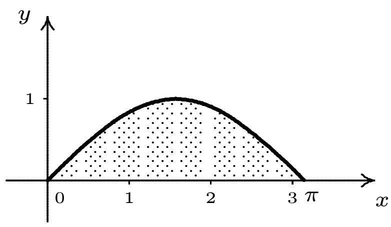
Una primitiva di x^2 è evidentemente

$$F(x) = \tfrac{1}{3}\, x^3.$$

Infatti $(\frac{1}{3}\, x^3)' = x^2$. Applicando la formula fondamentale (1) troviamo:

$$A = \left[\tfrac{1}{3}\, x^3\right]_{-2}^{2} = \tfrac{1}{3}\left(2^3 - (-2)^3\right) = \tfrac{16}{3}.$$

$\boxed{\text{E}}$ Calcolare l'area A del rettangoloide determinato dalla funzione $f(x) = \sin x$ in $[0, \pi]$.



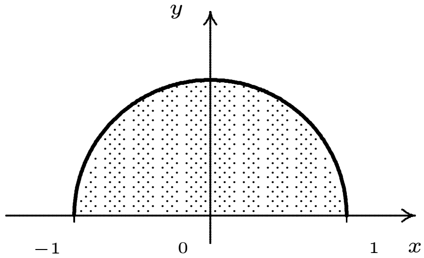
Una primitiva di $\sin x$ è

$$F(x) = -\cos x.$$

Infatti $(-\cos x)' = \sin x$. Applicando la formula fondamentale (1) troviamo:

$$A = \big[-\cos x\big]_0^{\pi} = \big[\cos x\big]_{\pi}^{0} = \big(\cos(0) - \cos(\pi)\big) = 1 + 1 = 2.$$

$\boxed{\text{E}}$ Vogliamo calcolare l'area di un disco di raggio 1 (nel caso non sapessimo ancora che vale π). Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ il cui grafico è un semicerchio, sopra l'intervallo $[-1, 1]$:



Una primitiva di questa funzione è, come si è visto al §7.3,

$$F(x) = \tfrac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right).$$

Quindi, per la formula fondamentale, l'area del semidisco è data da

$$\tfrac{1}{2}\left[\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^{1} = \tfrac{1}{2}\left(\arcsin(1) - \arcsin(-1) + 0\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2}\right) = \tfrac{\pi}{2}.$$

7.6 - Integrali definiti.

Sostituiamo il simbolo $A_a^b(f)$ finora usato, con il simbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Indipendentemente dal significato di area dato a questo simbolo, tenedo però conto del teorema e della formula fondamentale del calcolo integrale, poniamo per definizione

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)} \tag{ID}$$

dove $F8x)$ è una qualunque primitiva di $f(x)$. Questo numero prende il nome di **integrale definito** della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$.

Osservazione. In queste lezioni stiamo considerando l'integrale indefinito solo per funzioni continue. Ciò è sufficiente per le normali applicazioni. Tuttavia, il concetto di integrale definito può anche essere definito per funzioni non continue. Una procedura fondamentale per tale definizione, che si può trovare nei testi di Analisi Matematica, è dovuta a B. Riemann. Si parla allora di **integrale di Riemann**. Applicando la definizione di Riemann alle funzioni continue, si ottiene quanto visto in queste lezioni.

Vale per l'integrale definito un'importante proprietà, di immediata dimostrazione, detta **teorema del confronto**:

- *Se nell'intervallo d'integrazione* $[a, b]$ *è sempre* $f(x) \leq g(x)$ *allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Di qui segue come corollario che:

• *Il valore assoluto di un integrale definito è sempre inferiore all'integrale del valore assoluto dell'integrando*:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Basta applicare il teorema del confronto alle disuguaglianze $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.

Per il calcolo di un integrale definito si possono usare le regole d'integrazione per parti, della funzione composta e della sostituzione di variabile. Nel primo caso vale una formula analoga a quella vista per l'integrale indefinito:

$$\boxed{\int_a^b g(x)\,h(x)\,dx = \big[g(x)\;H(x)\big]_a^b - \int_a^b H(x)\;g'(x)\;dx, \qquad h(x) = H'(x)} \tag{1}$$

Con le altre due regole occorre sostituire opportunamente gli estremi di integrazione, che devono corrispondere ai valori estremi assunti dalla nuova variabile:

$$\boxed{\int_a^b g(x)\;h(x)\;dx = \int_a^b g(x)dH(x) = \int_{H(a)}^{H(b)} \bar{g}(u)\;du, \qquad u = H(x)} \tag{2}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f\big(g(t)\big)\,g'(t)\,dt, \qquad x = g(t)} \tag{3}$$

$\boxed{\text{E}}$ Ricalcoliamo l'area A del semidisco di raggio 1 col metodo della sostituzione di variabile:

$$A = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Con la sostituzione $x = \cos\theta$ ci si riconduce alla variabile θ uguale all'angolo formato dal semiasse positivo delle x e dalla semiretta congiungente l'origine al generico punto del grafico. Quando x percorre l'intervallo $[-1, 1]$, questa nuova variabile percorre l'intervallo $[\pi, 0]$, cioè l'intervallo $[0, \pi]$ ma in verso ("senso") opposto. Si ha allora successivamente:

$$\begin{aligned} A &= \int_\pi^0 \sqrt{1-\cos^2\theta}\;d\cos\theta = -\int_0^\pi \sqrt{1-\cos^2\theta}\,(-\sin\theta)\,d\theta = \int_0^\pi \sin^2\theta\,d\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\,\big[\theta - \sin\theta\;\cos\theta\big]_0^\pi = \tfrac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

osservato che $\sin\theta \geq 0$ in $[0, \pi]$ e tenuto conto dell'integrale indefinito già noto di $\sin^2\theta$. Quest'ultimo integrale definito si può però calcolare in altro modo, *senza ricorrere al calcolo di un integrale indefinito*. Se si pensa infatti al significato dell'integrale definito come area, si osserva che, nel nostro caso, nell'intervallo $[0, \pi]$ le funzioni $\sin^2\theta$ e $\cos^2\theta$ individuano la medesima area, che quindi è la metà della loro somma, cioè dell'integrale

$$\int_0^\pi \big(\sin^2\theta + \cos^2\theta\big)\,d\theta = \int_0^\pi 1\;d\theta = [\theta]_0^\pi = \pi.$$

Pertanto:

$$\int_0^\pi \sin^2\theta\, d\theta = \int_0^\pi \cos^2\theta\, d\theta = \tfrac{\pi}{2}. \tag{4}$$

7.7 - Calcolo della lunghezza di una curva piana.

In alcuni processi deduttivi di carattere intuitivo il simbolo di differenziale du può essere interpretato come "piccolo incremento" della variabile u (sia essa indipendente o dipendente da un'altra variabile). In questo modo, per esempio, il prodotto $f(x)\,dx$ può essere interpretato come area di un rettangolo di altezza $f(x)$ e base dx, sicché l'area $A_a^b(f)$ del rettangoloide definito dalla funzione $f(x)$ in un intervallo $[a,b]$ risulta essere la "somma" delle aree di questi "sottili rettangoli", dal punto a al punto b. Di qui segue la notazione usata per l'integrale definito: *il simbolo* $\int$ *non è altro che una deformazione grafica della lettera S, iniziale di somma, o sommatoria.*

Un altro esempio è il seguente. Data una curva γ sul piano (x,y) ad un "piccolo" incremento dx corrisponde un piccolo incremento dy, sicché la lunghezza ds della curva corrispondente a un tale incremento può approssimarsi, per il teorema di Pitagora, con

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}. \tag{1}$$

La quantità ds prende il nome di **elemento d'arco euclideo** della curva.

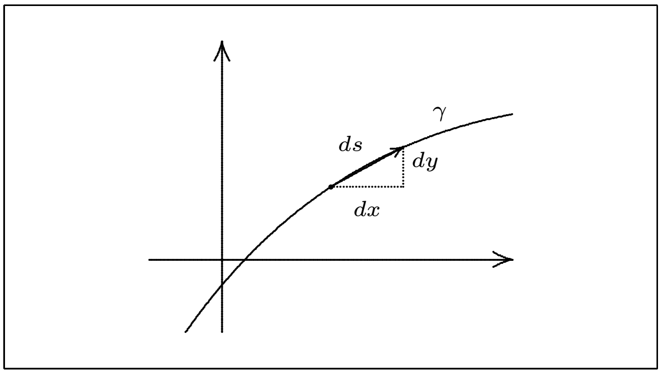


Fig. 7.5 - Elemento d'arco di una curva $y = f(x)$.

Supponiamo di avere una rappresentazione parametrica della curva γ:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in [a,b].$$

È importante dichiarare l'intervallo (chiuso) $[a,b]$ di variabilitá del parametro t. Sostituendo queste funzioni nell'espressione (1) dell'elemento d'arco si ottiene

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt, \tag{2}$$

dove con $\dot{x}$ e $\dot{y}$ si denotano le derivate di $x(t)$ e $y(t)$ rispetto al parametro t. Entambe queste derivate sono funzioni di t. La "somma", cioè l'integrale di tutti i ds lungo la curva γ, che denotiamo formalmente con

$$\int_\gamma ds$$

fornisce la lunghezza di γ. Con la sostituzione (2), questa lunghezza l_γ si esprime con l'integrale

$$\boxed{l_\gamma = \int_a^b \sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\; dt} \tag{3}$$

Si osservi che l'integrando, o il radicando, è una funzione del parametro t.

• Si può dimostrare che quest'integrale non dipende dalla scelta delle equazioni parametriche della curva.

$\boxed{\text{E}}$ **Lunghezza di una circonferenza**. Rappresentiamo una circonferenza di raggio R centrata nell'origine con le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Avendosi

$$\dot{x} = -\sin t, \qquad \dot{y} = \cos\omega t,$$

l'elemento d'arco risulta uguale

$$ds = R\,dt,$$

per cui

$$l = \int_0^{2\pi} R\,dt = R\,[t]_0^{2\pi} = 2\pi R.$$

$\boxed{\text{E}}$ Si vuole calcolare la lunghezza dell'arco di parabola $y = x^2$ nell'intervallo $x \in [0, 1]$. Possiamo scegliere la stessa x come parametro, e quindi rappresentare la parabola con le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \end{cases}$$

con $t \in [0, 1]$. Siccome $\dot{x} = 1$ e $\dot{y} = 2t$, applicando la formula (3) si ottiene

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\,dx.$$

Con la sostituzione $x = z/2$ si trova

$$l = \tfrac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{1 + z^2}\,dz$$

Abbiamo già calcolato l'integrale indefinito

$$\int \sqrt{1 + z^2}\,dz = \tfrac{1}{2}\left(\log\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right) + z\sqrt{1 + z^2}\right) + c.$$

per cui

$$l = \frac{1}{4}\Big[\log\big(z + \sqrt{1+z^2}\big) + z\sqrt{1+z^2}\Big]_0^2 = \frac{1}{4}\big(\log(2+\sqrt{5}) + 2\sqrt{5}\big).$$

Quest'esempio ci porta a considerare il caso particolare, ma frequente nelle applicazioni, in cui la curva γ sia in grafico di una funxione $y = f(x)$ in un intervallo $a, b]$. Prendendo x come parametro si ottiene dalla (3) la formula generale

$$\boxed{l_\gamma = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx} \tag{4}$$

7.8 - Calcolo di volumi. Consideriamo lo spazio riferito a coordinate cartesiane ortogonali e monometriche (x, y, z), con origine in un punto O. Si consideri un solido $\mathcal{S}$ e si supponga di conoscere per ogni valore della x l'area $A(x)$ della sezione piana ortogonale all'asse x. Per qualche valore della x, tale sezione può ridursi a una curva, o ad uno o più punti, o essere l'insieme vuoto; in tutti questi casi si pone $A(x) = 0$. Se la funzione $A(x)$ (che supponiamo continua) è nulla al di fuori di un intervallo chiuso $[a, b]$ allora il volume del solido è dato dall'integrale

$$V = \int_a^b A(x)\, dx \tag{1}$$

perché il prodotto $A(x)\, dx$ può essere interpretato come volume di una "fetta" sottile del solido (di spessore dx).

$\boxed{\text{E}}$ **Calcolo del volume della sfera**. La sfera di raggio r e centro l'origine ha equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Il solido $\mathcal{S}$ così individuato è situato nell'intervallo $[-r, r]$ dell'asse x. Per una generica x qui compresa la sezione $\mathcal{S}(x)$ è un disco di raggio $R(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ (perché l'equazione della sfera si può scrivere $y^2 + z^2 = R^2(x)$ posto $R^2(x) = r^2 - x^2$, e questa è l'equazione di una circonferenza di raggio $R(x)$) e la sua area è quindi $A(x) = \pi\,(r^2 - x^2)$. Dunque:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \pi \left(r^2 \int_{-r}^{r} dx - \int_{-r}^{r} x^2\, dx \right) \\ &= \pi \left(r^2 \left[x\right]_{-r}^{r} - \tfrac{1}{3}\left[x^3\right]_{-r}^{r} \right) = \pi\left(2\,r^3 - \tfrac{2}{3}\,r^3\right) = \tfrac{4}{3}\,\pi\, r^3. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{E}}$ **Calcolo del volume di un solido di rotazione**. La sfera non è che un caso particolare di **solido di rotazione** intorno all'asse x. Un solido siffatto ha sempre come sezioni $\mathcal{S}(x)$ dei dischi di raggio $R(x)$ (il raggio è una funzione di x). Pertanto il volume del solido compreso tra $x = a$ e $x = b$ è

$$V = \pi \int_a^b R^2(x)\, dx,$$

perché è $A(x) = \pi R^2(x)$.

$\boxed{\text{E}}$ **Calcolo del volume del cono**. Consideriamo un cono circolare retto di altezza h e raggio di base r. Disponiamolo col vertice nell'origine e con asse coincidente col semiasse positivo delle x. In questo caso la funzione $R(x)$ è

$$R(x) = \frac{r}{h}\, x,$$

per cui

$$V = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2\, dx = \tfrac{\pi}{3} \frac{r^2}{h^2} \left[x^3\right]_0^h = \tfrac{\pi}{3}\, h\, r^2.$$

7.9 - Integrali impropri. Per come abbiamo introdotto la nozione di integrale definito (cioè di area di un rettangoloide), si presuppone che l'intervallo in cui si considera la funzione sia chiuso e limitato e che la funzione stessa sia continua, quindi limitata, in quell'intervallo. Infatti, la continuità implica anche l'esistenza di una primitiva, e quindi l'applicabilità della formula fondamentale.

Si può comunque estendere la nozione di integrale definito anche al caso in cui la funzione e/o l'intervallo non sono limitati. Questi tipi di integrali vengono detti **impropri**.

• **Integrale di funzione non limitata**. Si consideri una funzione $f(x)$ continua in un intervallo $(a, b]$ (aperto a sinistra) e non limitata a sinistra, cioè tale che

$$\lim_{x\to a+} f(x) = +\infty \qquad (\text{oppure} \;\; -\infty)$$

Siccome in ogni intervallo chiuso del tipo $[a+\varepsilon, b]$, con $\varepsilon > 0$, la funzione $f(x)$ è integrabile, ha senso considerare l'integrale

$$I(\varepsilon) = \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\, dx.$$

Si genera così una funzione continua $I(\varepsilon)$ nella variabile ε. Si noti che per $\varepsilon = 0$ questa funzione non è definita. La si può **prolungare per continuità** considerandone il limite per $\varepsilon \to 0^+$. Si pone allora per definizione

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\, dx} \qquad (1)$$

Se il limite è finito si dice che l'integrale è **convergente**, o anche che la funzione $f(x)$ è **integrabile in senso improprio** nell'intervallo $[a, b]$. Se il limite non è finito si dice che l'integrale improprio è **divergente**.

$\boxed{\text{E}}$ Si consideri la funzione $f(x) = x^{-p}$, con $p > 0$, nell'intervallo $(0, 1]$. L'integrazione indefinita per $p \neq 1$ fornisce

$$\int x^{-p}\, dx = \frac{1}{1-p}\, x^{1-p} + c.$$

Dunque

$$\int_0^1 x^{-p}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 x^{-p}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{1-p}(1-\varepsilon^{1-p}) = \begin{cases} \frac{1}{1-p} & (0<p<1) \\ +\infty & (p>1) \end{cases}$$

Se invece è $p = 1$ si ha

$$\int_0^1 x^{-1}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\big[\log x\big]_\varepsilon^1 = +\infty.$$

Dunque la funzione x^{-p} è integrabile in senso improprio nell'intervallo $[0,1]$ solo per $p \in (0,1)$ (estremi esclusi).

• **Integrale su di un intervallo non limitato unilateralmente**. Si consideri una funzione continua in un intervallo illimitato del tipo $[a,+\infty)$. Questa è integrabile in ogni intervallo limitato e chiuso $[a,b]$. Si pone allora per definizione

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx} \tag{2}$$

e si dice che l'integrale improprio è convergente se il limite esiste ed è finito (divergente se esiste ed è infinito).

$\boxed{\text{E}}$ Consideriamo $f(x) = x^{-p}$ nell'intervallo $[1,+\infty)$. Si trova con calcolo analogo

$$\int_1^{+\infty} x^{-p} = \begin{cases} +\infty & (0<p\le 1), \\ \frac{1}{p-1} & (p>1). \end{cases}$$

Quindi la funzione x^{-p} è integrabile in senso improprio in $[1,+\infty)$ solo per $p > 1$.

Le due definizioni precedenti si estendono in maniera ovvia anche a casi in cui le due condinioni considerate si verificano contemporaneamente: funzione continua su di un intervallo illimitato aperto $(a,+\infty)$ e non limitata all'estremo sinistro, ecc.

• **Integrale esteso a tutto l'asse reale**. Si consideri una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$. Si pone per definizione

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx} \tag{3}$$

purché i due integrali di destra siano entrambi convergenti. In questo caso, il risultato non dipende dalla scelta del punto a.

$\boxed{\text{E}}$ Dimostriamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Calcoliamo l'integrale in $[0, +\infty]$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \big[\arctan x\big]_0^b = \lim_{b\to+\infty} \arctan b = \tfrac{\pi}{2}.$$

Siccome l'analogo integrale in $(-\infty, 0]$ porta allo stesso risultato (la funzione è pari, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y), concludiamo che l'integrale richiesto esiste ed è uguale a π.

Per valutare la convergenza o meno di un integrale improprio si può far ricorso al confronto con un integrale improprio già noto. Sussiste infatti un **teorema del confronto** anche per gli integrali impropri: se nell'intervallo considerato si ha

$$0 \le f(x) \le g(x)$$

allora la convergenza dell'integrale di $g(x)$ implica la convergenza dell'integrale di $f(x)$ e la divergenza dell'integrale di $f(x)$ implica la divergenza dell'integrale di $g(x)$ (in entrambi i casi considerati: nel caso di funzioni illimitate o nel caso di intervallo illimitato).

7.10 - Integrali curvilinei.

Sia $f(x, y)$ una funzione a due variabili definita su di un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia γ una curva tutta contenta in D. Chiamiamo **integrale curvilineo** di f su γ il numero denotato con

$$\int_\gamma f\,ds, \tag{1}$$

che rappresenta l'area (con segno) della superficie descritta dai segmenti verticali (paralleli all'asse z) aventi un estremo sulla curva γ e l'altro sulla superficie di equazione $z = f(x, y)$ (cioè sul grafico del funzione). Il segno di quest'area dipende sia dal segno di $f(x, y)$ sia dal verso di percorrenza della curva.

Siano

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [a, b] \subset \mathbb{R} \tag{2}$$

equazioni parametriche della curva γ, tali da stabilire una corrispondenza biunivoca tra i punti di γ ed i punti dell'intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Allora si dimostra che se la funzione f è continua e se le funzioni (2) hanno derivata prima continua, allora l'integrale curvilineo esiste ed è calcolabile con la seguente **formula del calcolo degli integrali curvilinei**:

$$\boxed{\int_\gamma f\,ds = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)\,\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt} \tag{3}$$

Formalmente l'integrale (3) si ottiene dalla formula

$$\boxed{\int f(x, y)\,ds = \int f(x, y)\,\sqrt{dx^2 + dy^2}} \tag{3'}$$

sostituendo alla x ed alla y, nella $f(x, y)$ e nei differenziali dx e dy, le loro espressioni (2) in funzione di t (cioè le equazioni parametriche della curva). Si calcola quindi l'integrale della funzione in t che ne risulta, tra gli estremi dell'intervallo $[a, b]$ di variabilità del parametro t. Si dimostra che, una volta fissato il verso di percorrenza della curva, il risultato di quest'integrale non dipende dalla parametrizzazione della curva (cioè dalla scelta delle equazioni parametriche). Cambiando verso di percorrenza, l'integrale cambia di segno.

L'estensione del concetto di integrale curvilineo a funzioni di tre o più variabili è immediata. Nel caso di tre variabili l'elemento d'arco è

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

• Si osservi che nel caso particolare $f = 1$ la formula (3) fornisce la lunghezza della curva γ (vedi §7.7, formula (3)).

Esempio 1. Si consideri una semisfera di raggio R, con base equatoriale sul piano (x, y), ed un cilindro circolare retto di raggio $R/2$ parallelo all'asse z, passante per il centro della sfera. Volgiamo calcolare la superficie cilindrica delimitata dall'intersezione con la semisfera (nota ai matematici come *cilindroide di Viviani*).

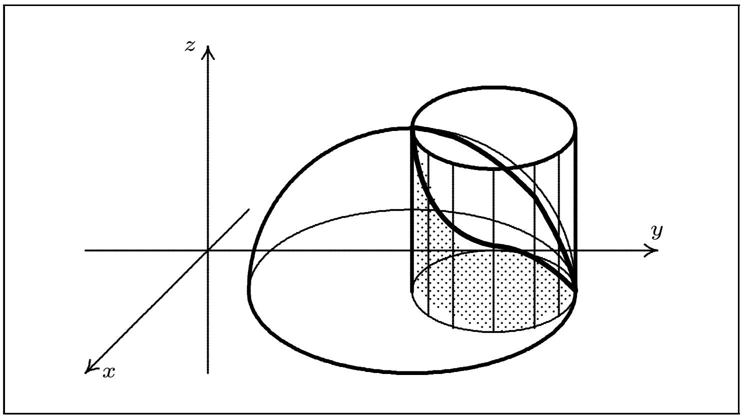


Fig. 7.6 - Cilindroide di Viviani.

Possiamo porre il centro della sfera nell'origine, l'asse del cilindro pasante per l'asse x:

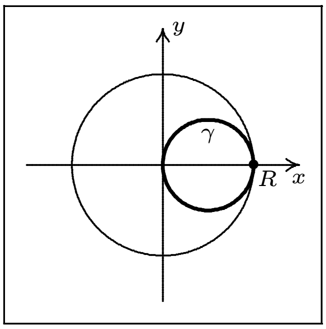


Fig. 7.7 - Curva d'integrazione.

La curva γ su cui integrare è la circonferenza γ centrara nel punto $(R/2, 0)$ e di diametro R (uguale al raggio della sfera). Possiamo considerarne le equazioni parametriche

$$x = \tfrac{R}{2}\,(1 + \cos t), \qquad y = \tfrac{R}{2}\,\sin t, \qquad t \in [0, 2\pi]. \tag{†}$$

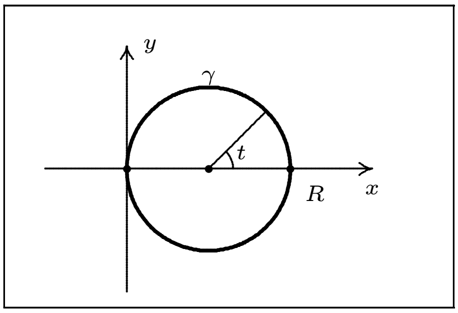


Fig. 7.8 - Prima parametrizzazione di γ.

Essendo

$$dx = -\tfrac{R}{2}\sin t\,dt, \qquad dy = \tfrac{R}{2}\cos t\,dt,$$

il quadrato dell'elemento d'arco è

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \tfrac{R^2}{4}\,dt^2.$$

Quindi

$$ds = \tfrac{R}{2}\,dt.$$

Siccome la semisfera è il grafico della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

l'area in questione è data dall'integrale curvilineo

$$\begin{aligned} A &= \int_\gamma f(x,y)\,ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 - \tfrac{R^2}{2}(1+\cos t)}\,\tfrac{R}{2}\,dt \\ &= \tfrac{R^2}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\,dt, \end{aligned}$$

osservato che $x^2+y^2 = \tfrac{R^2}{2}(1+\cos t)$. Quest'ultimo integrale può essere ridotto all'intervallo $[0,\pi]$,

$$A = \tfrac{R^2}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos t}\,dt.$$

Per l'integrazione indefinita si può procedere con la sostituzione

$$\cos t = u, \qquad t = \arccos u, \qquad t \in [0,\pi].$$

Si ha successivamente,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-\cos t}\,dt &= \int \sqrt{1-u}\,d\arccos u = -\int \sqrt{1-u}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du \\ &= -\int \frac{1}{\sqrt{1+u}}\,du = -\int (1+u)^{-\frac{1}{2}}\,d(1+u) \\ &= -2(1+u)^{\frac{1}{2}} + c = -2\sqrt{1+\cos t} + c. \end{aligned}$$

L'integrale definito risulta pertanto

$$A = \tfrac{R^2}{\sqrt{2}} \left[-2\sqrt{1+\cos t} \right]_0^\pi = \tfrac{R^2}{\sqrt{2}}\, 2\sqrt{2} = 2R^2.$$

Verifichiamo la correttezza del risultato $A = 2R^2$ utilizzando un'altra parametrizzazione della circonferenza γ:

$$x = R\cos^2\theta, \qquad y = R\sin\theta\,\cos\theta, \qquad \theta \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}].$$

Queste equazioni parametriche si ottengono ricordando che, in coordinate polari, $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$, eosservando dalla Fig. 7.9 che $\rho = R\cos\theta$.

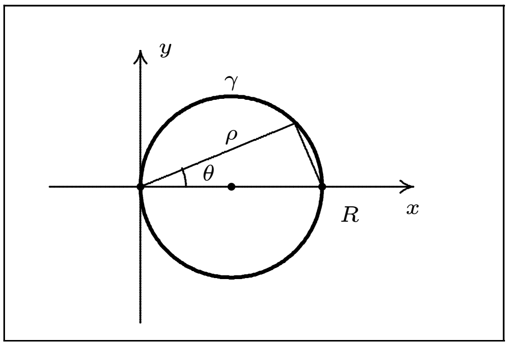


Fig. 7.9 - Seconda parametrizzazione di γ.

Essendo in questa parametrizzazione

$$dx = -2R\cos\theta\,\sin\theta, \qquad dy = R\,(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\,d\theta,$$

si ricava

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = R^2\,d\theta^2, \qquad ds = R\,d\theta.$$

Si ha inoltre

$$x^2 + y^2 = \rho^2 = R^2\cos^2\theta.$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} A &= \int_\gamma f(x,y)\,ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{R^2 - R^2\cos^2\theta}\,R\,d\theta \\ &= R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin\theta|\,d\theta = 2R^2 \int_0^{\pi/2} \sin\theta\,d\theta = -2R\left[\cos\theta\right]_0^{\pi/2} = 2R^2. \end{aligned}$$

7.11 - Integrali di forme differenziali. Una scrittura del tipo

$$\varphi = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy, \tag{1}$$

dove (A, B) sono funzioni delle due variabili (x, y), prende il nome di **forma differenziale** (in due variabili) oppure di **forma differenziale lineare** o di **grado** 1. Le funzioni (A, B) prendono il nome di **componenti** della forma differenziale.

Le forme differenziali in più di due variabili si definiscono in maniera analoga. Per esempio, una forma differenziale nello spazio (x, y, z) è una scrittura del tipo

$$\varphi = A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy + C(x,y,z)\,dz. \tag{2}$$

Un caso particolare ma importante di forma differenziale è il **differenziale di una funzione** $f(x, y)$ (consideriamo ancora il caso di due variabili) definito da:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy. \tag{3}$$

Si noti che questa scrittura si ottiene dalla formula della derivata totale moltiplicata per dt e che le componenti di df coincidono con quelle del gradiente di f.

Le forme differenziali sono oggetti atti ad essere integrati.

Consideriamo per semplicità forme differenziali in due variabili. Ha senso integrare una forma differenziale lungo una curva γ del piano cartesiano (x, y). Se la curva γ è rappresentata da equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [a, b], \tag{4}$$

e se queste equazioni sono tali da stabilire una corrispondenza biunivoca tra i punti dell'intervallo $[a, b]$ (con eventuale eslusione di alcuni punti o degli estremi, come nel caso di curve chiuse), allora si pone per definizione

$$\boxed{\begin{aligned} \int_\gamma \varphi &= \int_a^b \left[A\big(x(t), y(t)\big)\,dx(t) + B\big(x(t), y(t)\big)\,dy(t)\right] \\ &= \int_a^b \left[A\big(x(t), y(t)\big)\,\dot{x}(t) + B\big(x(t), y(t)\big)\,\dot{y}(t)\right]\,dt \end{aligned}} \tag{5}$$

dove $\dot{x}(t)$ e $\dot{\ }(t)$ sono al solito le derivate delle funzioni $x(t)$ e $y(t)$ rispetto al parametro t. Come si vede, l'ultimo integrale è l'integrale definito di una funzione del parametro t sopra l'intervallo chiuso $[a, b]$ (dove s'intendono definite le equazioni parametriche). Questa funzione integranda è ottenuta dalla forma differenziale $Adx + Bdy$ sostituendo alla x e alla y le equazioni parametriche. Si può dimostrare che cambiando la parametrizzazione della curva, cioè le equazioni parametriche che la descrivono, il risultato non cambia. Quindi:

- *L'integrale $\int_\gamma \varphi$ dipende solo dalla curva come luogo di punti e, in segno, dal verso di percorrenza. Percorrendo la curva in senso opposto, l'integrale cambia di segno.*

Si dimostra inoltre che se la curva γ è composta dalla successione di due (o più) curve γ_1 e γ_2 allora

$$\int_\gamma \varphi = \int_{\gamma_1} \varphi + \int_{\gamma_2} \varphi. \tag{6}$$

La nozione di integrale di una forma differenziale si presenta in Fisica con la definizione di lavoro di una forza applicata ad un punto che subisce uno spostamento lungo un cammino. Se un punto si muove sul piano ed il suo moto è descritto da equazioni parametriche del tipo (4), dove il parametro t è il tempo, la sua velocità è ad ogni istante data da

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}.$$

La potenza W di un campo di forza

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} A(x,y) \\ B(x,y) \end{bmatrix}$$

agente sul punto è ad ogni istante uguale al prodotto scalare della forza per la velocità,

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = A\,\dot{x} + B\,\dot{y}.$$

Il lavoro compiuto dalla forza in un intervallo di tempo $[a,b]$ è l'integrale della potenza in quell'intervallo, cioè l'integrale:

$$L_{[a,b]} = \int_a^b \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}\, dt = \int_a^b \Big(A\big(x(t), y(t)\big)\,\dot{x}(t) + B\big(x(t), y(t)\big)\,\dot{y}(t)\Big)\, dt. \tag{7}$$

Dal confronto con la formula (5) si vede che l'integrale (7) coincide con l'integrale della forma differenziale $\varphi = Adx + Bdy$ avente le stesse componenti della forza $\boldsymbol{F}$ lungo la curva γ descritta dal punto:

$$L_{[a,b]} = \int_\gamma \varphi = \int_\gamma A\,dx + B\,dy. \tag{8}$$

La forma differenziale φ è detta **lavoro elementare** (o anche **lavoro infinitesimo**) ed è sovente denotata con δL o con dL. Quest'ultima notazione non deve trarre in inganno perchè dL non sta a significare che il lavoro elementare è il differenziale di una funzione L.

Una forma differenziale $\varphi = Adx+Bdy$ si dice **esatta** se è il differenziale di una funzione $U(x,y)$, detta **potenziale**:

$$\varphi = Adx + Bdy = dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy. \tag{9}$$

In questo caso le componenti di φ sono le derivate parziali della funzione U,

$$A(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad B(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{10}$$

In Fisica, una forza $\mathbf{F}$ è detta **conservativa** se corrisponde ad una forma φ esatta. In questo caso $\mathbf{F}$ risulta essere il gradiente di U:

$$\boldsymbol{F} = \nabla U \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi = dU.$$

Si noti bene che:

• *Il potenziale (se esiste) è determinato a meno di una costante additiva (almeno in un dominio connesso, vedi oltre).*

Ci chiediamo quali sono le condizioni per l'esistenza di un potenziale. Derivando la prima delle uguaglianze (10) per y e la seconda per x, si osserva (sussistendo la commutabilità delle derivate parziali rispetto a x e y) che vale l'uguaglianza

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}} \tag{11}$$

Questa prende il nome di **condizione di chiusura** della forma $\varphi = Adx + Bdy$. Una forma soddisfacente a questa condizione si dice quindi **chiusa**. La condizione di chiusura è pertanto una <u>condizione</u> <u>necessaria</u> per l'esistenza di un potenziale, vale cioè l'implicazione

$$\boxed{\varphi \text{ esatta} \quad \Longrightarrow \quad \varphi \text{ chiusa}} \tag{12}$$

In altri termini, se la condizione di chiusura (11) non è soddisfatta, il potenziale non esiste.

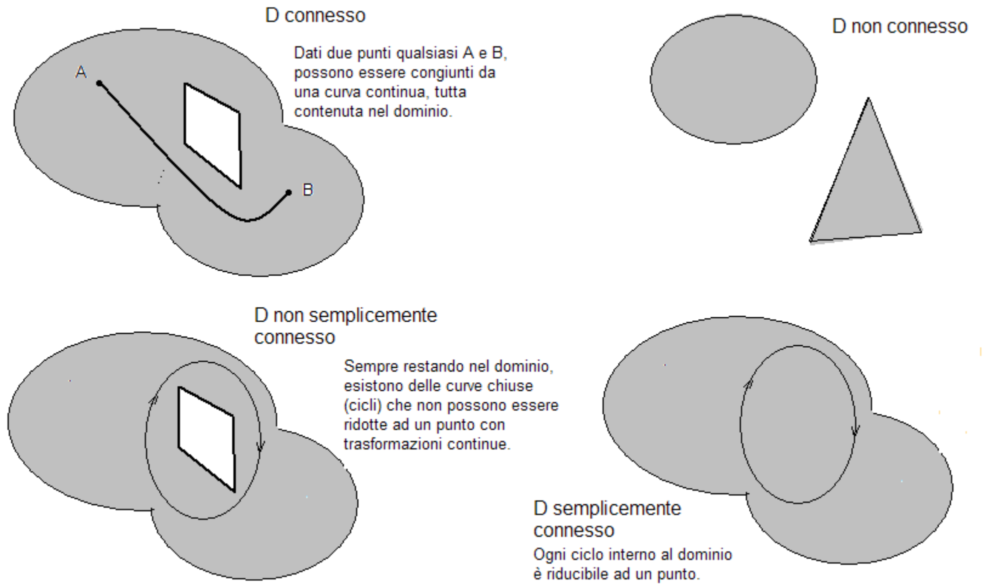
La (11) non è invece in generale sufficiente per l'esistenza del potenziale (se è soddisfatta, non è detto che esista potenziale). Diventa tuttavia sufficiente subordinatamente ad una opportuna condizione sul dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ in cui si lavora. Si dimostra infatti che

• *Se il dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ su cui si opera è semplicemente connesso, allora vale anche l'implicazione inversa della* (12),

$$\boxed{\varphi \text{ chiusa} \quad \Longrightarrow \quad \varphi \text{ esatta}} \tag{13}$$

Un dominio D si dice **connesso** se, fissati comunque due suoi punti, esiste una curva continua tutta contenuta in D che li congiunge. Si dice in particolare **semplicemente connesso** se, presi comunque due suoi punti e due qualsiasi curve γ e γ' che li congiungono, queste possono essere trasformate l'una nell'altra con continuità mantenendo fissi gli estremi, senza uscire dal dominio D oppure (condizione equivalente) se ogni curva chiusa può essere ridotta ad un punto, con continuità e senza uscire dal dominio D. Esempi: un disco, una sfera (piena o con una cavità), tutto lo spazio meno un punto, sono domini semplicemente connessi (del piano e dello spazio). Invece, tutto il piano meno un punto, una corona circolare, un toro (ciambella col buco), tutto lo spazio meno una retta, non sono semplicemente connessi.

.



Ritornando alle implicazioni precedenti (12) e (13) possiamo affermare che

• *In un dominio semplicemente connesso le condizioni di chiusura e di esattezza sono equivalenti:*

$$\boxed{\varphi \text{ chiusa} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \text{ esatta}} \tag{14}$$

Tuttavia questa equivalenza si completa in altre due equivalenze. Si dimostra infatti che:

• *In un dominio semplicemente connesso,*

$$\boxed{\begin{array}{c} \varphi \text{ chiusa} \\ \Updownarrow \\ \varphi \text{ esatta} \\ \Updownarrow \\ \displaystyle\int_\gamma \varphi \text{ dipende solo dagli estremi di } \gamma \\ \Updownarrow \\ \displaystyle\oint_\gamma \varphi = 0 \end{array}} \tag{15}$$

Col simbolo $\displaystyle\oint_\gamma$ s'intende l'integrale lungo una curva chiusa γ, detto **integrale ciclico**.

Queste equivalenze esprimono il **teorema fondamentale del calcolo integrale delle forme differenziali**. Va detto che per la sua validità le componenti della forma devono essere di classe almeno C^1, cioè con derivate parziali prime continue.

Questo enunciato va completato con le seguenti regole fondamentali:

• *Se esiste il potenziale U, l'integrale della forma differenziale $\varphi = dU$ è dato dalla differenza dei valori assunti dal potenziale agli estremi della curva γ:*

$$\int_\gamma \varphi = \int_\gamma dU = U(P_1) - U(P_0), \tag{16}$$

se la curva γ ha per estremi i punti P_0 e P_1, ed è percorsa da P_0 a P_1.

Viceversa,

• *Per calcolare il potenziale, ricordato che esso è definito a meno di una costante additiva, si fissa un punto di riferimento $P_0 \in D$ e si integra la forma differenziale lungo una curva (o una successione di curve) scelta arbitrariamente (ma convenientemente) che unisce P_0 ad un generico punto $P_1 \in D$, senza uscire da D.*

Il teorema fondamentale si estende al caso di forme differenziali in tre variabili (x, y, z)

$$\varphi = Adx + Bdy + Cdz,$$

rimpiazzando la condizione (13) con le **condizioni di chiusura**

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}, \qquad \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial y}, \qquad \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial z}} \tag{17}$$

***

Esempio 1. (a) Studiamo la forma differenziale

$$\varphi = 2xy\,dx + (x^2 + 3y^2)\,dy. \tag{†}$$

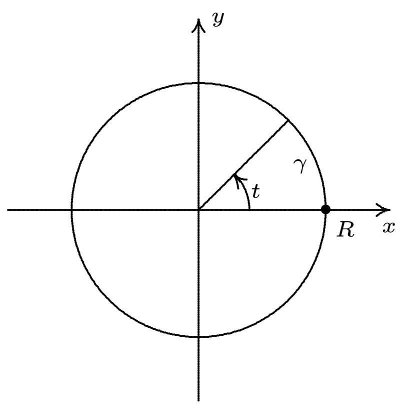
In questo caso, $A(x, y) = 2xy$ e $B(x, y) = x^2 + 3y^2$. Questa forma è chiusa; infatti:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial y} = 2x, \\ \dfrac{\partial B}{\partial x} = 2x. \end{cases}$$

Il suo dominio D di esistenza è tutto il piano $\mathbb{R}^2$, quindi semplicemente connesso. La forma è quindi esatta e valgono tutte le proprietà (15).

Per esempio, l'integrale su di un qualunque ciclo chiuso γ è nullo. Verifichiamolo nel caso della circonferenza di raggio R. Scegliamo le equazioni parametriche

$$x = R\cos t, \qquad y = R\sin t, \qquad t \in [0, 2\pi].$$



Applicando la formula (5), abbiamo

$$\begin{aligned}\int_\gamma \varphi &= \int_0^{2\pi} \left[2R^2 \cos t\, \sin t\; d(R\,\cos t) + (R^2\,\cos^2 t + 3R^2 \sin^2 t)\; d(R \sin t)\right] \\ &= -\,2R^3 \int_0^{2\pi} \cos t\;\sin^2 t\, dt + R^3 \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + 3\,\sin^2 t)\;\cos t\, dt \\ &= R^3 \int_0^{2\pi} \cos t\;\sin^2 t\, dt + R^3 \int_0^{2\pi} \cos^3 t\, dt.\end{aligned}$$

Osserviamo subito che, data la periodicità e il segno della funzione $\cos^3 t$, si ha

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 t\, dt = 0.$$

Resta quindi da calcolare l'integrale indefinito

$$\int \cos t\;\sin^2 t\, dt = \int \sin^2 t\; d(\sin t) = \int u^2\; du = \tfrac{1}{3}\; u^3 + c = \tfrac{1}{3}\;\sin^3 t + c,$$

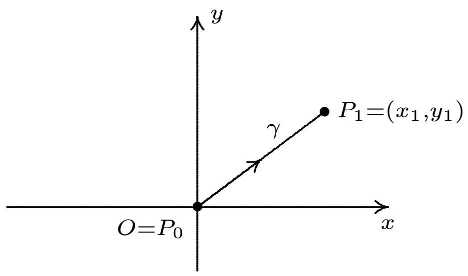
per cui

$$\int_0^{2\pi} \cos t\;\sin^2 t\, dt = \left[\tfrac{1}{3}\;\sin^3 t\right]_0^{2\pi} = 0,$$

cioè, come previsto,

$$\int_\gamma \varphi = 0.$$

(b) Vediamo ora come si calcola il potenziale. Integriamo la forma differenziale lungo il segmento γ che unisce l'origine $P_0 = O = (0,0)$ al punto $P_1 = (x_1, y_1)$.



Il segmento γ è descritto dalle equazioni parametriche

$$x = x_1\, t, \qquad y = y_1\, t, \qquad t \in [0, 1].$$

Pertanto, per la formula (5), tenuto conto che (x_1, y_1) sono fissati, si ha

$$\begin{aligned}\int_{\gamma'} \varphi &= \int_0^1 \left[2x_1 y_1\, t^2\; d(x_1 t) + t^2\,(x_1^2 + 3y_1^2)\, d(y_1 t)\right] \\ &= 2x_1^2 y_1 \int_0^1 t^2\; dt + x_1^2 y_1 \int_0^1 t^2\; dt + 3y_1^3 \int_0^1 t^2\; dt \\ &= 3\,(x_1^2\, y_1 + y_1^3) \int_0^1 t^2\, dt \\ &= 3\,(x_1^2\, y_1 + y_1^3)\; \tfrac{1}{3}\;\left[t^3\right]_0^1 \\ &= y_1\,(x_1^2 + y_1^2).\end{aligned}$$

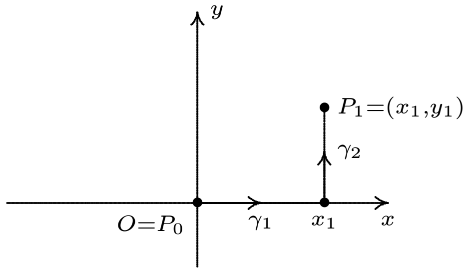
Lasciamo ora libero il punto P_1. Questo si fa togliendo l'*etichetta* 1 alle coordinate (x_1, y_1). L'ultimo risultato mostra allora che il potenziale è, a meno di una costante additiva,

$$U(x,y) = y\,(x^2 + y^2).$$

Verifichiamo la validità di questo risultato:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy = A(x,y), \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + 3y^2 = B(x,y).$$

(c) Ricalcoliamo il potenziale cambiando il percorso γ: andiamo dall'origine al punto $P_1 = (x_1, y_1)$ lungo i due segmenti γ_1 e γ_2 come in figura



In questo caso l'integrale della forma differenziale è dato dalla somma dei due integrali lungo γ_1 e γ_2:

$$\int_\gamma \varphi = \int_{\gamma_1} \varphi + \int_{\gamma_2} \varphi.$$

Nel primo integrale si ha $dy = 0$ perché $y = 0$ (costante), mentre x varia tra 0 e x_1, quindi:

$$\int_{\gamma_1} Adx + Bdy = \int_0^{x_1} 2xy\,dx = 0.$$

Nel secondo integrale si ha $x = x_1$ quindi $dx = 0$, mentre y varia tra 0 e y_1. Pertanto:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} Adx + Bdy &= \int_0^{y_1} (x^2 + 3y^2)\,dy = \int_0^{y_1} (x_1^2 + 3y^2)\,dy \\ &= x_1^2 y_1 + 3 \int_0^{y_1} y^2\,dy = x_1^2 y_1 + 3\,\tfrac{1}{3}\left[y^3\right]_0^{y_1} = y_1\,(x_1^2 + y_1^2).\end{aligned}$$

Abbiamo, com'era previsto, lo stesso risultato del caso (b).

Esempio 2. (a) Studiamo la forma differenziale

$$\varphi = \frac{1}{x^2 + y^2}\,\big(x\,dy - ydx\big). \tag{‡}$$

In questo caso

$$A(x,y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad B(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

e il dominio di definizione è $D = \mathbb{R}^2 - (0,0)$, non semplicemente connesso. La forma data è *chiusa*, perché

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial y} &= -\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left[x^2+y^2-y\,2y\right] = -\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \\ \frac{\partial B}{\partial x} &= \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left[x^2+y^2-x\,2x\right] = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

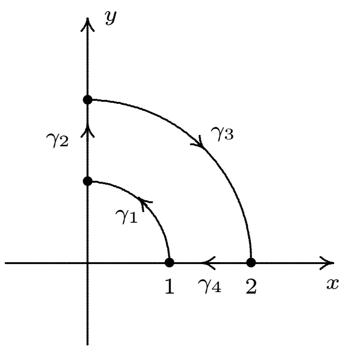
Essendo chiusa in un dominio semplicemente connesso c'è da attendersi che essa non sia esatta, cioè che non ammetta potenziale. Verifichiamo infatti che il suo integrale lungo una curva chiusa attorno all'origine (che non è contenuto nel dominio di definizione) non è nullo. Prendiamo per esempio il cerchio di raggio R centrato nell'origine. Con le solite sostituzioni abbiamo

$$\varphi = A\,dx + B\,dy = -\frac{R\sin t}{R^2}\,d(R\cos t) + \frac{R\cos t}{R^2}\,d(R\sin t) = \sin^2 t\,dt + \cos^2 t\,dt = dt.$$

Quindi

$$\int_\gamma \varphi = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

(b) Osserviamo tuttavia che prendendo una curva chiusa non contenente al suo interno il punto singolare (l'origine), l'integrale è nullo. Questo significa infatti considerare la forma chiusa φ ristretta ad un dominio di definizione semplicemente connesso, per cui risulta applicabile il Teorema fondamentale. Prendiamo per esempio la curva γ composta dalle quattro curve della figura:



Su γ_1, utilizzando coordinate polari (ρ,θ), abbiamo $x^2+y^2=\rho^2=1$, per cui

$$\int_{\gamma_1}\varphi = \int_0^{\pi/2}(\cos\theta\,d\sin\theta - \sin\theta\,d\cos\theta) = \int_0^{\pi/2} d\theta = \tfrac{\pi}{2}.$$

Su γ_2 abbiamo $x=0$, per cui la forma φ si riduce alla forma nulla:

$$\int_{\gamma_2}\varphi = 0.$$

Su γ_3 abbiamo $x^2 + y^2 = \rho^2 = 4$, per cui

$$\int_{\gamma_3} \varphi = \tfrac{1}{4} \int_{\pi/2}^{0} (2\cos\theta\, d(2\sin\theta) - 2\sin\theta\, d(2\cos\theta)) = -\int_0^{\pi/2} d\theta = -\tfrac{\pi}{2}.$$

Infine, su γ_4 abbiamo $y = 0$, per cui, essendo $dy = 0$, anche su questa curva abbiamo $\varphi = 0$ e quindi

$$\int_{\gamma_4} \varphi = 0.$$

Pertanto:

$$\int_{\gamma} \varphi = \int_{\gamma_1} \varphi + \int_{\gamma_2} \varphi + \int_{\gamma_3} \varphi + \int_{\gamma_4} \varphi = 0.$$

Capitolo 8

Le equazioni differenziali

8.1 - Equazioni differenziali del primo ordine. Il problema della determinazione delle primitive di una funzione $f(x)$ si può sintetizzare nell'equazione

$$y' = f(x) \tag{1}$$

che ha come incognita una funzione $y = F(x)$. Risolvere quest'equazione significa appunto determinare una funzione la cui derivata $y' = F'(x)$ è uguale a $f(x)$. Come sappiamo, se una tale funzione esiste (come accade quando f è continua) ne esistono infinite, tutte del tipo $y = F(x) + c$.

Un problema più generale è rappresentato da un'equazione del tipo

$$\boxed{y' = f(x, y)} \tag{2}$$

dove a secondo membro compare un'assegnata funzione nelle due variabili (x, y): si tratta di determinare una funzione $y = F(x)$ che sostituita nella (2) la soddisfa identicamente, cioè tale che per ogni valore ammissibile della x risulta identicamente

$$F'(x) = f\big(x, F(x)\big).$$

Un'equazione del tipo (2), nella funzione incognita $y = F(x)$, prende il nome di **equazione differenziale del primo ordine in forma normale**. Come nel caso particolare dell'equazione (1), che non contiene la funzione incognita y a secondo membro, anche per l'equazione (2) avremo in genere infinite soluzioni, dipendenti da una **costante arbitraria** c.

$\boxed{\text{E}}$ L'equazione differenziale

$$y' = x\, e^{-y} \tag{†}$$

è soddisfatta da tutte le funzioni del tipo

$$y = \log\left(\tfrac{1}{2}\, x^2 + c\right), \tag{‡}$$

qualunque sia la costante c. Infatti per queste funzioni si ha

$$y' = \frac{x}{\frac{1}{2}\, x^2 + c}, \qquad e^y = \tfrac{1}{2}\, x^2 + c,$$

e la (†) è identicamente soddisfatta.

Data un'equazione differenziale del tipo (2), si presentano due problemi:

(i) stabilire "se" e "quante" soluzioni ammette,

(ii) calcolarle.

Il problema dell'esistenza e dell'unicità delle soluzioni è risolto dal

• **Teorema di Cauchy**. *Sotto opportune condizioni di regolarità della funzione a due variabili $f(x, y)$, comunque si fissi un valore x_0 della variabile indipendente x ed un valore y_0 della funzione inognita y, esiste una ed una sola soluzione $y = F(x)$ dell'equazione differenziale* (2)*, definita in un intervallo contenente x_0 e tale che $F(x_0) = y_0$ (cioè tale che in x_0 essa assume il valore y_0 voluto).*

Queste "opportune condizioni di regolarità" possono essere precisate nell'ambito della teoria delle funzioni a due variabili. Esse richiedono che la funzione a due variabili $f(x, y)$ sia continua e che, come funzione della y, sia a "rapporto incrementale limitato" nel punto y_0 o almeno che essa ammetta derivata parziale f'_y (finita) in y_0.

I numeri (x_0, y_0) prendono il nome di **dati iniziali** o **condizioni iniziali**. Il teorema di Cauchy afferma in sostanza che i dati iniziali individuano una ed una sola soluzione. Dal punto di vista grafico questo significa che, assegnato un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ del piano di coordinate (x, y), per questo punto passa il grafico di una ed una sola soluzione dell'equazione differenziale. L'abbinamento di un'equazione in forma normale e delle condizioni iniziali

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{3}$$

prende il nome di **problema di Cauchy**. Il teorema afferma dunque che un problema di Cauchy (se le "opportune condizioni" sono soddisfatte) ammette una ed una sola soluzione.

$\boxed{\text{E}}$ Il seguente è un esempio di problema di Cauchy con più soluzioni:

$$\begin{cases} y' = x \sqrt[3]{y^2}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Due soluzioni distinte sono infatti $y_1 = \frac{1}{8}x^6$ e $y_2 = 0$. In questo caso la funzione $f(x, y) = xy^{\frac{2}{3}}$ non ammette derivata parziale f'_y finita per $y = 0$.

Variando le condizioni iniziali si determinano tutte le possibili soluzioni dell'equazione differenziale (2). Quando tutte queste possibili soluzioni sono espresse da un'unica funzione contenente una costante aritraria c, si dice che questa funzione è l'**integrale generale** dell'equazione differenziale. Il problema di Cauchy (3) si può quindi risolvere con la **particolarizzazione della costante arbitraria**, cioè con l'esprimere questa costante in funzione dei dati iniziali (x_0, y_0).

Per quel che riguarda invece il problema del calcolo delle soluzioni di un'equazione differenziale, cioè del problema dell'**integrazione** di un'equazione differenziale, va osservato che non esiste un "metodo generale" applicabile ad ogni tipo di equazione, esistono solo metodi applicabili a particolari tipi di equazioni. Questo problema, in certi casi molto difficile, si ritiene comunque risolto anche quando la determinazione della funzione incognita y è ricondotta al calcolo di uno o più integrali semplici, cioè integrali di funzioni in una variabile. Si usa dire, in questo caso, che il problema è ricondotto (o ridotto) alle quadrature.

8.2 - Equazioni a variabili separabili. Queste equazioni si presentano nella forma

$$\boxed{y' = A(x)\,B(y)} \tag{1}$$

La funzione $f(x, y)$ a secondo membro dell'equazione generale (8.6.2) è cioè il prodotto di una funzione $A(x)$ della sola x per una funzione $B(y)$ della sola y. L'integrazione di un'equazione a variabili separabili si riconduce immediatamente alle quadrature. Infatti, siccome $y' = dy/dx$, la (1) si può scrivere (almeno per $B(y) \neq 0$)

$$\frac{dy}{B(y)} = A(x)\,dx. \tag{2}$$

Si integrano ambo i membri,

$$\int \frac{dy}{B(y)} = \int A(x)\,dx, \tag{3}$$

ottenendo un'uguaglianza tra una funzione in y e una funzione in x (più una costante arbitraria), che occorre risolvere rispetto alla y.

$\boxed{\text{E}}$ L'equazione differenziale

$$y' = ay \tag{4}$$

è a variabili separabili: $A(x) = a$ (costante) e $B(y) = y$. Osserviamo innanzitutto che $y = 0$ è una soluzione. Per $y \neq 0$ la si pone sotto la forma

$$\frac{dy}{y} = a\,dx.$$

Integrando ambo i membri si trova

$$\log|y| = a\,x + c.$$

Si noti che è sufficiente considerare la costante additiva solo in uno dei due membri di quest'uguaglianza (per esempio a secondo membro). Occorre ora risolvere quest'equazione rispetto alla y. Per far questo basta prendere l'esponenziale di ambo i membri:

$$|y| = e^{ax+c} = e^c\,e^{ax}.$$

Siccome c è una costante arbitraria, e^c è una costante positiva arbitraria. Segue che $y = \pm e^c\,e^{ax}$. Possiamo allora concludere, rimpiazzando la costante arbitraria $\pm e^c$ con c, che

$$y = c\,e^{ax} \tag{5}$$

è la soluzione dell'equazione differenziale (4), anzi il suo integrale generale. La funzione (5) infatti, al variare della costante arbitraria c in tutto $\mathbb{R}$ fornisce tutte le possibili funzioni che soddisfano la (4), inclusa $y = 0$. Che la (5) sia una soluzione, per ogni $c \in \mathbb{R}$, è di verifica immediata: la sua derivata è $y' = ca\, e^{ax}$ e quindi si ha $y' = ay$. Che la (5) rappresenti proprio <u>tutte</u> le soluzioni segue dal fatto che il generico problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a\, y, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{6}$$

può essere risolto "particolarizzando la costante arbitraria" c, esprimendo cioè questa costante in funzione dei dati iniziali (x_0, y_0). Se si impone infatti la condizione $y(x_0) = y_0$ alla soluzione (5), se si pone cioè nella (5) $x = x_0$ e $y = y_0$, si trova $c\, e^{ax_0} = y_0$, e di qui si ricava la costante c in funzione dei dati iniziali: $c = y_0\, e^{-ax_0}$. Sostituendo quindi quest'espressione della c nella (5) si trova

$$y = y_0\, e^{a(x-x_0)}. \tag{7}$$

Questa è la soluzione del problema di Cauchy (6). Si noti bene che la (5) e la (7) esprimono lo stesso insieme di funzioni, sebbene in maniera diversa: la (5) mediante costanti arbitrarie, la (7) mediante i dati iniziali.

$\boxed{\text{E}}$ **Sviluppo ideale di una popolazione isolata**. L'equazione differenziale dell'esempio precedente è coinvolta in molte applicazioni. Vediamone una. Sia $y(x)$ il numero degli individui di una popolazione al tempo x (nelle considerazioni su popolazioni con grandi numeri è accettabile l'ipotesi semplificativa che questa funzione abbia valori continui, non interi). L'incremento della popolazione Δy in un intervallo di tempo $(x, x + \Delta x)$ è in condizioni ideali (di pace, di salute, di abbondanza di risorse) proporzionale al numero degli individui e all'incremento del tempo:

$$\Delta y = a\, y\, \Delta x. \tag{$*$}$$

Il coefficiente di proporzionalità a, nelle condizioni ideali di cui si è detto, si può ritenere costante e pari alla differenza $a = N - M$ tra tasso di natalità N e tasso di mortalità M. Siccome dalla $(*)$ segue

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a\, y,$$

passando al limite per $\Delta x \to 0$ si trova

$$\frac{dy}{dx} = a\, y.$$

Questa è l'equazione differenziale (4). Essa regola la crescita della popolazione isolata in condizioni "ideali". Dalla soluzione (7) si vede che una tale crescita è sempre esponenziale.

$\boxed{\text{E}}$ Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x\, e^{-y}, \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{$\diamond$}$$

Si noti che in questo caso è $x_0 = 0$ e $y_0 = 1$ e l'equazione differenziale è quella dell'esempio di §8.1. Come nell'esempio precedente, si separano le variabili scrivendo l'equazione nella forma

$$e^y\, dy = x\, dx.$$

Integrando ambo i membri si trova

$$e^y = \tfrac{1}{2}x^2 + c.$$

Applicando il logaritmo si trova l'integrale generale

$$y = \log\left(\tfrac{1}{2}x^2 + c\right).$$

Particolarizziamo la costante imponendo i dati iniziali:

$$1 = \ln(0 + c).$$

Dunque $c = e$ e la soluzione del problema di Cauchy ($\diamond$) è

$$y = \ln\left(\tfrac{1}{2}x^2 + e\right).$$

8.3 - Equazioni differenziali in forma implicita. Un legame tra la variabile indipendente x, una funzione incognita $y(x)$ e la sua derivata prima $y'(x)$, espresso da un'uguaglianza del tipo

$$E(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

dove E è una assegnata funzione nelle tre variabili (x, y, y'), prende il nome di **equazione differenziale del primo ordine**. Se non è possibile "risolvere" l'equazione (1) rispetto alla variabile y' in modo che essa appaia del tipo (8.1.2) (cioè in forma normale) l'equazione differenziale (1) si dice in **forma implicita**. Per questo tipo di equazioni può non valere l'esistenza e l'unicità delle soluzioni. Per esempio

$$y'^2 - xy = 0$$

non è riconducibile in forma normale ed è quindi in forma implicita. Essa si spezza infatti in due equazioni in forma normale:

$$y' = \sqrt{xy}, \qquad y' = -\sqrt{xy}.$$

Abbiamo due soluzioni distinte soddisfacenti alla condizione iniziale $y(0) = 0$: sono $y = \frac{1}{9}x^3$ e $y = 0$. Per una condizione iniziale del tipo $y(1) = -1$ (cioè con $x_0 = 1$ e $y_0 = -1$) non ci sono soluzioni (perché deve sempre essere $xy \geq 0$).

8.4 - Equazioni del primo ordine lineari. Sono della forma

$$\boxed{y' = a(x)\,y + b(x)} \tag{1}$$

dove $a(x)$ e $b(x)$ sono funzioni assegnate della x. Si dimostra che l'integrale generale di un'equazione di questo tipo è

$$\boxed{y = e^{A(x)} \int b(x)\, e^{-A(x)} dx} \tag{2}$$

dove $A(x)$ è una qualunque primitiva di $a(x)$.

$\boxed{\text{E}}$ L'equazione

$$y' = y + x \tag{†}$$

è lineare, con $a(x) = 1$ e $b(x) = x$. Siccome una primitiva di $a(x)$ è $A(x) = x$, la formula (2) fornisce

$$y = e^x \left(\int x\, e^{-x}\, dx + c \right).$$

L'integrale indefinito si può calcolare per parti:

$$\int xe^{-x} dx = -\int x\, de^{-x} = -x\, e^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -x\, e^{-x} - e^{-x}]c = -(1+x)\, e^{-x}]c.$$

Dunque

$$y = c\, e^x - (1+x).$$

L'equazione (†) può anche risolversi per sostituzione. Conviene porre $z = y + x$. Siccome $z' = y' + 1$, la (†) equivale allora a $z' = 1 + z$, e quest'equazione nell'incognita z è integrabile per separazione delle variabili.

8.5 - Equazioni differenziali del secondo ordine. Un'equazione del tipo

$$\boxed{y'' = f(x, y, y')} \tag{1}$$

dove il secondo membro è una funzione assegnata delle tre variabili (x, y, y') è un'**equazione differenziale del secondo ordine in forma normale** nell'incognita $y(x)$: si tratta di determinare le eventuali funzioni $y(x)$ che la soddisfano identicamente. In questo caso però per la determinazione di una singola soluzione occorre assegnare non solo il valore y_0 della funzione $y(x)$ in x_0 ma anche il valore y_0' della sua derivata prima $y'(x)$ in x_0. Il problema di Cauchy è cioè espresso dal sistema:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0'. \end{cases} \tag{2}$$

Vale anche in questo caso il teorema di esistenza ed unicità della soluzione (anche qui sotto "opportune" condizioni di regolarità della funzione f). L'integrale generale (quando esiste) di un'equazione di secondo ordine contiene due costanti arbitrarie. Queste si possono particolarizzare in base ai dati iniziali. Consideriamo nei prossimi paragrafi solo due tipi di equazioni del secondo ordine, di fondamentale importanza per la Fisica.

Analogamente al caso del primo ordine, si possono considerare, più in generale, equazioni differenziali del secondo ordine in forma iplicita, cioè del tipo

$$E(x, y, y', y'') = 0,$$

dove E è una assegnata funzione nelle quattro variabili (x, y, y', y'').

8.6 - Equazione dell'oscillatore armonico o dei moti armonici. È l'equazione

$$\boxed{y'' + \omega^2 y = 0} \tag{1}$$

dove ω è una costante (positiva). Si osserva subito che le funzioni

$$y = \sin\omega x, \qquad y = \cos\omega x$$

sono soluzioni dell'equazione (qui e nel seguito scriviamo per semplicità $\sin\omega x$ invece di $\sin(\omega x)$, ecc.). Di qui si deduce che l'integrale generale è una loro combinazione lineare a coefficienti costanti

$$\boxed{y = a\,\sin\omega x + b\,\cos\omega x} \tag{2}$$

Vi compaiono dunque due costanti arbitrarie (a, b). Queste costanti si possono particolarizzare assegnando i dati iniziali (x_0, y_0, y_0'). Se accanto all'integrale generale (21) consideriamo la sua derivata

$$y' = a\,\omega\,\cos\omega x - b\,\omega\,\sin\omega x, \tag{3}$$

imporre le condizioni iniziali significa imporre le equazioni

$$\begin{cases} y_0 = a\,\sin\omega x_0 + b\,\cos\omega x_0, \\ y_0' = a\,\omega\,\cos\omega x_0 - b\,\omega\,\sin\omega x_0. \end{cases} \tag{4}$$

Questo è un sistema lineare nelle incognite (a, b), la cui soluzione è

$$\begin{cases} a = y_0\,\sin\omega x_0 - \frac{1}{\omega}\,y_0'\,\cos\omega x_0, \\ b = y_0\,\cos\omega x_0 - \frac{1}{\omega}\,y_0'\,\sin\omega x_0. \end{cases} \tag{5}$$

Si noti che l'integrale generale (2) può anche esprimersi nelle due forme equivalenti

$$\boxed{y = A\,\sin(\omega x + \varphi), \qquad y = A\,\cos(\omega x + \psi)} \tag{6}$$

dove (A, φ) e (A, ψ) sono altre due coppie di costanti arbitrarie: A è detta **ampiezza**, φ **fase**.

Si noti che la (2) e le (6) forniscono tre rappresentazioni diverse ma equivalenti dell'integrale generale dell'equazione dell'oscillatore armonico. In genere, nelle applicazioni di quest'equazione, la variabile indipendente x è il tempo t.

8.7 - Equazione del secondo ordine lineare a coefficienti costanti. È l'equazione del tipo

$$\boxed{a\,y'' + 2b\,y' + c\,y = 0} \tag{1}$$

dove a, b, c sono costanti (l'equazione dei moti armonici ne è un caso particole). Per risolvere quest'equazione occorre considerare l'**equazione caratteristica** associata

$$a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0.$$

A seconda delle radici di quest'equazione algebrica di secondo grado, si hanno diversi tipi di integrali generali:

$\boxed{1}$ Se $\Delta = b^2 - ac > 0$ si hanno due radici reali distinte (λ_1, λ_2) e l'integrale generale è

$$\boxed{y = c_1\,e^{\lambda_1 x} + c_2\,e^{\lambda_2 x}} \tag{I}$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie.

$\boxed{2}$ Se $\Delta = 0$ si hanno due radici reali coincidenti λ e l'integrale generale è

$$\boxed{y = (c_1 + c_2\,x)\,e^{\lambda x}} \tag{II}$$

$\boxed{3}$ Se $\Delta = b^2 - ac < 0$ si hanno due radici complesse distinte. In questo caso l'integrale generale è

$$\boxed{y = e^{-\frac{b}{a}x}\big(c_1\,\cos\omega x + c_2\,\sin\omega x\big)} \tag{III}$$

dove

$$\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{a} = \frac{ac - b^2}{a}$$

In quest'ultimo caso l'andamento delle soluzioni è oscillatorio, con ampiezza decrescente (oscillatorio smorzato) o crescente. Se $b/a > 0$, le oscillazioni sono smorzate: $e^{-\frac{b}{a}x}$ è il "fattore di smorzamento" (è una funzione decrescente). Viceversa, se $b/a < 0$ quest fattore è crescente e le oscillazioni vanno crescendo di ampiezza. Infine, se $b = 0$, si ricade nel caso dei moti armonici, e le soluzioni hanno ampiezza costante.

$\boxed{\text{E}}$ Consideriamo p.es. l'equazione

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

In questo caso $a = b = 1$ e $c = 5$. L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

e ammette due radici complesse perché

$$\Delta = b^2 - ac = -4 < 0.$$

In questo caso

$$\tfrac{b}{a} = 1, \qquad \omega = \tfrac{1}{a}\sqrt{-\Delta} = 2.$$

Quindi l'integrale generale è

$$y = e^{-x}\,(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x).$$

Le oscillazioni sono smorzate.

L'equazione del tipo (1) ora considerato si dice anche **omogenea**, per distinguerla dall'equazione analoga, detta **non omogenea**, dove a secondo membro compare una assegnata funzione $f(x)$:

$$\boxed{a\,y'' + 2b\,y' + c\,y = f(x)} \tag{2}$$

Quest'equazione è anche detta delle **oscillazioni forzate**. Si dimostra che:

• *L'integrale generale dell'equazione non-omogenea* (2) *è dato dalla somma di* <u>*una qualunque*</u> *sua soluzione particolare e dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata* (1).

Siccome conosciamo già i vari tipi di integrali generali che l'equazione omogenea ammette, il problema è quello di trovare soluzioni particolari (ne basta una) dell'equazione non omogenea.

***

Esercizi

Equazioni a variabili separabili:

1.- $yy' = x \quad (y = \sqrt{x^2 + c})$

2.- $xy' = y \quad (y = cx)$

3.- $y' = x^2\, e^{-y} \quad (y = 3 \log|x| + c)$

4.- $xy' - y^2 = 1 \quad (y = \tan(\log|x| + c))$

Equazioni lineari omogenee:

1.- $y' + y = 1 \quad (y = 1 + ce^{-x})$

2.- $xy' + y = 1 + x^2 \quad (y = 1 + \frac{1}{3}\,x^2 + \frac{c}{x})$

3.- $y' + y = x^2 \quad (y = x^2 - 2x + 2 + ce^{-x})$

4.- $xy' + y = \log x \quad (y = \log x - 1 + \frac{c}{x})$

Capitolo 9

I numeri complessi

9.1 - Numeri complessi, somma e prodotto. Un **numero complesso** è una scrittura del tipo

$$\boxed{z = x + iy} \tag{1}$$

dove (x, y) è una coppia di numeri reali ed i è un simbolo detto **unità immaginaria**. L'insieme dei numeri complessi $x + i\,y$, denotato con $\mathbb{C}$, coincide quindi con l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali (x, y), cioè con il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

La scrittura (1) è detta **forma algebrica** o **forma ordinaria** del numero complesso z. Come vedremo, un numero complesso ammette altre "forme", cioè altri tipi di rappresentazione. Il primo numero x si dice **parte reale** del numero complesso z, il termine iy si dice **parte immaginaria**, il numero y si dice **coefficiente della parte immaginaria**.

Sui numeri complessi si stabilisce un calcolo con regole formali analoghe a quelle dei numeri reali, con la sola differenza che il prodotto dell'unità immaginaria per se stessa è posto per definizione uguale a -1:

$$\boxed{ii = i^2 = -1} \tag{2}$$

Pertanto la somma ed il prodotto di due numeri complessi sono definite alla maniera seguente:

$$\begin{cases} (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y'), \\ (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y). \end{cases} \tag{3}$$

Valgono le proprietà commutativa, associativa, distributiva. Si crea in tal modo un insieme numerico $\mathbb{C}$, detto **campo complesso**, nel quale, al contrario del campo reale $\mathbb{R}$, certe operazioni sono sempre possibili, come la radice quadrata di un numero negativo o la risoluzione di un'equazione algebrica di secondo grado.

I numeri complessi del tipo $x + i0$ (cioè con parte immaginaria nulla) si comportano esattamente, nelle operazioni di somma e prodotto, come i numeri reali. Dunque il campo dei numeri reali può essere considerato come sotto-campo dei numeri complessi. Si scrive semplicemente x al posto di $x + i0$.

Quando $x = 0$ il numero complesso $z = iy$ si dice **immaginario** (o **immaginario puro**). Il numero $0 + i0$, coincidente con lo zero dei numeri reali, si comporta da elemento neutro nella somma, cioè $z + 0 = z$. Invece il numero $1 + i0$, coincidente con il numero reale 1, si comporta da elemento neutro del prodotto, cioè $1z = z$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

9.2 - Coniugato, modulo, inverso di un numero complesso. Sui numeri complessi, oltre alla somma ed al prodotto, si definisce una terza operazione, la **coniugazione**: il **coniugato** di un numero complesso $z = x + iy$ è il numero complesso

$$\boxed{z^* = x - iy}$$

ottenuto cambiando di segno la parte immaginaria. Lo si denota anche con $\bar{z}$. Si osservi che un numero complesso è reale se e solo se coincide col suo coniugato. Infatti $(x + iy)^* = x + iy \iff x - iy = x + iy \iff y = 0$.

Valgono le seguenti proprietà.

(i) Il coniugato di una somma è la somma dei coniugati:

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*. \tag{1}$$

(ii) Il coniugato di un prodotto è il prodotto dei coniugati:

$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*. \tag{2}$$

Applicando la regola della moltiplicazione $(9.1.3)_2$, si trova

$$zz^* = x^2 + y^2. \tag{3}$$

Dunque il prodotto di un numero complesso per il suo coniugato è un numero reale positivo o nullo, nullo solo se è $z = 0$ (cioè $x = y = 0$).

Il **modulo** di un numero complesso $z = x + iy$ è il numero reale non negativo

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{4}$$

Questo si annulla solo per il numero complesso $z = 0$. Dunque la (3) si scrive anche

$$zz^* = |z|^2. \tag{5}$$

Dividendo per $|z|^2 = x^2 + y^2$ si trova

$$z \, \frac{z^*}{x^2 + y^2} = 1.$$

Ciò mostra che l'**inverso** o **reciproco** (secondo il prodotto) di un numero complesso z, denotato con $\frac{1}{z}$ o z^{-1}, è dato da

$$z^{-1} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{z^*}{|z|^2}. \tag{6}$$

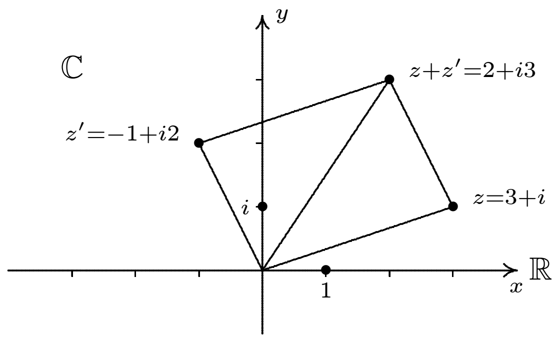
9.3 - Rappresentazione geometrica di un numero complesso. Come si è detto, i numeri complessi sono in corrispondenza biunivoca con le coppie di numeri reali:

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \quad \longleftrightarrow \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2.$$

Di conseguenza, essi sono in corrispondenza biunivoca coi punti del piano riferito a coordinate cartesiane (x, y). L'asse x si chiama allora **asse reale** e l'asse y **asse immaginario**, e tutto il piano, **piano complesso**. Si noti infatti che i numeri reali coincidono coi punti dell'asse x, i numeri immaginari puri coi punti dell'asse y.

Un numero complesso $z = x + iy$ si identifica non solo col punto P di coordinate (x, y) ma anche col vettore $OP = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ (**rappresentazione vettoriale**). Di conseguenza, si osserva che:

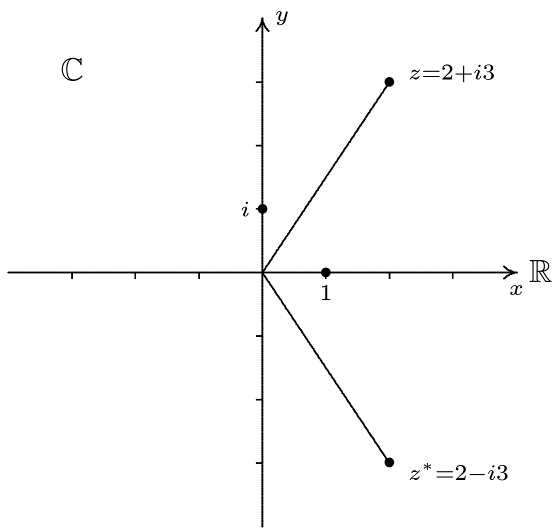
• *la somma di due numeri complessi coincide con la somma dei vettori rappresentativi secondo la regola del parallelogramma.*



Si osserva inoltre che

• *il coniugato z^* di un numero complesso z è il simmetrico di z rispetto all'asse reale x,*

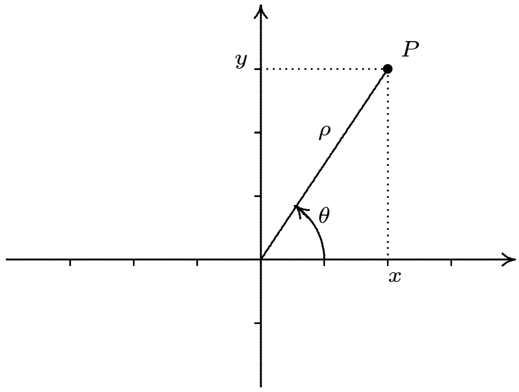
perché la parte immaginaria è cambiata di segno, mentre la parte reale resta invariata.



9.4 - Coordinate polari del piano. Per rappresentare i punti del piano cartesiano è a volte conveniente usare altri tipi di coordinate. Tra queste, particolarmente importanti sono le **coordinate polari**, denotate di solito con (ρ, θ), o anche con (r, θ). Il numero positivo o nullo ρ, detto **raggio**, è la distanza del generico punto P dall'origine, cioè il modulo del vettore posizione OP

$$\rho = |OP| \tag{1}$$

Il numero θ è invece l'angolo, detto **anomalia** del punto P, compreso tra il vettore OP e il semiasse positivo delle x, misurato in senso antiorario a partire dal semiasse positivo delle x.



L'anomalia è determinata a meno di multipli di 2π. È indeterminata per il punto O, origine delle coordinate.

Il legame tra le coordinate polari (ρ, θ) e le coordinate cartesiane ortogonali (x, y) è dato dalle uguaglianze

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta, \\ y = \rho \sin\theta. \end{cases} \tag{2}$$

Quadrando e sommando queste uguaglianze si trova $x^2 + y^2 = \rho^2$; dividendo membro a membro, supposto $x \neq 0$, si trova $\tan\theta = \frac{y}{x}$. Si deducono quindi le uguaglianze inverse delle (2), tenuto conto che la funzione arcotangente assume, per definizione, valori compresi tra $-\pi/2$ e $\pi/2$ (estremi esclusi):

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x} & \text{se } x > 0, \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0. \end{cases} \end{cases} \tag{3}$$

9.5 - Rappresentazione polare o trigonometrica di un numero complesso. Grazie alle equazioni di trasformazione (9.4.2), un numero complesso $z = x + iy$ può essere scritto in **forma polare** o **trigonometrica**

$$\boxed{z = \rho\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)} \tag{1}$$

I numeri reali ρ e θ si dicono rispettivamente **modulo** e **argomento** del numero complesso z.

Osserviamo che:

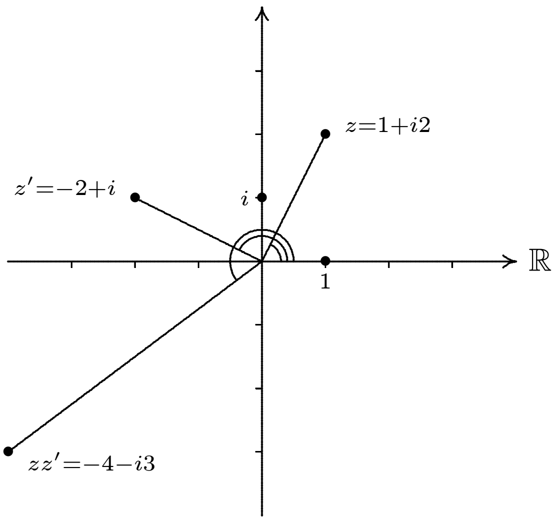
• *il coniugato di un numero complesso ha lo stesso modulo ma argomento opposto.*

Grazie alla rappresentazione polare abbiamo anche una semplice interpretazione del prodotto di due numeri complessi:

• *il prodotto di due numeri complessi ha come modulo il prodotto dei moduli e come argomento la somma degli argomenti.*

Infatti, utilizzando le formule di addizione del seno e del coseno, abbiamo successivamente

$$\begin{aligned} z\,z' &= \rho\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)\;\rho'\,(\cos\theta' + i\,\sin\theta') \\ &= \rho\,\rho'\,\big[(cos\theta\,\cos\theta' - \sin\theta\,\sin\theta') + i\,(\sin\theta\,\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta)\big] \\ &= \rho\,\rho'\big[\cos(\theta+\theta') + i\,\sin(\theta+\theta')\big]. \end{aligned}$$



Osserviamo che l'unità immaginaria i ha modulo 1 e argomento $\frac{\pi}{2}$ (cioè 90°). Quindi:

• *moltiplicare un numero complesso z per i significa farlo "ruotare" di 90° nel verso antiorario.*

9.6 - Le formule di Euler e di De Moivre. Il numero complesso di modulo 1 e argomento θ è denotato con $e^{i\theta}$. Si pone cioè

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta} \tag{1}$$

Questa è la celebre **formula di Euler**, che stabilisce una sorprendente relazione, nel campo complesso, tra l'esponenziale e le funzioni circolari seno e coseno.

La funzione esponenziale e^z può infatti essere estesa al campo complesso mediante la sua rappresentazione, valida nel campo reale, in serie di potenze. Si pone cioè per definizione:

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\,z^n, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Si dimostra che questa serie è ovunque convergente e che la si può considerare come somma di due serie: quella delle potenze pari e quella delle potenze dispari,

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}\, z^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\, z^{2n+1} \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} z^2 + \tfrac{1}{4!} z^4 + \tfrac{1}{6!} z^6 + \ldots + z + \tfrac{1}{3!} z^3 + \tfrac{1}{5!} z^5 + \tfrac{1}{7!} z^7 + \ldots \end{aligned}$$

Nel caso in cui z sia immaginario puro, cioè $z = i\theta$, si osserva che la serie delle potenze pari diventa uguale a

$$1 - \tfrac{1}{2}\theta^2 + \tfrac{1}{4!}\theta^4 - \tfrac{1}{6!}\theta^6 + \ldots$$

cioè alla serie di $\cos\theta$, mentre la serie dispari diventa uguale a

$$+i\theta - \tfrac{i}{3!}\theta^3 + \tfrac{i}{5!}\theta^5 - \tfrac{i}{7!}\theta^7 + \ldots$$

cioè, raccogliendo a fattore i, alla serie di $i \sin\theta$. Quindi la formula di Euler segue dalla (2) per $z = i\theta$.

Valendo la formula di Euler, il numero complesso di modulo ρ e argomento θ è rappresentabile con la scrittura

$$\boxed{z = \rho\, e^{i\theta}} \tag{3}$$

Osserviamo che:

• *moltiplicare un numero complesso per il numero* $e^{i\theta}$, *con* $\theta > 0$, *significa farlo ruotare di un angolo* θ *in verso antiorario.*

Dalla regola di moltiplicazione di due numeri complessi, segue che la potenza n-sima di un numero complesso $z = \rho\, e^{i\theta}$ ha come modulo la potenza ρ^n del modulo e come argomento $n\theta$, n volte l'argomento. Vale quindi la **formula di De Moivre** sulle potenze intere di un numero complesso

$$\boxed{z^n = \rho^n \,\big(\cos(n\theta) + i\,\sin(n\theta)\big) = \rho^n\, e^{in\theta}} \tag{4}$$

9.7 - Radici n-esime di un numero complesso. Una radice n-esima di un numero complesso z è un numero complesso w tale che $w^n = z$. È notevole il fatto che *ogni numero complesso* $z \neq 0$ *ammette esattamente* n *radici* n*-esime distinte*. Se il numero z è dato in forma trigonometrica, $z = \rho\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$, allora le n radici n-sime w_k, con $k = 0, 1, \ldots, n-1$, si ottengono con la formula

$$\boxed{w_k = \sqrt[n]{\rho}\,\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\,\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} \tag{1}$$

dove con $\sqrt[n]{\rho}$ s'intende, al solito, il numero reale positivo la cui potenza n-esima è uguale a ρ. Utilizzando la formula di Moivre si vede infatti che

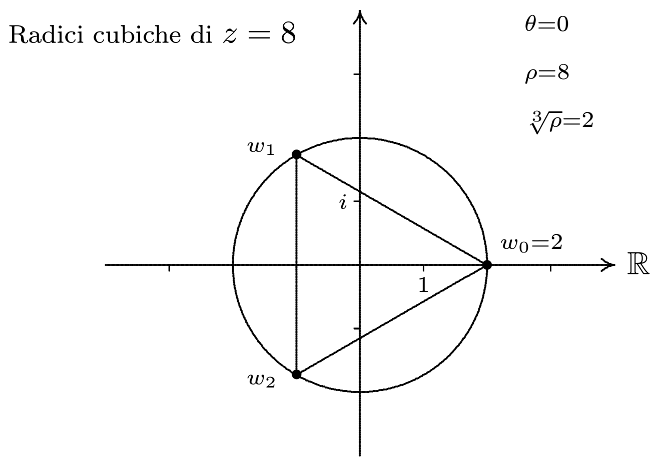
$$w_k^n = \rho\,\big(\cos(\theta + 2k\pi) + i\,\sin(\theta + 2k\pi)\big) = \rho\,\big(\cos\theta + i\,\sin\theta\big) = z.$$

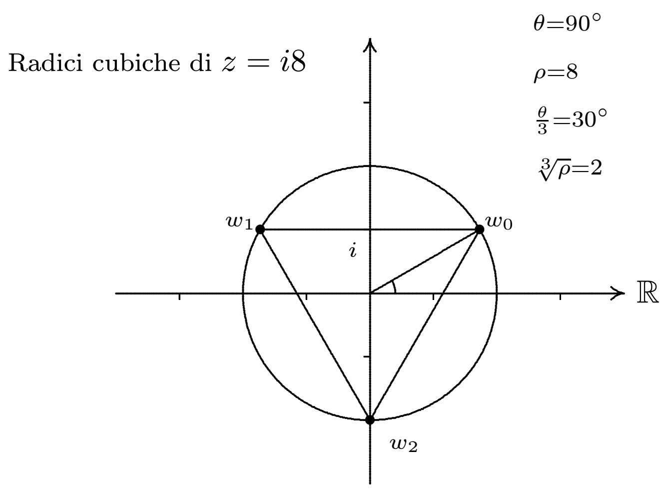
Inversamente, con ragionamento analogo si vede che ogni radice è necessariamente del tipo (1) con k numero intero opportuno. La formula (1) mostra che:

• *Nel piano complesso le n radici n-esime di un numero complesso $z = \rho\, e^{i\theta}$ sono rappresentate dai vertici di un poligono regolare di n lati, inscritto nella circonferenza di raggio $\sqrt[n]{\rho}$ e centrata nell'origine, dei quali uno ha anomalia θ/n.*

Per costruire questo poligono, una volta tracciata la circonferenza di raggio $\sqrt[n]{\rho}$, si può partire dal vertice corrispondente alla prima radice w_0, il cui argomento è θ/n. Per esempio, il numero 1 ammette n radici n-esime distinte rappresentate dai vertici del poligono di n lati inscritto nella circonferenza unitaria, uno dei quali è posto nel numero 1 stesso, cioè nel punto $(1, 0)$.

Nelle due figure seguenti sono p.es. rappresentate le radici cubiche di $z = 8$ e di $z = i8$, rispettivamente:





9.8 - Teorema fondamentale dell'algebra. Un **polinomio di grado** n in una variabile (o "indeterminata") z è un'espressione del tipo

$$P_n(z) = a_0\, z^n + a_1\, z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, z + a_n, \tag{1}$$

dove $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ sono $n+1$ numeri assegnati, detti **coefficienti** del polinomio.

Un'**equazione algebrica di grado** n è un'equazione del tipo $P_n(z) = 0$, cioè

$$a_0\, z^n + a_1\, z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, z + a_n = 0. \tag{2}$$

Una **soluzione** o **radice** dell'equazione è un numero che sostituito al posto della z soddisfa l'equazione, annulla cioè il polinomio a primo membro (una radice dell'equazione si dice anche **radice del polinomio**).

Un'equazione algebrica si dice <u>reale</u> se i suoi coefficienti sono tutti reali. Equazioni algebriche reali possono non avere radici reali. Per esempio l'equazione $z^2 + 1 = 0$, oppure, più in generale, l'equazione algebrica di secondo grado

$$az^2 + bz + c = 0,$$

quando il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ è negativo.

Nel campo complesso (dove, per le equazioni algebriche, non si escludono coefficienti e radici complesse), sussiste il

• **Teorema fondamentale dell'algebra**: *nel campo complesso ogni equazione algebrica di grado n ammette n radici.*

Questo teorema equivale al seguente

• **Teorema di fattorizzazione**: *nel campo complesso ogni polinomio di grado n si può rappresentare come prodotto di n* **monomi** *(cioè polinomi di primo grado):*

$$a_0\, z^n + a_1\, z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, z + a_n = a_0\,(z - z_1)\,(z - z_2)\ldots(z - z_n), \tag{3}$$

dove $(z_i) = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ sono numeri complessi.

Questi numeri sono appunto le radici del polinomio (ovvero dell'equazione associata). Infatti, se si sceglie una qualunque delle z_i e si pone $z = z_i$, uno dei monomi si annulla e quindi anche $P_n(z_i) = 0$. Si noti che sviluppando i prodotti dei monomi si trova che il coefficiente della potenza massima z^n è proprio a_0, il primo coefficiente del polinomio $P_n(z)$.

Le n radici possono non essere tutte distinte. Si introduce allora la nozione di **molteplicità di una radice** che è il numero di volte con cui compare nello sviluppo in fattori (3). Una radice di molteplicità 1 si dice **semplice**, **doppia** se di molteplicità 2, ecc.

Per le equazioni algebriche reali (cioè a coefficienti reali) valgono la seguenti notevoli proprietà:

• *se un'equazione algebrica reale ammette una radice complessa allora anche la sua coniugata è una radice e con la stessa molteplicità.*

Infatti se z_i è una radice, cioè $P_n(z_i) = 0$, prendendo il coniugato del primo membro della (2) si trova che $P_n(z_i^*) = 0$ perché con la coniugazione l'equazione non cambia i coefficienti. Dunque anche z_i^* è una radice. Il fatto che abbia la stessa molteplicità si dimostra utilizzando la fattorizzazione del polinomio. Una conseguenza immediata di questa proprietà è che

• *un'equazione algebrica reale di grado dispari ha almeno una radice reale.*

Infatti, guardando la fattorizzazione del polinomio, i monomi corrispondenti alle radici complesse sono un numero pari (perché ad un monomio complesso ne corrisponde uno coniugato) e quindi, ricordando che il numero dei fattori coincide con il grado, in assenza di radici reali il grado dell'equazione è necessariamente pari.

Esercizi

$\boxed{1}$ Scrivere in forma algebrica $(x + iy)$ i seguenti numeri complessi e calcolarne gli inversi:

$$\frac{i}{1-i}, \quad \frac{1-i}{1+i}, \quad \frac{i}{1+i}, \quad e^{3i\pi}, \quad 3e^{i\pi/4}.$$

$\boxed{2}$ Eseguire somme, prodotti e quozienti di semplici numeri complessi scelti a caso. Per esempio:

$$(2+3i)(1-i) = 5+i,$$
$$\frac{2+5i}{7-i} = \frac{(2+5i)(7+i)}{(7-i)(7+i)} = \frac{1}{50}(9+37i).$$

$\boxed{3}$ Scrivere in forma algebrica i numeri di modulo $\rho = 1,\ 4,\ 5,\ 2$ e argomento rispettivamente $\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{3\pi}{4}$.

$\boxed{4}$ Scivere in forma polare (calcolandone modulo e argomento) i numeri complessi:

$$1+i, \quad i-1, \quad 1+i\sqrt{3}, \quad \sqrt{3}+i, \quad \frac{1-i}{(1+i)^2}$$

$\boxed{5}$ Servendosi della formula di De Moivre scrivere in forma algebrica le potenze $(1+i)^n$, $(1-i)^n$, $(\sqrt{3}+i)^n$, per $n = 2, 3, 4, 5$. Ricalcolare le potenze cubiche ($n = 3$) utilizzando la formula del cubo di un binomio.

$\boxed{6}$ Calcolare z^6 con $z = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$.

$\boxed{7}$ Calcolare le radici cubiche e seste di $-i$ e di -1, dandone la rappresentazione grafica.

$\boxed{8}$ Verificare che $(1-i)^6 + \left(\frac{1}{i}\right)^4 - 8\,i^5 - i^4 = 0$.

$\boxed{9}$ Risolvere l'equazione $iz^2 - 2z + 3i = 0$ (Sol.: $z_1 = -3i$, $z = i$.)

Esercizi svolti - Numeri complessi

$\boxed{1}$ Determinare e rappresentare geometricamente le radici cubiche di

$$z = -2 + 2i = 2(i - 1).$$

***

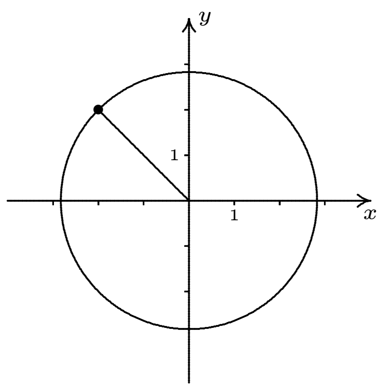
Dobbiamo innanzitutto calcolare il modulo e l'angolo del numero dato:

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2^{\frac{3}{2}}.$$

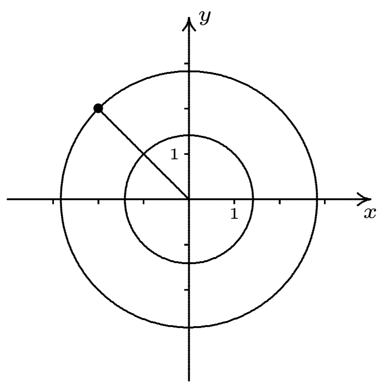
Da $\rho \cos\theta = x = -2$ e $\rho \sin\theta = y = 2$ ricaviamo

$$\cos\theta = \sqrt{2}/2, \qquad \rho \sin\theta = \sqrt{2}/2.$$

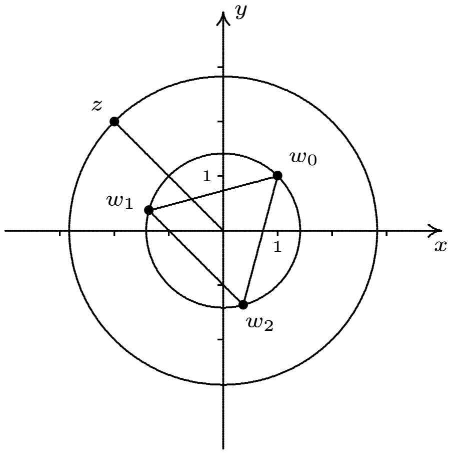
Dunque: $\theta = \frac{3}{4}\pi$. Nel piano complesso il numero dato risulta collocato così:



Essendo $\sqrt[3]{\rho} = \sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{2}$, le <u>tre</u> radici (w_0, w_1, w_2) si trovano collocate sul cerchio di raggio $\sqrt{2}$:



La prima radice (w_0) ha angolo uguale a $\theta/3 = \frac{\pi}{4}$. Le altre due sono i rimanenti vertici del triangolo equilatero costruito a partire da questo punto:



Applicando la formula delle radici otteniamo comunque

$$\begin{cases} w_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1+i, \\ w_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\pi+2\pi\right) + i\sin\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\pi+2\pi\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi + i\,\sin\frac{11}{12}\pi\right), \\ w_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\pi+4\pi\right) + i\sin\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\pi+4\pi\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{19}{12}\pi + i\,\sin\frac{19}{12}\pi\right). \end{cases}$$

---

2 Determinare le radici cubiche di -8 e quindi determinare la decomposizione in fattori reali del polinomio reale x^3+8.

***

Le tre radici cubiche sono (applicare il metodo dell'esercizio precedente).

$$w_0 = 1+i\sqrt{3}, \qquad w_1 = -2, \qquad w_2 = 1-i\sqrt{3}.$$

Esse sono le tre radici dell'equazione $x^3+8=0$. Pertanto, in base al teorema di fattorizzazione abbiamo la scomposizione <u>complessa</u> in tre fattori

$$z^3+8 = (z+2)(z-1-i\sqrt{3})(z-1+i\sqrt{3}).$$

La scomposizione <u>reale</u> si ottiene moltiplicando tra loro i fattori con le radici coniugate (si ottiene un polinomio reale di secondo grado):

$$x^3+8 = (x+2)(x^2-2x+4).$$

Integrali indefiniti

Esercizi svolti

1) Calcolare l'integrale indefinito:

$$\int \operatorname{arcsen} x \, \mathrm{d}x$$

L'integrale si risolve integrando per parti, la funzione arcsen$x$ viene derivata mentre si integra la funzione costante uguale all'identità che si può considerare a fattore:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{arcsen} x \, \mathrm{d}x &= \int 1 \cdot \operatorname{arcsen} x \, \mathrm{d}x \\
&= x \operatorname{arcsen} x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

per completare l'integrazione occorre ora osservare che sotto il segno di integrale compare la una funzione di $y(x) = 1 - x^2$ moltiplicata per la derivata y' (a meno di un fattore costante -2) si tratta quindi di applicare la regola della funzione composta:

$$\begin{aligned}
x \operatorname{arcsen} x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x &= x \operatorname{arcsen} x - \frac{1}{(-2)} \int (-2x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}x \\
&= x \operatorname{arcsen} x - \frac{1}{(-2)} 2\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + c \\
&= x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + c
\end{aligned}$$

2) Calcolare l'integrale indefinito:

$$\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, \mathrm{d}x$$

L'integrale si risolve per sostituzione ponendo $t = \sqrt{x}$; differenziando si ottiene

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$$

da cui $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$. Sostituendo si ricava l'integrale

$$\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, \mathrm{d}x = \int 2t \operatorname{arctg} t \, \mathrm{d}t$$

Che integrando per parti:

$$\begin{aligned}\int 2t \operatorname{arctg} t \, \mathrm{d}t &= t^2 - \int t^2 \frac{1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t \\ &= t^2 - \int \frac{t^2+1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t + \int \frac{1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t \\ &= t^2 - t + \operatorname{arctg} t + c \\ &= x - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} + c\end{aligned}$$

Si presti attenzione alla manipolazione algebrica con cui si è risolto l'integrale della funzione razionale $\frac{t^2}{1+t^2}$.

3) Calcolare l'integrale indefinito:

$$\int \cos(\ln x) \, \mathrm{d}x$$

Occorre innanzitutto effettuare la sostituzione $t = \ln x$ che differenziata fornisce:

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

e quindi $\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t \mathrm{d}t$. Sostituendo si ricava quindi:

$$\int \cos(\ln x) \, \mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^t \cos t \, \mathrm{d}t$$

Ora si ricorre a due successive integrazioni per parti (integrando l'esponenziale e derivando il coseno) e si ottiene:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^t \cos t \, \mathrm{d}t &= \mathrm{e}^t \cos t + \int \mathrm{e}^t \mathrm{sen} t \, \mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^t \cos t + \mathrm{e}^t \mathrm{sen} t - \int \mathrm{e}^t \cos t \, \mathrm{d}t\end{aligned}$$

Si osservi che a secondo membro compare lo stesso integrale presente a primo membro, però cambiato di segno, allora risolvendo l'equazione rispetto a questo integrale si ottiene:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^t \cos t \, \mathrm{d}t &= \mathrm{e}^t \frac{\mathrm{sen} t + \cos t}{2} + c \\ &= x \frac{\mathrm{sen}(\ln x) + \cos(\ln x)}{2} + c\end{aligned}$$

4) Calcolare l'integrale indefinito:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+5}$$

Per risolvere questo integrale occorre effettuare alcuni raccoglimenti in modo da ricondursi ad avere sotto il segno di integrale la derivata dell'arcotangente:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+5} &= \frac{1}{5} \int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{2}{5}x^2+1} \\ &= \frac{1}{5} \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 + 1}\end{aligned}$$

Con la sostituzione $t = x\sqrt{\frac{2}{5}}$ da cui si ha $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\sqrt{\frac{5}{2}}$ si ottiene

$$\frac{1}{5}\sqrt{\frac{5}{2}}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{10}}\mathrm{arctg}\left(x\sqrt{\frac{2}{5}}\right) + c$$

5) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 5x + 6}$$

Per risolvere l'integrale occorre utilizzare una particolare tecnica detta "scomposizione in fratti semplici" che si applica anche a svaiati altri tipi di integrali di funzioni razionali. Innanzitutto occorre cercare le radici del polinomio a denominatore per decomporlo in fattori di primo grado:

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$$

In seguito si cerca di scrivere la funzione razionale come una somma di frazioni ciascuna delle quali ha a denominatore uno solo dei fattori, per far questo occorre introdurre dei numeratori incogniti ciascuno di un grado inferiore rispetto al fattore corrispondente, in questo caso siccome entrambi i fattori sono di primo grado i numeratori saranno due costanti incognite:

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{(A+B)x - 3A - 2B}{(x-2)(x-3)}$$

Chiedendo di avere un'identità si ottengono le due equazioni nelle due incognite A e B

$$\begin{cases} A + B &= 0 \\ -3A - 2B &= 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è $A = -1$, $B = 1$. Quindi l'integrale può essere riscritto nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 5x + 6} &= -\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x-3} \\ &= -\ln|x-2| + \ln|x-3| + c \end{aligned}$$

6) Calcolare l'integrale indefinito:

$$\int \frac{7x-3}{x^2(x-3)}\,\mathrm{d}x$$

Applicando il metodo della scomposizione in fratti semplici:

$$\frac{7x-3}{x^2(x-3)} = \frac{Ax+B}{x^2} + \frac{C}{x-3} = \frac{(A+C)x^2 + (B-3A)x - 3B}{x^2(x-3)}$$

da cui si ottiene $A = -2$, $B = 1$, $C = 2$. L'integrale diventa quindi:

$$\begin{aligned} \int \frac{7x-3}{x^2(x-3)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{-2x+1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x-3}\,\mathrm{d}x \\ &= -2\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int \frac{2}{x-3}\,\mathrm{d}x \\ &= -2\ln|x| - \frac{1}{x} + 2\ln|x-3| + c \end{aligned}$$

7) Calcolare l'integrale indefinito:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+12x+10}$$

Provando ad applicare il metodo della scomposizione in fratti semplici si osserva che il polinomio a denominatore non ha radici reali, in questo caso occorre utilizzare un altro metodo detto del completamento dei quadrati. Questo metodo si basa sul fatto che in un polinomio di secondo grado il termine di secondo e di primo grado possono sempre essere pensati come i corrispondenti termini dello sviluppo di un quadrato di un binomio di primo grado in x. Per ricostruire completamente il quadrato di questo binomio è allora sufficiente aggiungere e togliere un termine costante. Nell'esempio dato si procede nel seguente modo

$$\begin{aligned}\frac{1}{4x^2+12x+10} &= \frac{1}{(4x^2+12x+9)-9+10} \\ &= \frac{1}{(2x+3)^2+1}\end{aligned}$$

e quindi l'integrale diviene

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+12x+10} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+3)^2+1} \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x+3)+c\end{aligned}$$

Esercizi proposti

Integrali immediati e per sostituzione

$\int (5-4x)^3\,\mathrm{d}x$	$\int \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}\,\mathrm{d}x$
$\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$	$\int x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$
$\int \cos x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$	$\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{(x-\cos x)^3}\,\mathrm{d}x$
$\int \frac{x+\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$	$\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$
$\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,\mathrm{d}x$	$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$
$\int \frac{\operatorname{sen}(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$	$\int \ln(1-\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$

Integrali di funzioni razionali

$$\int \frac{5}{x^2+5x-6}\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{x+1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{x+1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{x^3+x+1}{x^4+x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{x^2-2x}{(2x-1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{3x}{2+5x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{5}{(2x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{2}{5-7x}\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{2}{(1-3x)^5}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{5}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{2x^2}{3x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{-7}{10x^2+2}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{x^2-3}{x^2+2}\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{3x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{2x}{x^2-6x+9}\,\mathrm{d}x$$

Integrali per parti

$$\int \mathrm{e}^x(x^2-x)\,\mathrm{d}x \qquad \int x^2 \mathrm{sen} x\,\mathrm{d}x$$

$$\int x^2\cos(2x)\,\mathrm{d}x \qquad \int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$\int x^2\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x \qquad \int x^3\ln x\,\mathrm{d}x$$

$$\int \mathrm{arctg}\, x\,\mathrm{d}x \qquad \int \ln x\,\mathrm{d}x$$

$$\int (\ln x)^2\,\mathrm{d}x \qquad \int \mathrm{sen}^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$\int x^3\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$$

Esercizi di riepilogo

$$\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x \qquad \int x \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$$

$$\int \operatorname{sen}(\ln x)\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{(1-x^2)^2}\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{\cos x}{4+\operatorname{sen}^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \mathrm{e}^{2x}\ln(1+\mathrm{e}^{2x})\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int x\operatorname{sen}(3x+5)\,\mathrm{d}x \qquad \int \operatorname{sen}^2(3x+5)\,\mathrm{d}x$$

$$\int x\operatorname{sen}(3x^2+5)\,\mathrm{d}x \qquad \int x\operatorname{sen}^2(3x+5)\,\mathrm{d}x$$

Integrali definiti

1) Calcolare

$$\int_0^1 e^x\,(x^2-x)dx.$$

2) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x\, dx.$$

3) Calcolare

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos(2x)dx.$$

4) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\, dx.$$

5) Calcolare l'integrale

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{\log x}}{x}\, dx.$$

6) Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x+\arctan x}{1+x^2}\, dx.$$

7) Calcolare l'integrale

$$\int_1^2 \frac{1}{2+e^x}\, dx.$$

8) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \log(1-\sqrt{x})\, dx.$$

9) Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 x^2 \arctan(x)\, dx.$$

10) Calcolare l'area della regione delimitata dalla funzione $f(x)=(x^2-2x)\,e^x$ nell'intervallo $[2,3]$.

11) Calcolare l'area della regione delimitata dalla funzione $f(x)=x\,e^x$ nell'intervallo $[-1,1]$.

12) Calcolare il valore medio della funzione $f(x)=x^2\ \cos x$ nell'intervallo $[0,\frac{\pi}{2}]$.

13) Calcolare il valore medio della funzione $f(x)=x^3\log x$ nell'intevallo $[1,2]$.

14) Calcolare il valore medio della funzione $f(x)=x\ \sin(3x)$ nell'intervallo $[O,\pi]$.

15) Calcolare l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^3}\, dx.$$

Matematica B

Corso di Laurea in Chimica

Prova scritta del 2.2.01

P1) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{x \cos x}{e^{2y}}.$$

P2) Determinare le equazioni parametriche della retta passante per il punto $A(1, 2, 3)$ perpendicolare al piano di equazione $x - y + 2z + 1 = 0$.

P3) Determinare e analizzare i punti critici della funzione $f(x, y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y$.

P4) Rappresentare graficamente le radici cubiche del numero complesso $-2 + 2i$.

T1) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

T2) Dare la definizione di prodotto vettoriale.

T3) Cos'è il valore medio di una funzione?

Soluzione degli esercizi del 2.2.01

P1) L'equazione differenziale è a variabili separabili. La soluzione generale si trova uguagliando i due integrali

$$\int e^{2y}\,dy = \int x\cos x\,dx$$

Si ha

$$\int e^{2y}\,dy = \frac{1}{2}\int 2e^{2y}\,dy = \frac{1}{2}e^{2y} + c_1, \qquad \int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + c_2,$$

dove il primo integrale è della forma $\int e^{f(y)}f'(y)dy = e^{f(y)}$, mentre il secondo integrale è stato calcolato integrando per parti. La soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$e^{2y} = 2(x\sin x + \cos x + c)$$

che si può scrivere in forma esplicita come

$$y = \frac{1}{2}\log\left(2(x\sin x + \cos x + c)\right).$$

P2) Un vettore ortogonale al piano π di equazione $x - y + 2z + 1 = 0$ è $\mathbf{n} = (1, -1, 2)$. La retta richiesta è parallela a $\mathbf{n}$ e passa per il punto $A(1, 2, 3)$ ed ha equazioni parametriche

$$x = 1 + t, \quad y = 2 - t, \quad z = 3 + 2t.$$

P3) I punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f'_x = 6x^2 - 6x = 0, \\ f'_y = 3y^2 - 3 = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x(x-1) = 0, \\ 3(y-1)(y+1) = 0. \end{cases}$$

cioè il punti $P_1(0,1)$, $P_2(1,1)$, $P_3(0,-1)$, $P_4(1,-1)$. Le derivate seconde di f sono $f''_{xx} = 12x - 6$ $f''_{xy} = 0$, $f''_{yy} = 6y$ e il determinante Hessiano $H(x,y) = 36(2x-1)y$. Dal segno di H e di f''_{xx} nei punti critici si determina il tipo di punto critico:

P_1 sella	$H(P_1) = -36 < 0$,	
P_2 minimo	$H(P_2) = +36 > 0$,	$f''_{xx}(P_2) = 1 > 0$
P_3 massimo	$H(P_3) = +36 > 0$,	$f''_{xx}(P_3) = -6 < 0$
P_4 sella	$H(P_4) = -36 < 0$.	

P4) Il numero complesso $z = -2 + 2i$, di modulo $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ e argomento $\theta = 3/4\pi$, si può scrivere in forma esponenziale come $z = \sqrt{8}e^{\frac{3}{4}\pi i}$. Le tre radici cubiche hanno tutte modulo $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt{2}$ e argomento θ_k dato dalla formula $\frac{\theta + 2k\pi}{3}$ per $k = 0, \ldots, 2$:

$$z_0 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}, \qquad z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{11}{12}\pi i}, \qquad z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{19}{12}\pi i}.$$

Le tre radici sono i vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza centrata nell'origine di raggio $\sqrt{2}$.

Matematica B

Corso di Laurea in Chimica

Prova scritta del 12.2.01

P1) Calcolare il valore medio della funzione $f(x) = x^3 \log x$ nell'intevallo $[1, 2]$.

P2) Determinare l'angolo tra i due piani di equazione $x - y + z + 1 = 0$ e $x + 2y + 2 = 0$.

P3) Determinare e analizzare i punti critici della funzione $f(x, y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$.

P4) Calcolare la seguente potenza $(1 + \sqrt{3}i)^4$.

T1) Come si calcola la lunghezza di una curva piana?

T2) Dare la definizione di prodotto scalare ed elencarne alcune proprietà.

T3) Dare la definizione di derivata direzionale di una funzione di due variabili.

Soluzione degli esercizi del 12.2.01

P1) Il valor medio di f nell'intervallo $[1,2]$ è dato da

$$\mu = \frac{1}{2-1}\int_1^2 x^3 \log x \, dx.$$

Integrando per parti il corrispondente integrale indefinito si ha

$$\int x^3 \log x dx = \frac{x^4}{4}\log x - \int \frac{x^4}{4}\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^4}{4}\log x - \frac{1}{4}\int x^3 = \frac{x^4}{4}\log x - \frac{1}{16}x^4.$$

Da cui

$$\mu = \left[\frac{x^4}{4}\log x - \frac{x^4}{16}\right]_1^2 = 4\,\log 2 - \frac{15}{16}.$$

P2) I vettori $\mathbf{n}_1 = (1,-1,1)$ e $\mathbf{n}_2 = (1,2,0)$ sono ortogonali ai due piani π_1 e π_2 di equazioni $x-y+z+1=0$ e $x+2y+2=0$. L'angolo θ tra i due piani è uguale all'angolo tra $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ e il suo coseno è

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{1-2}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2}} = -\frac{1}{\sqrt{15}}.$$

P3) I punti critici della funzione f sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2+6x-4y=0, \\ f'_y = 4x+2y=0, \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2-2x=0, \\ y=-2x, \end{cases} \iff \begin{cases} x(3x-2)=0, \\ y=-2x, \end{cases}$$

cioè il punti $P_1(0,0)$, $P_2(\frac{2}{3},-\frac{4}{3})$. Le derivate seconde di f sono $f''_{xx}=6x+6$ $f''_{xy}=4$, $f''_{yy}=2$ e il determinante Hessiano

$$H(x,y) = 12(x+1)-16.$$

Dal segno di H nei punti critici e tenendo conto che f''_{yy} è positiva ovunque, si determina il tipo di punto critico:

$$\begin{array}{ll} P_1 \text{ sella} & H(P_1) = -4 < 0, \\ P_2 \text{ minimo} & H(P_2) = +4 > 0. \end{array}$$

P4) Il numero complesso $z = 1+\sqrt{3}i$ ha modulo $|z| = \sqrt{1+3} = 2$ e argomento $\theta = \pi/3$ ($\tan\theta = \sqrt{3}/1$ e $\theta\in[0,\pi/2]$) cioè si può scrivere in forma esponenziale come $z = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$. Si ha quindi

$$z^4 = 2^4\,e^{\frac{4\pi}{3}i} = 16\,e^{\frac{4}{3}\pi i} = -8-8\sqrt{3}i.$$

Matematica B

Corso di Laurea in Chimica

Prova scritta del 23.2.01

P1) Calcolare l'area della regione delimitata dalla funzione $f(x) = x\,e^x$ nell'intervallo $[-1, 1]$.

P2) Calcolare il volume del tetraedro di vertici i punti $P_1(1, 0, -1)$, $P_2(1, -1, 2)$, $P_3(0, 1, -1)$, $P_4(1, 1, 1)$.

P3) Determinare e analizzare i punti critici della funzione $f(x, y) = y^2 - x^2 + x^3 + x^2 y + \frac{1}{3} y^3$.

P4) Scrivere in forma polare il numero complesso $\frac{1+i}{(1-i)^2}$.

T1) Cos'è un integrale improprio? Quando è convergente?

T2) Dare la definizione di prodotto misto e enunciarne alcune proprietà.

T3) Enunciare il teorema del gradiente.

Soluzione degli esercizi del 23.2.01

P1) L'area (con segno) della regione è data dall'integrale definito $A = \int_{-1}^{1} xe^x \, dx$. Applicando la regola dell'integrazione per parti per integrali definiti si ottiene

$$\int_{-1}^{1} xe^x \, dx = [xe^x]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x \, dx = e - (-e^{-1}) - (e - e^{-1}) = 2\, e^{-1} = \frac{2}{e}.$$

P2) Tre vettori non complanari individuati dai 4 vertici del tetraedro sono ad esempio

$$\mathbf{v}_1 = P_1P_4 = (0,1,2), \qquad \mathbf{v}_2 = P_2P_4 = (0,2,-1), \qquad \mathbf{v}_3 = P_3P_4 = (1,0,2).$$

Il volume (con segno) del tetraedro è un sesto del prodotto misto dei tre vettori

$$V_{P_1P_2P_3P_4} = \frac{1}{6}\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{5}{6}.$$

P3) I punti critici di f sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f'_x = -2x + 3x^2 + 2xy = 0, \\ f'_y = 2y + x^2 + y^2 = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x(-2 + 3x + 2y) = 0, \\ 2y + x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Sostituendo nella seconda equazione $x = 0$ si trova $y = 0$ o $y = -2$, cioè il punti $P_1(0,0)$, $P_2(0,-2)$, mentre sostituiendovi $y = -\frac{3}{2}x + 1$ si trova l'equazione di secondo grado $13x^2 - 24x + 12 = 0$ che non ammette soluzioni reali, cioè non vi sono altri punti critici. Le derivate seconde di f sono $f''_{xx} = -2 + 6x + 2y$, $f''_{xy} = 2x$, $f''_{yy} = 2 + 2y$ e il determinante Hessiano

$$H(x,y) = 4(3x + y - 1)(1 - y) - 4x^2.$$

Dal segno di H e di f''_{yy} nei punti critici si determina il tipo di punto critico:

$$\begin{array}{lll} P_1 \text{ sella} & H(P_1) = -4 < 0, & \\ P_2 \text{ massimo} & H(P_2) = +12 > 0, & f''_{yy}(P_2) = -2 < 0. \end{array}$$

P4) In forma trigonometrica i numeri $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 1 - i$ si scrivono

$$z_1 = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\Big), \qquad z_2 = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{-\pi}{4} + i \sin\frac{-\pi}{4}\Big),$$

da cui si trova

$$z = \frac{z_1}{z_2^2} = \frac{\sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))}{2(\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2))} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}\Big)$$

Matematica B

Corso di Laurea in Chimica

Prova scritta del 29.6.01

P1) Calcolare il valore medio della funzione $f(x) = x\ \sin(3x)$ nell'intervallo $[O, \pi]$.

P2) Trovare l'equazione del piano passante per il punto $A(1, 0, -1)$ e parallelo alle rette di equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 - t, \\ z = 2t \end{cases} \qquad s := \begin{cases} x = 1 + 2\lambda, \\ y = 2, \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

P3) Determinare e analizzare i punti critici della funzione $f(x, y) = x^3 - 3x + ye^{-2y}$.

P4) Calcolare le radici cubiche del numero complesso $z = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$, dandone la rappresentazione grafica.

T1) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

T2) Dare la definizione di prodotto scalare e enunciarne alcune proprietà.

T3) Enunciare il teorema del gradiente.

Soluzione degli esercizi del 29.6.01

P1) Il valor medio di f nell'intervallo $[0,\pi]$ è dato da

$$\mu = \frac{1}{\pi - 0}\int_0^\pi x\sin(3x)\,dx.$$

Integrando per parti ilcorrispondente integrale indefinito si trova

$$\int x\sin(3x)\,dx = -\frac{x}{3}\cos(3x) - \int -\frac{1}{3}\cos(3x)\,dx = -\frac{x}{3}\cos(3x) + \frac{1}{9}\sin(3x).$$

Da cui

$$\mu = \frac{1}{\pi}\left| -\frac{x}{3}\cos(3x) + \frac{1}{9}\sin(3x)\right]_0^\pi = \frac{1}{3}.$$

P2) Due vettori paralleli alle rette r ed s sono rispettivamente

$$\mathbf{v}_1 = (1,-1,1), \qquad \mathbf{v}_2 = (2,0,-1).$$

Un vettore $\mathbf{n}$ ortogonale al piano si trova facendo il prodotto vettoriale di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

L'equazione del piano per $A(1,0,-1)$ ortogonale a $\mathbf{n}$ è $x-1+3y+2(z+1)=0$, cioè

$$x + 3y + 2z - 2 = 0.$$

P3) I punti critici di f sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 3x = 0, \\ f'_y = e^{-2y} - 2ye^{-2y} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3(x-1)(x+1) = 0, \\ e^{-2y}(1-2y) = 0, \end{cases}$$

cioè i punti $P_1(1,1/2)$, $P_2(-1,1/2)$. Le derivate seconde di f sono $f''_{xx} = 6x$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{yy} = -4e^{-2y}(1-y)$ e il determinante Hessiano $H(x,y) = 24xe^{-2y}(y-1)$. Dal segno di H e di f''_{xx} nei punti critici si determina il tipo di punto critico:

$$\begin{array}{lll} P_1 \text{ sella} & H(P_1) = -12e^{-1} < 0, & \\ P_2 \text{ massimo} & H(P_2) = +12e^{-1} > 0, & f''_{xx}(P_2) = -6 < 0. \end{array}$$

P4) Il numero complesso $z = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$ ha modulo $|z| = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$ e argomento $\theta = \pi/6$ cioè si può scrivere in forma esponenziale come $z = e^{\frac{\pi}{6}i}$. Le tre radici cubiche hanno tutte modulo 1 e argomento $\theta_k = \frac{\theta + 2k\pi}{3}$ per $k = 0,\ldots,2$:

$$z_0 = e^{\frac{\pi}{18}i}, \qquad z_1 = e^{\frac{13}{18}\pi i}, \qquad z_2 = e^{\frac{25}{18}\pi i}.$$

Tali radici rappresentano i vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza centrata nell'origine di raggio unitario.

Matematica B

Corso di Laurea in Chimica

Prova scritta del 5.7.01

P1) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'(1+\cos x) = \frac{\sin x}{e^y}.$$

P2) Calcolare il volume del tetraedro di vertici i punti $P_1(-1,0,2)$, $P_2(1,1,-1)$, $P_3(0,1,1)$, $P_4(1,2,1)$.

P3) Determinare e analizzare i punti critici della funzione $f(x,y) = 2\cos x + \sin y$.

P4) Calcolare la seguente potenza $(-1+i)^5$.

T1) Enunciare il teorema del valor medio di una funzione continua.

T2) Dare la definizione di prodotto vettoriale e enunciarne alcune proprietà.

T3) Dare la definizione di derivata direzionale di una funzione di due variabili.

Soluzione degli esercizi del 5.7.01

P1) L'equazione differenziale è a variabili separabili e si risolve uguagliando i due integrali

$$\int e^y\,dy \quad = \quad \int \tfrac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$$

Si ha

$$\int e^y\,dy = e^y + c_1, \qquad \int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{1+\cos x}\,dx = -\log|1+\cos x| + c_2,$$

dove il secondo integrale è della forma $\int \frac{1}{f(x)} f'(x)dx = \log|f(x)| + c_2$. La soluzione generale è

$$e^y = -\log|1+\cos x| + c$$

che si può scrivere in forma esplicita come

$$y = \quad \log\left(-\log|1+\cos x| + c\right) = \quad \log\left(\log \tfrac{k}{|1+\cos x|}\right).$$

P2) Tre vettori non complanari individuati dai 4 vertici del tetraedro sono ad esempio

$$\mathbf{v}_1 = P_1P_4 = (2,2,-1), \qquad \mathbf{v}_2 = P_2P_4 = (0,1,2), \qquad \mathbf{v}_3 = P_3P_4 = (1,1,0).$$

Il volume (con segno) del tetraedro è un sesto del prodotto misto dei tre vettori

$$V_{P_1P_2P_3P_4} = \frac{1}{6}\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}.$$

P3) I punti critici di f sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f'_x = -2\sin x = 0, \\ f'_y = \cos y = 0, \end{cases}$$

cioè i punti della forma

$$P_1(0+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi), \quad P_2(0+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi), \quad P_3(\pi+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi), \quad P_4(\pi+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi).$$

Le derivate seconde di f sono $f''_{xx} = -2\cos x$, $f''_{yy} = -\sin y$, $f''_{xy} = 0$ e il determinante Hessiano $H(x,y) = 2\cos x \sin y$. Il segno di H e di f''_{xx} determina il tipo di punto critico:

P_1 massimo	$H(P_1) = 2 > 0$,	$f''_{xx}(P_1) = -2 < 0$
P_2 sella	$H(P_2) = -2 < 0$,	
P_3 sella	$H(P_3) = -2 < 0$,	
P_4 minimo	$H(P_4) = +2 > 0$,	$f''_{xx}(P_2) = +2 > 0$.

P4) Il numero complesso $z = -1+i$ ha modulo $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ e argomento $\theta = 3/4\pi$ ($\tan\theta = -1$ e $\theta \in [\pi/2, \pi]$) cioè si può scrivere in forma esponenziale come $z = \sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i}$, da cui

$$z^5 = \sqrt{2}^5\, e^{\frac{15}{4}\pi i} = 4\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}i} = 4\,(1-i).$$

Matematica B

Corso di Laurea in Chimica

Prova scritta del 10.9.01

P1) Calcolare

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos(2x) dx.$$

P2) Determinare l'equazione del piano passante per i punti $A(1, 0, -1), B(0, 1, 2), C(1, 1, 0)$.

P3) Determinare e analizzare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^3 + 2y^3 - 3y^2 - 3x.$$

P4) Calcolare le radici cubiche del numero complesso $z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$, dandone la rappresentazione grafica.

T1) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

T2) Dare la definizione di prodotto misto e enunciarne alcune proprietà.

T3) Cos'è il valore medio di una funzione?

Soluzione degli esercizi del 10.9.01

P1) Integrando per parti 2 volte il corrispondente integrale indefinito si ha

$$\begin{aligned}\int x^2\cos(2x)\,dx &= \tfrac{x^2}{2}\sin(2x)-\int x\sin(2x)\,dx=\tfrac{x^2}{2}\sin(2x)-\left[-\tfrac{x}{2}\cos(2x)-\int\tfrac{-\cos(2x)}{2}\,dx\right]\\ &= \tfrac{x^2}{2}\sin(2x)+\tfrac{x}{2}\cos(2x)-\tfrac{\sin(2x)}{4}+C\end{aligned}$$

Da cui

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2\cos(2x)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\sin(2x)+\frac{x}{2}\cos(2x)-\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{32}-\frac{1}{4}$$

P2) Due vettori paralleli al piano sono rispettivamente

$$\mathbf{v}_1=AB=(-1,1,3),\qquad \mathbf{v}_2=AC=(0,1,1).$$

Un vettore $\mathbf{n}$ ortogonale al piano si trova facendo il prodotto vettoriale di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{n}=\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\-1&1&3\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

L'equazione del piano per $A(1,0,-1)$ ortogonale a $\mathbf{n}$ è $-2(x-1)+y-(z+1)=0$, cioè

$$-2x+y-z+1=0.$$

P3) I punti critici di f sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases}f'_x=3x^2-3=0,\\ f'_y=6y^2-6y=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}3(x-1)(x+1)=0,\\ 6y(y-1)=0,\end{cases}$$

cioè i punti $P_1(1,0)$, $P_2(-1,0)$, $P_3(1,1)$, $P_4(-1,1)$. Le derivate seconde di f sono $f''_{xx}=6x$, $f''_{xy}=0$, $f''_{yy}=12y-6$ e il determinante Hessiano $H(x,y)=6x(12y-6)$. Dal segno di H e di f''_{xx} nei punti critici si determina il tipo di punto critico:

P_1 sella	$H(P_1)=-36<0$,	
P_2 minimo	$H(P_2)=+36>0$,	$f''_{xx}(P_2)=6>0$,
P_3 massimo	$H(P_3)=+36>0$,	$f''_{xx}(P_3)=-6<0$,
P_4 sella	$H(P_4)=-36<0$.	

P4) Il numero complesso $z=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i)$ ha modulo $|z|=\sqrt{2+2}=2$ e argomento $\theta=5/4\pi$ cioè si può scrivere in forma esponenziale come $z=\sqrt[3]{2}\,e^{\frac{5}{4}\pi i}$. Le tre radici cubiche hanno tutte modulo $\sqrt[3]{2}$ e argomento $\theta_k=\frac{\theta+2k\pi}{3}$ per $k=0,\ldots,2$:

$$z_0=\sqrt[3]{2}\,e^{\frac{5}{12}\pi i},\qquad z_1=\sqrt[3]{2}\,e^{\frac{13}{12}\pi i},\qquad z_2=\sqrt[3]{2}\,e^{\frac{21}{12}\pi i}.$$

Le tre radici sono i vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza centrata nell'origine di raggio $\sqrt[3]{2}$.

Matematica B

Corso di Laurea in Chimica

Prova scritta del 6.2.02 (versione A)

P1) Calcolare il valore medio della funzione $f(x) = x^2 \sin x$ nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

P2) Determinare l'area del triangolo di vertici i punti $A(1, 1, -1)$, $B(0, 1, 2)$ e $C(-1, 0, 2)$.

P3) Determinare e analizzare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^3 - x^2 y + y^2 - 2y + 1.$$

P4) Calcolare le radici cubiche del numero complesso $z = \sqrt{3} - i$, dandone la rappresentazione grafica.

T1) Dare la definizione di derivata totale di una funzione di due variabili.

T2) Dare la definizione di prodotto scalare e enunciarne alcune proprietà.

T3) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Risoluzione dei problemi del 6.2.02 (versione A)

P1) Il valore medio è dato da

$$\mu = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx.$$

Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} \textstyle\int x^2 \sin x dx &= -x^2\cos x + 2\textstyle\int x\cos x\, dx = -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\textstyle\int \sin x\, dx \\ &= (-x^2+2)\cos x + 2x\sin x + C. \end{aligned}$$

Quindi

$$\mu = \frac{2}{\pi}[(-x^2+2)\cos x + 2x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}(\pi - 2).$$

P2) L'area $\mathcal{A}$ del triangolo si può calcolare come $\frac{1}{2}|AB \times AC|$, con $AB = (-1, 0, 3)$ e $AC = (-2, -1, 3)$. Il prodotto vettoriale $AB \times AC$ si ottiene calcolando il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Quindi $AB \times AC = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k} = (3, -3, 1)$ e

$$\mathcal{A} = \frac{\infty}{\in}\sqrt{(\ni)^{\in} + (-\ni)^{\in} + \infty^{\in}} = \frac{\infty}{\in}\sqrt{\infty\exists}.$$

P3) Per trovare i punti critici si risolve il sistema

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 2xy = x(3x - 2y) = 0 \\ f'_y = -x^2 + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

I punti critici che si ottengono sono: $P_1(0,1)$, $P_2\left(1, \frac{3}{2}\right)$, $P_3(2,3)$. Il determinante Hessiano è dato da $H(x,y) = 2(6x - 2y) - 4x^2$. Quindi, dal segno di H e di f''_{xx} nei punti critici si trova

$$\begin{array}{lll} P_1 \text{ sella} & H(P_1) = -4 < 0, & \\ P_2 \text{ minimo} & H(P_2) = 2 > 0, & f''_{xx}(P_2) = 6 > 0 \\ P_3 \text{ sella} & H(P_3) = -4 < 0, & \end{array}$$

P4) Il numero complesso z in forma trigonometrica si può scrivere $z = 2\left(\cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{11}{6}\pi\right)\right)$. Quindi le radici cubiche z_k, $k = 0, 1, 2$ sono date da

$$z_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\tfrac{11}{18}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{11}{18}\pi\right)\right), \quad z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\tfrac{23}{18}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{23}{18}\pi\right)\right),$$
$$z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\tfrac{35}{18}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{35}{18}\pi\right)\right).$$

Le 3 radici cubiche sono su una circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[3]{2}$ e sono i vertici di un triangolo equilatero.

Matematica B

Corso di Laurea in Chimica

Prova scritta del 14.2.02

P1) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^y \frac{(x+1)}{(x^2+1)} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

P2) Determinare l'equazione del piano passante per il punto $A(0, 1, 2)$ e parallelo ai vettori $\mathbf{u}(1, 0, -1)$ e $\mathbf{v}(1, 2, 0)$.

P3) Determinare e analizzare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 6x - 12y - 5.$$

P4) Calcolare la seguente potenza $(2 - 2i)^5$.

T1) Che cosa si intende per gradiente di una funzione di due variabili? Enunciare il teorema del gradiente.

T2) Dare la definizione di prodotto vettoriale e enunciarne alcune proprietà.

T3) Che cos'è il valore medio di una funzione? Enunciare il teorema del valore medio del calcolo integrale.

Risoluzione dei problemi del 14.2.02

P1) L'equazione differenziale $y' = e^y \frac{(x+1)}{(x^2+1)}$ è a variabili separabili. Si può scrivere nella forma:

$$e^{-y}dy = \frac{x+1}{x^2+1}dx.$$

In tegrando entrambi i membri si ottiene:

$$-e^{-y} = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \arctan(x) + c,$$

con c costante arbitraria. La costante c si ottiene imponendo $y(0) = 2$ e quindi: $c = -e^{-2}$.

P2) L'equazione del piano passante per il punto $A(0,1,2)$ e parallelo ai vettori $\mathbf{u}(1,0,-1)$ e $\mathbf{v}(1,2,0)$ si ottiene imponendo, se $P(x,y,z)$ è il punto generico del piano, che si annulli il prodotto misto $AP \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, cioè che si annulli il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} x & y-1 & z-2, \\ 1 & 0 & -1, \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene quindi l'equazione

$$2x - y + 2z - 3 = 0.$$

P3) I punti critici della funzione f si ottengono risolvendo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 6 = 0, \\ f'_y = 3y^2 - 12 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 3(x^2-2) = 0, \\ 3(y-2)(y+2) = 0. \end{cases}$$

Si ottengono quindi i 4 punti $P_1(\sqrt{2},2)$, $P_2(\sqrt{2},-2)$, $P_3(-\sqrt{2},2)$, $P_4(-\sqrt{2},-2)$. Il determinante Hessiano è dato da $H(x,y) = 36xy$. Quindi, poiché

$$\begin{array}{ll} H(P_1) = 72\sqrt{2} > 0, & f"_{xx}(P_1) = 6\sqrt{2} > 0 \\ H(P_2) = -72\sqrt{2} < 0, & \\ H(P_3) = -72\sqrt{2} < 0, & \\ H(P_4) = 72\sqrt{2} > 0, & f"_{xx}(P_1) = -6\sqrt{2} < 0, \end{array}$$

si ha che P_1 è un punto di minimo, P_2 e P_3 sono punti a sella, P_2 è un punto di massimo.

P4) Se si scrive il numero complesso $2-2i$ in forma trigonometrica si ha

$$2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right).$$

Quindi

$$\begin{aligned} (2-2i)^5 &= (2\sqrt{2})^5\left(\cos\left(\tfrac{35}{4}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{35}{4}\pi\right)\right) = (2\sqrt{2})^5\left(\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)\right) \\ &= (2\sqrt{2})^5\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 128(-1+i). \end{aligned}$$

Matematica B

Corso di Laurea in Chimica

Prova scritta del 21.2.02

P1) Calcolare l'area della regione delimitata dalla funzione $f(x) = (x^2 - 2x)\,e^x$ nell'intervallo $[2,3]$.

P2) Determinare la retta passante per il punto $A(1,-1,0)$ e perpendicolare al piano di equazione $2x - y + 3z - 1 = 0$.

P3) Determinare e analizzare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = e^{x+y}(x^2 - y^2 + 2).$$

P4) Calcolare $\frac{4}{(1-i)^3}$.

T1) Dare la definizione di derivata direzionale di una funzione di due variabili.

T2) Dare la definizione di prodotto scalare e enunciarne alcune proprietà.

T3) Che cos'è la formula fondamentale del calcolo integrale?

Risoluzione dei problemi del 21.2.02

P1) L'area A della regione delimitata dalla funzione $f(x) = (x^2 - 2x)\, e^x$ nell'intervallo $[2, 3]$ è data dall'integrale definito

$$\int_2^3 (x^2 - 2x)e^x \, dx.$$

Si ha, integrando per parti

$$\begin{aligned} \int = (x^2 - 2x)e^x \, dx &= (x^2 - 2x)e^x - \int (2x - 2)e^x \, dx \\ &= (x^2 - 2x - 2x + 2)e^x + 2 \int e^x dx = (x^2 - 4x + 4)e^x + c. \end{aligned}$$

Quindi

$$A = [(x^2 - 4x + 4)e^x]_2^3 = e^2.$$

P2) La retta passante per il punto $A(1, -1, 0)$ e perpendicolare al piano di equazione $2x - y + 3z - 1 = 0$ è la retta passante per il punto A e parallela al vettore $\mathbf{n}(2, -1, 3)$. Quindi ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -1 - t, \quad t \in \mathbf{R}, \\ z = 3t. \end{cases}$$

P3) I punti critici della funzione $f(x, y) = e^{x+y}(x^2 - y^2 + 2)$ sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f'_x = e^{x+y}(x^2 - y^2 + 2 + 2x) = 0, \\ f'_y = e^{x+y}(x^2 - y^2 + 2 - 2y) = 0. \end{cases}$$

Poichè $e^{x+y} > 0$, per ogni x, y, i punti critici si ottengono risolvendo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2 + 2x = 0, \\ x^2 - y^2 + 2 - 2y = 0. \end{cases}$$

Si ottiene quindi solo il punto $P_1(-1, 1)$. Il determinante Hessiano è dato da

$$H(x, y) = e^{x+y}[(x^2 - y^2 + 4x + 4)(x^2 - y^2 - 4y) - (x^2 - y^2 + 2x + 2y + 2)^2].$$

Quindi, poichè

$$H(P_1) = -4 < 0$$

si ha che P_1 è un punto a sella.

P4) Poiché $(1 - i)^{-1} = \frac{1}{2}(1 + i)$, si ha che

$$\frac{4}{(1 - i)^3} = \frac{4(1 + i)^3}{8} = -1 - i.$$

Matematica B

Corso di Laurea in Chimica

Prova scritta del 2.7.02

P1) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y' = x \sin x \sqrt{y-2}.$$

P2) Determinare l'equazione del piano passante per il punto $A(-1,1,0)$ e ortogonale al vettore $\mathbf{u}(1,0,-1)$.

P3) Determinare e analizzare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y.$$

P4) Calcolare la seguente potenza $(-\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i)^8$.

T1) Che cosa si intende per derivata direzionale di una funzione di due variabili?

T2) Dare la definizione di prodotto misto e enunciarne alcune proprietà.

T3) Enunciare il teorema di Torricelli-Barrow.

Risoluzione dei problemi del 2.7.02

P1) L'equazione differenziale $y' = x\,\sin x\,\sqrt{y-2}$ si può riscrivere come

$$(y-2)^{-\frac{1}{2}}\,dy = x\sin x.$$

Integrando entrambi i membri della precedente equazione si ha:

$$2\sqrt{y-2} = -x\cos x + \sin x + c,$$

con c costante arbitraria. Quindi

$$y = \frac{1}{4}(-x\cos x + \sin x)^2 + 2.$$

P2) L'equazione del piano passante per il punto $A(-1,1,0)$ e ortogonale al vettore $\mathbf{u}(1,0,-1)$ ha equazione cartesiana:

$$1(x+1) + 0(y-1) + (-1)(z-0) = 0$$

e quindi $x - z + 1 = 0$.

P3) I punti critici della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y$$

si ottengono risolvendo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} f'_x = \frac{1}{x^2} - 4 = 0, \\ f'_y = -\frac{1}{y^2} + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1-4x^2}{x^2} = 0, \\ \frac{y^2-1}{y^2} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} (1-2x)(1+2x) = 0, \\ (y-1)(y+1) = 0, \end{cases}$$

Si ottengono quindi come punti critici $P_1\left(\frac{1}{2},1\right), P_2\left(\frac{1}{2},-1\right), P_3\left(-\frac{1}{2},1\right), P_4\left(-\frac{1}{2},-1\right)$. Il determinante Hessiano è dato da $H(x,y) = -\frac{4}{x^2y^3}$. Quindi, dal segno di H e di $f''_{xx} = -2x^{-3}$ nei punti critici si trova

$$\begin{array}{lll} P_1 \text{ sella} & H(P_1) = -32 < 0, & \\ P_2 \text{ massimo} & H(P_2) = 32 > 0, & f''_{xx}(P_2) = -16 < 0 \\ P_3 \text{ minimo} & H(P_2) = 32 > 0, & f''_{xx}(P_3) = 16 > 0 \\ P_4 \text{ sella} & H(P_3) = -32 < 0, & \end{array}$$

P4) Il numero complesso $-\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$ si può scrivere in forma trigonometrica come

$$2\left(\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) + \sin\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)\right)$$

Si ha quindi

$$(-\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i)^8 = (2)^8\left(\cos\left(\tfrac{24}{4}\pi\right) + \sin\left(\tfrac{24}{4}\pi\right)\right) = 256.$$

Matematica B

Corso di Laurea in Chimica

Prova scritta del 11.7.02

P1) Calcolare

$$\int_0^1 e^x\,(x^2-x)dx.$$

P2) Determinare il volume del tetraedro di vertici i punti $A(1,0,-1), B(2,1,0)$, $C(1,0,1)$, $D(0,1,1)$.

P3) Determinare e analizzare i punti critici della funzione

$$f(x,y)=y^3+3y^2+4xy+x^2.$$

P4) Determinare le radici cubiche del numero complesso $\frac{(\sqrt{3}-i)}{3}$.

T1) Enunciare il teorema del gradiente.

T2) Dare la definizione di prodotto vettoriale e enunciarne alcune proprietà.

T3) Cos'è il valore medio di una funzione?

Risoluzione dei problemi del 11.7.02

P1) Integrando due volte per parti si ha

$$\begin{aligned} \int (x^2 - x)e^x\,dx &= (x^2 - x)e^x - \int (2x-1)e^x\,dx \\ &= (x^2 - 3x + 1)e^x + 2\int e^x\,dx = (x^2 - 3x + 3)e^x + c, \end{aligned}$$

con c costante arbitraria. Quindi

$$\int_0^1 e^x\,(x^2 - x)dx = [(x^2 - 3x + 3)e^x]_0^1 = e - 3.$$

P2) Il volume (con segno) V del tetraedro di vertici i punti $A(1,0,-1)$, $B(2,1,0)$, $C(1,0,1)$, $D(0,1,1)$ si può calcolare come

$$\frac{1}{6}(AB \times AC \cdot AD).$$

Si ha

$$AB = (1,1,1), \quad AC = (0,0,2), \quad AD = (-1,1,2)$$

e il prodotto misto $AB \times AC \cdot AD$ è uguale al determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene quindi $V = \frac{1}{6}(-4)$ e quindi il volume del tetraedro è uguale a $\frac{2}{3}$.

P3) I punti critici della funzione f si ottengono risolvendo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} f'_x = 4y + 2x = 0, \\ f'_y = 3y^2 + 6y + 4x = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2y, \\ 3y^2 - 2y = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2y, \\ y(3y-2) = 0. \end{cases}$$

Si ottengono quindi come punti critici $P_1(0,0), P_2\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Il determinante Hessiano è dato da $H(x,y) = 2(6y+6) - 16 = 12y - 4$. Quindi, poichè

$$H(P_1) = -4 < 0, \qquad H(P_2) = 4 > 0, \quad f''_{xx}(P_2) = 2 > 0,$$

si ha che P_1 è un punto a sella e P_2 è un punto di minimo.

P4) Il numero complesso $z = \frac{(\sqrt{3}-i)}{3}$ si può scrivere in forma trigonometrica come $z = \frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) + \sin\left(\frac{11}{6}\pi\right)\right)$. Quindi le radici cubiche z_k, $k = 0,1,2$ sono date da

$$z_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\left(\cos\left(\frac{11}{18}\pi\right) + i\sin\left(\frac{11}{18}\pi\right)\right), \quad z_1 = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\left(\cos\left(\frac{23}{18}\pi\right) + i\sin\left(\frac{23}{18}\pi\right)\right),$$
$$z_2 = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\left(\cos\left(\frac{35}{18}\pi\right) + i\sin\left(\frac{35}{18}\pi\right)\right).$$

Le 3 radici cubiche sono su una circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[3]{2}$ e sono i vertici di un triangolo equilatero.

Matematica B

Corso di Laurea in Chimica

Prova scritta del 29.11.02

P1) Calcolare il valore medio della funzione $f(x) = x^2e^{-x}$ nell'intevallo $[0,1]$.

P2) Determinare l'area del triangolo di vertici i punti $A(1,0,1), B(2,1,0)$, $C(0,0,1)$.

P3) Determinare e analizzare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = xye^x.$$

P4) Calcolare $(-\sqrt{3}+i)^5$.

T1) Enunciare il teorema di Torricelli-Barrow.

T2) Dare la definizione di prodotto scalare e enunciarne alcune proprietà.

T3) Cos'è la derivata direzionale di una funzione?

Risoluzione dei problemi del 29.11.02

P1) Il valore medio μ della funzione $f(x) = x^2e^{-x}$ nell'intevallo $[0,1]$ è dato da

$$\mu = \int_0^1 x^2e^{-x}\, dx.$$

Integrando due volte per parti il corrispondente integrale indefinitosi ha

$$\int x^2e^{-x}\, dx = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\, dx = (-x^2 - 2x - 2)e^{-x} + c,$$

con c costante arbitraria. Quindi

$$\mu = [(-x^2 - 2x - 2)e^{-x}]_0^1 = -5e^{-1} + 2.$$

P2) L'area A del triangolo di vertici i punti $A(1,0,1), B(2,1,0),\ C(0,0,1)$ si può calcolare come

$$A = \frac{1}{2}|AB \times AC|.$$

Si ha

$$AB = (1,1,-1), \quad AC = (-1,0,0)$$

e $AB \times AC = (0,1,1)$. Perciò

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{0+1+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

P3) I punti critici della funzione $f(x,y) = xye^x$ si ottengono risolvendo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} f'_x = (xy + y)e^x = 0, \\ f'_y = xe^x = 0. \end{cases}$$

Si ottiene come unico punto critico $P_1(0,0)$. Il determinante Hessiano è dato da

$$H(x,y) = -(x+1)^2e^{2x}.$$

Quindi, poichè

$$H(P_1) = -1 < 0,$$

si ha che P_1 è un punto a sella.

P4) Il numero complesso $-\sqrt{3} + i$ in forma trigonometrica si può scrivere nella forma

$$2\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right).$$

Quindi

$$(-\sqrt{3}+i)^5 = 2^5\left(\cos\left(\frac{25}{6}\pi\right) + \sin\left(\frac{25}{6}\pi\right)\right) = 2^5\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 16\left(\sqrt{3}+i\right).$$

Matematica B

Corso di Laurea in Chimica

Prova scritta del 6.2.03

P1) Determinare l' equazione del piano passante per il punto $P(0,5,1)$ e parallelo ai vettori $\mathbf{u} = (1,2,0)$ e $\mathbf{v} = (-2,1,1)$.

P2) Determinare e analizzare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

P3) Determinare e rappresentare graficamente le radici dell'equazione a coefficienti complessi

$$z^2 + iz + 2 = 0.$$

P4) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} (\log x)^2 y' = \dfrac{y^2}{x}. \\ \\ y(e) = 1 \end{cases}$$

T1) Il teorema del gradiente.

T2) Il teorema fondamentale del calcolo integrale.

T3) Integrali di forme differenziali: definizioni e proprietà.

Risoluzione dei problemi del 6.2.03

P1) Utilizzando $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ si può determinare un vettore ortogonale al piano attraverso il prodotto esterno:

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{c_1} & \mathbf{c_2} & \mathbf{c_3} \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{2c_1} - \mathbf{c_2} + \mathbf{5c_3} = (\mathbf{2}, \mathbf{-1}, \mathbf{5})$$

Un generico punto del piano di coordinate $X = (x, y, z)$ soddisferà quindi la condizione $(X - P) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$ che fornisce l'equazione cartesiana del piano:

$$2(x + 0) - (y - 5) + 5(z - 1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x - y + 5z = 0\,.$$

P2) Per determinare i punti critici occorre innanzitutto calcolare il gradiente della funzione:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x)$$

i punti in cui il gradiente si annulla sono quindi dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^3 - y = 0 \\ y^3 - x = 0 \end{cases}$$

ricavandi y dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si ottiene l'equazione:

$$x(x^8 - 1) = 0$$

le cui soluzioni reali sono:

$$x = 0 \quad x = \pm 1$$

La funzione ha quindi tre punti critici

$$(0, 0) \quad (1, 1) \quad (-1, -1)$$

Siccome la forma della separatrice non è semplice da determinare la natura del punto critico verrà studiata con il metodo dell'hessiano.
La matrice hessiana della funzione è:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

occorre quindi calcolare le derivate parziali seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12y^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4$$

si osservi che si è utilizzato il fatto che le due derivate miste sono uguali essendo la funzione sufficientemente regolare. La matrice hessiana, calcolata nel punto critico $(0,0)$ vale:

$$H_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Siccome il suo determinante vale -16 il punto risulta un punto a sella. Calcolando invece la matrice hessiana nei due punti critici $(1,1)$ e $(-1,-1)$ si ottiene:

$$H_{(\pm 1,\pm 1)} = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$$

Il determinante vale allora $144-16 = 128$ e quindi si ha un massimo o un minimo forti; poiché la derivata parziale seconda rispetto a x è positiva si tratta di un mimimo.
P3) Utilizzando la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado (che continua a essere valida anche per le equazioni a coefficienti complessi) si ottiene:

$$z = \frac{-i \pm \sqrt{-1-8}}{2} = \frac{-i \pm 3i}{2} \quad z_1 = i; z_2 = -2i$$

La rappresentazione grafica di questi due numeri complessi è:
P4) Innanzitutto occorre trovare la soluzione generale dell'equazione. Separando le variabili e integrando si ottiene

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

entrambi gli integrali sono elementari e danno:

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{\ln x} + c \quad \longrightarrow \quad y = \frac{\ln x}{1 + C \ln x}\,.$$

Richiedendo che sia soddisfatta la condizione iniziale si ottiene che il valore della costante arbitraria deve essere

$$\frac{1}{1+C} = 1 \quad \longrightarrow \quad C = 0$$

e quindi la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y = \ln x\,.$$

Matematica B

Corso di Laurea in Chimica

Prova scritta del 21.2.03

P1) Calcolare l'integrale della forma differenziale $xdy - ydx$ lungo la curva chiusa

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos^2\theta \\ y = \cos\theta\sin\theta \end{cases} , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

La forma differenziale è esatta?

P2) Determinare e analizzare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + xy$$

e il piano tangente nei punti $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ e $(1, -1)$.

P4) Calcolare le radici cubiche del numero complesso $\frac{6-2i}{1-2i}$.

T1) Enunciare il Teorema di Cauchy per equazioni differenziali.

T2) Enunciare e dimostrare il Teorema del valore medio.

T3) Definire la derivata direzionale di una funzione di due variabili e darne un esempio.

Risoluzione dei problemi del 21.2.02

P1) L'integrale della forma differenziale lungo la curva è:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} [\cos^2\theta d(\cos\theta\sin\theta) - \cos\theta\sin\theta d(\cos^2\theta)] = \\
= & \int_0^{2\pi} [\cos^2\theta(-\sin^2\theta + \cos^2\theta)d\theta - \cos\theta\sin\theta(-2\cos\theta\sin\theta)d\theta] \\
= & \int_0^{2\pi} \cos^2\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2\sin^2\theta)d\theta \\
= & \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta
\end{aligned}$$

La soluzione del problema richiede quindi il calcolo (per parti) dell'integrale

$$\begin{aligned}
\int \cos^2\theta d\theta &= \int \cos\theta\cos\theta d\theta \\
&= \sin\theta\cos\theta + \int \sin^2\theta d\theta \\
&= \sin\theta\cos\theta + \int (1-\cos^2\theta)d\theta \\
&= \sin\theta\cos\theta + \theta - \int \cos^2\theta d\theta
\end{aligned}$$

Risolvendo rispetto all'integrale incognito si ottiene

$$\int \cos^2\theta d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta + c\,.$$

L'integrale della forma differenziale risulta quindi

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right]_0^{2\pi} = \pi$$

Siccome l'integrale della forma differenziale lungo una curva chiusa è diverso da zero essa non può essere una forma esatta.

P2) Per determinare i punti critici occorre innanzitutto calcolare il gradiente della funzione:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (3x^2 + y, 3y^2 + x)$$

siccome l'esponenziale è sempre positivo i punti in cui il gradiente si annulla sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3x^2 + y = 0 \\ 3y^2 + x = 0 \end{cases}$$

ricavando y dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si ottiene l'equazione:

$$x(27x^3+1)=0$$

le cui soluzioni reali sono:

$$x=0 \quad x=-\frac{1}{3}$$

La funzione ha quindi due punti critici

$$(0,0) \quad (-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$$

Siccome la forma della separatrice non è semplice da determinare la natura del punto critico verrà studiata con il metodo dell'hessiano.
La matrice hessiana della funzione è:

$$H=\left(\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{array}\right)$$

occorre quindi calcolare le derivate parziali seconde:

$$\begin{array}{c} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=1 \end{array}$$

si osservi che si è utilizzato il fatto che le due derivate miste sono uguali essendo la funzione sufficientemente regolare. La matrice hessiana, calcolata nel punto critico $(0,0)$ vale:

$$H_{(0,0)}=\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)$$

Siccome il suo determinante vale -1 il punto risulta un punto a sella. Calcolando invece la matrice hessiana nel punto critico $(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$ si ottiene:

$$H_{(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})}=\left(\begin{array}{cc} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{array}\right)$$

Il determinante vale allora $4-1=3$ e quindi si ha un massimo o un minimo forti; poiché la derivata parziale seconda rispetto a x è negativa si tratta di un massimo.
Siccome i due punti in cui si richiede di calcolare il piano tangente al grafico della funzione sono esattamente i due punti critici segue che entrambi siano piani orizzontali la cui intersezione con l'asse delle z è uguale al valore della funzione nel punto critico. Poiché

$$f(0,0)=0; \quad f(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})=\frac{1}{3}$$

i due piani tangenti avranno rispettivamente equazione

$$z = 0; \quad z = \frac{1}{3}$$

P3) Innanzitutto occorre razionalizzre il numero complesso e scriverlo in notazione esponenziale:

$$\begin{aligned}
\frac{6-2i}{1-2i} &= 2\frac{3-i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} \\
&= 2\frac{5+5i}{1+4} \\
&= 2(i+1) \\
&= 2e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}
\end{aligned}$$

estraendo la radice cubica si ottiene

$$z = \sqrt[3]{2}e^{\frac{\pi}{12}+\frac{2k}{3}\pi}$$

che fornisce i tre numeri complessi

$$z_1 = \sqrt[3]{2}e^{\frac{\pi}{12}} \quad z_1 = \sqrt[3]{2}e^{\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi} \quad z_1 = \sqrt[3]{2}e^{\frac{\pi}{12}+\frac{4}{3}\pi}$$

Matematica B

Corso di Laurea in Chimica

Prova scritta del 17.06.03

P1) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$e^{-x}y' = y\sin(2x).$$

P2) Determinare e analizzare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = x(e^x - e^y).$$

P3) Scrivere l'equazione cartesiana del piano che è parallelo al vettore $\mathbf{u} = (1,1,1)$ e passa per i punti $P = (-1,0,2)$ e $Q = (2,1,-3)$.

P4) Trovare i numeri complessi z che verificano l'equazione

$$(z-i)^4 = -16.$$

T1) Definire il prodotto misto di tre vettori ed illustrarne alcune proprietà.

T2) Dare la definizione di derivata direzionale di una funzione di due variabili e un esempio di calcolo.

T3) Il teorema del valor medio.

Risoluzione dei problemi del 17.6.03

P1) Separando le variabili e integrando si ottiene:

$$\int \frac{dy}{y} = \int e^x \sin(2x) dx$$

l'integrale a primo membro è di risoluzione immediata, quello a secondo membro si risolve integrando per parti

$$\begin{aligned} \int e^x \sin(2x) dx &= e^x \sin(2x) - 2 \int e^x \cos(2x) dx \\ &= e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) dx - 4 \int e^x \sin(2x) dx \end{aligned}$$

Risolvendo rispetto all'integrale incognito si ottiene

$$\int e^x \sin(2x) dx = \frac{\sin(2x) - 2\cos(2x)}{5} e^x + c$$

L'equazione differenziale ha dunque la soluzione generale

$$\begin{array}{l} \ln|y| = \frac{\sin(2x)-2\cos(2x)}{5} e^x + c \\ y = Ce^{\frac{\sin(2x)-2\cos(2x)}{5} e^x} \end{array}$$

Si osservi che il valor assoluto è stato eliminato perché comportava esclusivamente un cambiamento del segno della costante arbitraria C.

P2) Per determinare i punti critici occorre innanzitutto calcolare il gradiente della funzione:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (e^x + e^x - e^y, -xe^y)$$

i punti in cui il gradiente si annulla sono le soluzioni del sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} xe^y &=& 0 \\ (1+x)e^x - e^y &=& 0 \end{array} \right.$$

La prima equazione di questo sistema ha l'unica soluzione $x = 0$, perché l'esponenziale è sempre positivo, sostituendo nella seconda equazione si ottiene:

$$e^y = 1 \quad \Longrightarrow \quad y = 0 \, .$$

La funzione ha quindi un unico punto critico in $(0,0)$, il valoreche essa assume nel punto critico è $f(0,0) = 0$. Per studiare la natura del punto critico si utilizzeranno sia il medodo della separatrice che quello dell'hessiano.

Metodo della separatrice. La separatrice per il punto critico $(0,0)$ è la curva di equazione

$$x(e^x - e^y) = 0$$

essendo il prodotto di due fattori questa curva è composta da due rami:

$$\begin{array}{l} x = 0 \\ e^x = e^y \quad \Longrightarrow \quad x = y \end{array}$$

entrambe queste curve sono rette e dividono il piano in quattro regioni. Occorre ora determinare in quali regioni l'espressione $x(e^x - e^y)$ è positiva e in quali è negativa, ombreggiando le regioni positive la situazione è raffigurata nel grafico: da cui risulta che il punto critico è una sella.
Metodo dell'hessiano. La matrice hessiana della funzione è:

$$H = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{array} \right)$$

occorre quindi calcolare le derivate parziali seconde, siccome la funzione è sufficientemente regolare le due derivate miste risulteranno uguali:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (2 + x)e^x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -xe^y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^y \end{array}$$

La matrice hessiana, calcolata nel punto critico $(0, 0)$ vale:

$$H_{(0,0)} = \left(\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{array} \right)$$

Siccome il suo determinante vale -1 il punto risulta un punto a sella, confermando quanto trovato col metodo della separatrice.

P3) Per individuare un piano nello spazio occorrono due vettori a cui piano è parallelo e un punto di passaggio. Il secondo vettore si può ricavare dalla differenza tra i vettori che individuano i punti P e Q:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q} - \mathbf{P} = (\mathbf{2} - (\mathbf{-1}), \mathbf{1} - \mathbf{0}, \mathbf{-3} - \mathbf{2}) = (\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{-5})$$

utilizzando $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ si può determinare un vettore ortogonale al piano attraverso il prodotto esterno:

$$\mathbf{n} = \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{c_1} & \mathbf{c_2} & \mathbf{c_3} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{array} \right| = \mathbf{-6c_1} + \mathbf{8c_2} - \mathbf{2c_3} = (\mathbf{-6}, \mathbf{8}, \mathbf{-2})$$

Un generico punto del piano di coordinate $X = (x, y, z)$ soddisferà quindi la condizione $(X - P) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$ che fornisce l'equazione cartesiana del piano:

$$-6(x + 1) + 8(y - 0) - 2(z - 2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad -6x + 8y - 2z - 2 = 0\,.$$

P4) Per risolvere l'equazione è opportuno riscrivere il secondo membro utilizzando la notazione esponenziale:

$$
\begin{aligned}
&(z-i)^4 = 16e^{(\pi+2k\pi)i}\\
&z-i = 2e^{(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})i}\\
&z = i + 2e^{(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})i}
\end{aligned}
$$

quindi siccome la notazione $e^{(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})i}$ rappresenta il quattro numeri complessi

$$
\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{i-1}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1-i}{\sqrt{2}}
$$

si hanno le quattro soluzioni

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{2} + (1+\sqrt{2})i\\
z_2 &= -\sqrt{2} + (1+\sqrt{2})i\\
z_3 &= -\sqrt{2} + (1-\sqrt{2})i\\
z_4 &= \sqrt{2} + (1-\sqrt{2})i
\end{aligned}
$$

Matematica B

Corso di Laurea in Chimica

Prova scritta del 11.09.03

P1) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' = 3y' - 2y.$$

tale che $y(0) = 1, y'(0) = 4$.

P2) Determinare e analizzare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = 2xye^{y+1}.$$

P3) Determinare il volume del tetraedro di vertici $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, 0, 2)$, $P_3 = (-2, 1, 0)$ e $P_4 = (1, 1, 1)$.

P4) Dato il numero complesso

$$z = \left(\frac{1 - 3i}{i - 1} - i\right)^2$$

scriverlo in forma algebrica e calcolare il modulo e l'argomento.

T1) Lunghezza di una curva piana descritta da equazioni parametriche.

T2) Il teorema del gradiente.

T3) Il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Risoluzione dei problemi del 11.09.03

P1) Innanzitutto occorre trovare la soluzione generale dell'equazione lineare a coefficienti costanti. Ponendo $y = e^{\lambda x}$ si ottiene l'equazione di secondo grado

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

le cui soluzioni sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. La soluzione generale e la sua derivata prima sono dunque

$$\begin{gathered} y = Ae^x + Be^{2x} \\ y' = Ae^x + 2Be^{2x} \end{gathered}$$

Utilizzando le condizioni iniziali si ottiene il sistema di due equazioni

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A + 2B = 4 \end{cases}$$

che permette di determinare le due costanti arbitrarie:

$$A = -2 \quad B = 3$$

la soluzione del problema di Cauchy risulta quindi

$$y = -2e^x + 3e^{2x}$$

P2) Per determinare i punti critici occorre innanzitutto calcolare il gradiente della funzione:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2ye^{y+1}, 2xe^{y+1} + 2xye^{y+1})$$

i punti in cui il gradiente si annulla sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} ye^{y+1} = 0 \\ x(1+y)e^{y+1} = 0 \end{cases}$$

La prima equazione di questo sistema ha l'unica soluzione $y = 0$, perché l'esponenziale è sempre positivo, sostituendo nella seconda equazione si ottiene $x = 0$.
La funzione ha quindi un unico punto critico in $(0, 0)$, il valore che essa assume nel punto critico è $f(0, 0) = 0$. Per studiare la natura del punto critico si utilizzeranno sia il medodo della separatrice che quello dell'hessiano.
Metodo della separatrice. La separatrice per il punto critico $(0, 0)$ è la curva di equazione

$$xye^{y+1} = 0$$

essendo il prodotto di tre fattori di cui uno non si annulla mai questa curva è composta da due rami:

$$\begin{gathered} x = 0 \\ y = 0 \end{gathered}$$

entrambe queste curve sono rette e dividono il piano in quattro regioni. Occorre ora determinare in quali regioni l'espressione xye^{y+1} è positiva e in quali è negativa, ombreggiando le regioni positive la situazione è raffigurata nel grafico: da cui risulta che il punto critico è una sella.

Metodo dell'hessiano. La matrice hessiana della funzione è:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

occorre quindi calcolare le derivate parziali seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2e^{y+1} + 2ye^{y+1}$$

si osservi che si è utilizzato il fatto che le due derivate miste sono uguali essendo la funzione sufficientemente regolare e non si è calcolata la doppia derivata rispetto a y perché essendo la doppia derivata rispetto a x identicamente nulla non influisce sul valore del determinante La matrice hessiana, calcolata nel punto critico $(0,0)$ vale:

$$H_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 2e \\ 2e & * \end{pmatrix}$$

Siccome il suo determinante vale $-4e^2$ il punto risulta un punto a sella, confermando quanto trovato col metodo della separatrice.

P3) Il volume di un tetraedro corrisponde ad un sesto del volume del parallelepipedo individuato dagli stessi vettori, e questo volume è dato dal prodotto misto dei vettori dei lati. Per individuare questi vettori occorre fissare uno dei vertici (ad esempio P_1) e calcolare le differenze degli altri vertici rispetto a questo:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \mathbf{P_2} - \mathbf{P_1} &= (-1,0,2) \\ \mathbf{v} = \mathbf{P_3} - \mathbf{P_1} &= (-3,1,0) \\ \mathbf{w} = \mathbf{P_4} - \mathbf{P_1} &= (0,1,1) \end{aligned}$$

a meno del segno quindi il volume del parallelepipedo è:

$$V_{par} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\mathbf{7}\,.$$

E quindi il volume del tetraedro è:

$$V_{tet} = \frac{7}{6}$$

P4) Svolgendo i calcoli si ottiene

$$\left(\frac{1-3i}{i-1} - i\right)^2 = \left(\frac{2-2i}{i-1}\right)^2 = 4(-1)^2 = 4$$

Siccome si ottiene un numero con la parte immaginaria nulla il suo modulo è 4 e il suo argomento 0 (a meno di $2k\pi$).

Matematica B

Corso di Laurea in Chimica

Prova scritta del 21.11.03

P1) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{2x}{y} \cos(x^2)$$

tale che $y(0) = 1$.

P2) Determinare e analizzare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = e^{x^2 - y^2 - x}.$$

P3) Determinare l'area del triangolo di vertici $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, 1, 2)$, $P_3 = (-1, 1, 0)$.

P4) Trovare i numeri complessi tali che

$$z^3 = 2 - 2i.$$

T1) Dare la definizione di prodotto misto ed enunciarne alcune sue proprietà.

T2) Dare la definizione di valore medio ed enunciare il teorema del valore medio del calcolo integrale.

T3) Dare la definizione di derivata direzionale di una funzione di due variabili ed un esempio di calcolo.

Risoluzione dei problemi del 21.11.03

P1) Innanzitutto occorre trovare la soluzione generale dell'equazione. Separando le variabili e integrando si ottiene

$$\int y dy = \int 2x \cos(x^2) dx$$

entrambi gli integrali sono elementari e danno:

$$\frac{1}{2}y^2 = \sin(x^2) + c \quad \longrightarrow \quad y = \pm\sqrt{2\sin(x^2) + C}$$

dove il segno della soluzione è determinato dalla condizione iniziale. Richiedendo che siano soddisfatte le condizioni iniziali si ottiene che il valore della costante arbitraria deve essere $C = 1$ e quindi la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y = \sqrt{2\sin(x^2) + 1}$$

Si osservi che siccome la funzione a secondo membro nell'equazione differenziale non è continua non si ha la garanzia che sia valido il teorema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy, in effetti il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{2x}{y}\cos(x^2) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ammette le due soluzioni $y = \pm\sqrt{2\sin(x^2)}$.

P2) Per determinare i punti critici occorre innanzitutto calcolare il gradiente della funzione:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = ((2x-1)e^{x^2-y^2+x}, -2ye^{x^2-y^2+x})$$

siccome l'esponenziale è sempre positivo i punti in cui il gradiente si annulla sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è:

$$x = \frac{1}{2} \quad y = 0$$

La funzione ha quindi un unico punto critico in $(\frac{1}{2}, 0)$, il valore che essa assume nel punto critico è $f(\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$. Siccome la forma della separatrice

$$e^{x^2-y^2-x} = \sqrt[4]{e^3}$$

è piuttosto complessa la natura del punto critico verrà studiata con il metodo dell'hessiano. La matrice hessiana della funzione è:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

occorre quindi calcolare le derivate parziali seconde:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2e^{x^2-y^2-x} + (2x+1)^2 e^{x^2-y^2-x}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= (4y^2-2)e^{x^2-y^2-x}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -2y(2x-1)e^{x^2-y^2-x}\end{aligned}$$

si osservi che si è utilizzato il fatto che le due derivate miste sono uguali essendo la funzione sufficientemente regolare. La matrice hessiana, calcolata nel punto critico $(\frac{1}{2}, 0)$ vale:

$$H_{(\frac{1}{2},0)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt[4]{e}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \end{pmatrix}$$

Siccome il suo determinante vale $-\frac{4}{\sqrt{e}}$ il punto risulta un punto a sella.
P3) L'area di un triangolo è la metà del modulo del prodotto esterno di due vettori dei che ne costituiscono i lati. Per individuare questi vettori occorre fissare uno dei vertici (ad esempio P_1) e calcolare le differenze degli altri vertici rispetto a questo:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} = \mathbf{P_2} - \mathbf{P_1} &= (-1, 1, 2)\\ \mathbf{v} = \mathbf{P_3} - \mathbf{P_1} &= (-2, 1, 0)\end{aligned}$$

il prodotto esterno di questi due vettori è:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{c_1} & \mathbf{c_2} & \mathbf{c_3} \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{-2c_1 - 4c_2 + c_3} = (\mathbf{-2, -4, 1}) \, .$$

l'area del triangolo è:

$$A_{tri} = \frac{1}{2}|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \mathbf{\frac{1}{2}\sqrt{4+16+1}} = \frac{\mathbf{\sqrt{21}}}{\mathbf{2}}$$

P4) È opportuno innanzitutto riscrivere il secondo membro dell'equazione in forma esponenziale:

$$2(1-i) = 2e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}$$

estraendo la radice cubica si ottiene

$$z = \sqrt[3]{2}e^{-\frac{\pi}{12}+\frac{2k}{3}\pi}$$

che fornisce i tre numeri complessi

$$z_1 = \sqrt[3]{2}e^{-\frac{\pi}{12}} \quad z_1 = \sqrt[3]{2}e^{-\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi} \quad z_1 = \sqrt[3]{2}e^{-\frac{\pi}{12}+\frac{4}{3}\pi}$$