

Memorie

della

Accademia delle Scienze di Torino

Classe di Scienze
Fisiche, Matematiche e Naturali

Serie V, Volume 42-43

SERGIO BENENTI

Fondamenti matematici e analisi numerica
della dinamica di un Universo isotropo



ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
2018-2019

ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
Via Accademia delle Scienze, 6
10123 Torino, Italia

Uffici: Via Maria Vittoria, 3
10123 Torino, Italia
Tel. +39-011-562.00.47

✉ biblioteca@accademiadelle scienze.it
✉ pubblicazioni@accademiadelle scienze.it

Tutte le memorie che appaiono nelle «Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino» sono disponibili in rete ad accesso aperto e sono valutate da *referees* anonimi attraverso un sistema di *peer review*.

I lavori pubblicati sono classificati in base al seguente elenco di materie: Biologia animale e dell'uomo, Biologia vegetale, Chimica, Fisica, Geoscienze, Matematica, Scienza dell'informazione, Scienza dell'ingegneria, Scienze dell'ambiente, Scienze e ingegneria dei materiali, Storia delle scienze.

I lettori che desiderino informarsi sulle pubblicazioni e sull'insieme delle iniziative dell'Accademia delle Scienze di Torino possono consultare il sito www.accademiadelle scienze.it

ISSN: 1120-1630
ISBN: 978-88-99471-20-0

Fondamenti matematici e analisi numerica della dinamica di un Universo isotropo

Memoria presentata dal Socio corrispondente SERGIO BENENTI*
nell'adunanza del 7 marzo 2018
e approvata nell'adunanza del 12 giugno 2019

Riassunto. *Sulla base di un sistema di postulati viene fondata una geometria dello spazio-tempo cosmico che può essere il supporto di una vasta classe di modelli cosmologici isotropi, con diverse dinamiche. Tra questi ne viene studiato uno in particolare, chiamato «modello materia-radiazione» (modello MR). La sua dinamica è fondata sulle equazioni di campo di Einstein, e postula che l'energia distribuita nell'Universo abbia come componenti fondamentali la materia e la radiazione. Pur nella sua semplicità, questo modello fornisce una risposta numerica in eccellente accordo con i dati cosmologici oggi deducibili dalle osservazioni strumentali, quali in particolare l'età dell'Universo e la sua curvatura spaziale che, seppure estremamente piccola, risulta essere positiva.*

Parole chiave: spazio-tempo cosmico, Universo isotropo, modello materia-radiazione.

Abstract. *On the basis of a system of postulates a geometry of cosmic space-time is founded which can be the support of a vast class of isotropic cosmological models, with different dynamics. Among these, one in particular is studied, called «matter-radiation model» (MR-model). Its dynamics is based on Einstein's field equations, and postulates that the energy distributed in the Universe has matter and radiation as its fundamental components. Despite its simplicity, this model gives a numerical response in excellent agreement with the cosmological data that can be today deduced from instrumental observations, in particular the age of the Universe and its spatial curvature which, although extremely small, turns out to be positive.*

Keywords: cosmic space-time, isotropic Universe, matter-radiation model.

* Professore emerito, già ordinario di Fisica matematica nell'Università di Torino;
e-mail sergio.benenti@unito.it; sito internet www.sergiobenenti.it

Prefazione

Nella prefazione al suo libro *A deductive theory of space and time* (1966) [5] il logico-matematico S. Basri scrive:

«*At present, Physics is a collection of deductive theories, many of which do not specify explicitly all the concepts and postulates upon which they are based*».

Questa critica è oggi ancora valida per le teorie cosmologiche pur avendo i cosmologi trovato, negli ultimi anni '90 del secolo scorso, un accordo chiamato *Concordance Cosmology* su di un modello cosmologico *standard* detto Λ CDM-model (Lambda Cold Dark Matter model). Purtroppo però un qualche documento dove questo accordo è scritto e siglato sembra non essere rintracciabile in letteratura. È come l'*araba Fenice* di dapontiana memoria: *'che vi sia ciascun lo dice, dove sia nessun lo sa'*.

È d'altra parte opinione diffusa che la mancanza di una struttura logico-deduttiva renda ostica e infruttuosa la lettura di gran parte dei libri o articoli di argomento cosmologico. Tant'è che qualcuno ha ironicamente parlato di *'expanding Universe and expanding confusion'*.

Nella presente memoria vengono esposti alcuni dei principali risultati ottenuti nel corso di una ricerca iniziata alcuni anni fa e unicamente volta a soddisfare un'esigenza personale: poter far risalire i risultati più eclatanti, talvolta controversi, a cui sono pervenuti i cosmologi ad un sistema di postulati chiaramente espressi in termini matematici.

Fin dall'inizio di questa ricerca sono stati adottati due princìpi metodologici: un *principio di semplicità* ed un *principio di buon ordinamento*.

Semplicità. Non è concepibile dalla mente umana un modello matematico onnicomprensivo capace di descrivere la complessità dei fenomeni occorsi durante l'evoluzione dell'Universo, in particolare nei suoi stadi primordiali. Dobbiamo perciò moderare le nostre ambizioni puntando a modelli semplici e significativi, che diano modo di entrare nel complesso campo della cosmologia in maniera profittevole.

D'altra parte, come oggi comprendiamo bene dall'evoluzione storica della geometria, col passaggio dalla geometria euclidea alle geometrie non euclidee, i postulati non devono essere concepiti come atti di fede assoluta. Al contrario, essi devono essere discutibili. Il vantaggio di una formulazione assiomatica di una teoria sta proprio nella possibilità di individuare consapevolmente i postulati da modificare, o da aggiungere, qualora si voglia modificare la teoria stessa per adattarla ad una classe di fenomeni fisici più ampia, o diversa.

Buon ordinamento. Questo principio riguarda la corretta sequenzialità dei postulati e dei teoremi. In matematica questo principio impone che i postulati siano inizialmente collocati in una categoria generale ed in seguito in una catena di sottocategorie. In cosmologia, così come in meccanica classica o relativistica, i primi postulati e teoremi devono riguardare tematiche di pura geometria e cinematica. A questi devono poi far seguito postulati di carattere dinamico.

In ottemperanza a questo principio, i postulati sono in questa memoria divisi in tre gruppi.

1. Un **primo gruppo** di postulati riguarda la **geometria dello spazio-tempo cosmico** (Capitolo 1) a prescindere dalla fenomenologia fisica che governa l'evoluzione dell'Universo. Pur essendo basati su concetti elementari condivisibili, questi postulati producono una massa cospicua di risultati, alcuni noti ma molti altri meno noti.

Tra le novità più interessanti troviamo che il **fattore di scala**, che è il fattore di conformità delle metriche spaziali dell'Universo in due tempi diversi, risulta dipendere dalla scelta, peraltro arbitraria, di un **tempo di riferimento**, qui denotato con $t_{\#}$. Questa nozione non ha solo interesse teorico ma fornisce anche uno strumento operativo molto utile ed efficace. In effetti il fattore di scala è una funzione scalare adimensionale del tempo cosmico t , di solito denotata con $a(t)$, da cui si può dedurre l'evoluzione di gran parte delle grandezze fisiche dell'Universo, e quindi l'evoluzione dell'intero Universo. Qui sarà denotata con $a(t, t_{\#})$ per indicare la sua dipendenza dal tempo di riferimento $t_{\#}$. È chiaro che, per avere senso geometrico o fisico, le equazioni o le definizioni che lo coinvolgono, eventualmente insieme alle sue derivate, devono risultare indipendenti dalla scelta di $t_{\#}$. Un semplice esempio è il **fattore di Hubble** che interviene nella celebre **legge di Hubble** e che nel nostro contesto è definito da

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t, t_{\#})}{a(t, t_{\#})}.$$

Malgrado nel secondo membro compaia il tempo di riferimento, a conti fatti la frazione ne è indipendente, per cui $t_{\#}$ non deve comparire nel simbolo H . Forse è per questo motivo che i cosmologi non hanno avvertito la necessità di introdurre la nozione di tempo di riferimento, anche perché, altro motivo, la notazione corrente $a(t)$ sottintende che $t_{\#}$ sia il tempo presente t_0 , per cui risulta $a(t_0) = 1$.

Una seconda novità è un teorema di esistenza nello spazio-tempo cosmico di connessioni lineari e simmetriche che chiamiamo **connessioni cosmiche** e che soddisfano a certi requisiti di compatibilità con le strutture geometriche già presenti nello spazio-tempo a seguito del primo gruppo di postulati (paragrafo 1.13). Le connessioni sono un necessario preludio alla formulazione di teorie dinamiche perché consentono l'estensione dei concetti di **accelerazione** e di **derivata di un campo vettoriale** (o tensoriale) dagli ordinari spazi affini alle varietà differenziabili.

Le connessioni cosmiche risultano dipendenti da una funzione indeterminata del tempo cosmico t , denotata con $F(t)$.

2. Un **secondo gruppo di postulati-ponte** (Capitolo 2) riguarda il passaggio dalla geometria alla dinamica. Con la scelta di un postulato-ponte (uno solo, tra i vari e alternativi che si possono inventare) si transita nel territorio della dinamica dove, per proseguire il cammino, è necessario adottare dei **postulati dinamici (terzo gruppo)**. Un postulato-ponte è efficace se consente di determinare un'unica funzione $F(t)$ quindi un'unica connessione cosmica.

Nel Capitolo 2 vengono proposti due postulati-ponte. Il primo porta a modelli cosmologici newtoniani, ma dopo una breve discussione, non si prosegue oltre in questa direzione. Il secondo conduce invece al territorio dei **modelli cosmologici relativistici**. Esso assume l'esistenza di un tempo cosmico t e di particolari **particelle vaganti** nel cosmo la cui **velocità peculiare** (paragrafo 2.2) è sempre e ovunque uguale ad una costante universale c . A queste particelle si attribuisce il nome di **fotoni**. Da questo postulato segue non solo l'esistenza di una speciale connessione cosmica ma anche che questa deriva da una metrica lorentziana rispetto alla quale le storie dei fotoni sono nulle (genere luce) mentre quelle del fluido galattico sono del genere tempo. Si ritrova così, come teorema, il **principio di Weyl** (paragrafo 1.3).

3. Con quest'ultimo postulato-ponte si transita al Capitolo 3 della **dinamica cosmica relativistica** dove vengono formulati **tre postulati dinamici**.

Con un **primo postulato** si assume che valgano le **equazioni di Einstein**. Già nel Capitolo 2 sono stati preparati gli ingredienti necessari per comporre queste equazioni, vale a dire i tensori di Ricci $R^{\alpha\beta}$ e di Einstein $G^{\alpha\beta}$ relativi alla connessione cosmica relativistica (paragrafo 2.5). Ma ancor prima, nel Capitolo 1, si è visto che, in virtù del principio di isotropia, ogni tensore doppio simmetrico $T^{\alpha\beta}$ risulta completamente determinato da due sole **funzioni caratteristiche** ϕ e ψ del solo tempo cosmico, e si è dimostrato che *le quattro equazioni di conservazione* $\nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta} = 0$ *si riducono ad una sola equazione differenziale ordinaria del primo ordine nelle funzioni ϕ e ψ , qualunque sia la connessione cosmica*. In virtù di questa generale proprietà, si dimostra (Teorema 3.1.1) che le dieci equazioni di Einstein sono equivalenti a due sole equazioni differenziali di primo e secondo ordine nel fattore di scala $a(t, t_{\sharp})$ coinvolgenti le due funzioni caratteristiche ϕ e ψ del tensore energia-impulso, la costante cosmologica Λ e la costante di curvatura spaziale \tilde{K} al tempo di riferimento t_{\sharp} .

Queste equazioni dinamiche sono simili alle celebri **equazioni di Friedmann-Lemaître-Robertson** ma, al contrario di queste, *valgono in tutta generalità per ogni tipo di tensore energia-impulso*. A questo proposito si è ritenuto opportuno svolgere un'esame dettagliato delle equazioni di Friedmann e Lemaître (paragrafo 3.4) al fine di mostrarne alcune criticità interpretative.

Con un **secondo postulato** dinamico (paragrafo 3.2) si assume che il tensore energetico del fluido cosmico sia quello di un **fluido perfetto**:

$$T^{\alpha\beta} = c^{-2} (\varepsilon + p) V^{\alpha} V^{\beta} + p g^{\alpha\beta}$$

dove V^{α} è la **velocità assoluta** del fluido cosmico, per cui vale la condizione di normalizzazione $g_{\alpha\beta} V^{\alpha} V^{\beta} = -c^2$, $\varepsilon(t)$ è la **densità di energia**, $p(t)$ la **pressione**. Si dimostra quindi che le funzioni caratteristiche sono date da

$$\phi = \varepsilon(t), \quad \psi = a^{-2}(t) p(t).$$

Infine, un **terzo postulato** dinamico (paragrafo 3.3) riguarda le **equazioni di stato**, cioè la tipologia delle funzioni $\varepsilon(t)$ e $p(t)$ e le relazioni intercorrenti fra queste. In particolare, la densità totale di energia $\varepsilon(t)$ viene vista come somma delle densità di energia $\varepsilon_i(t)$ di varie componenti del fluido cosmico legate alle corrispondenti pressioni p_i dalle semplici relazioni lineari $p_i = w_i \varepsilon_i$ con w_i costanti adimensionali dette **parametri di stato**. Quindi su questo postulato, eventualmente implementato, si possono basare i cosiddetti **modelli cosmologici a molte componenti**. Si tratta però di modelli poco attendibili anche a causa della loro complessità.

A questo punto il ‘principio di semplicità’ ci induce a tener conto dei due tipi fondamentali di energia distribuita nell’Universo, l’energia della materia e l’energia della radiazione, anche se è costume aggiungerne un terzo, quello di *energia oscura*.

Questa semplificazione viene formalizzata nel **quarto postulato** (paragrafo 3.5): la densità di energia ε presente nell’Universo è la somma

$$\varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_r$$

di una **densità di energia di materia** e di una **densità di energia di radiazione** con due distinte proprietà caratteristiche. La densità ε_m non genera pressione

$$p_m = 0 \quad (w_m = 0)$$

ed è a sua volta la somma

$$\varepsilon_m = \varepsilon_b + \varepsilon_c$$

di una **densità di energia della materia barionica** e di una **densità di energia della materia oscura** (fredda) di cui, come si sa, non si conosce ancora la natura. La ε_r genera invece una pressione con equazione di stato

$$p_r(t) = \frac{1}{3} \varepsilon_r(t) \quad (w_r = \frac{1}{3})$$

Si postula inoltre che esista un tempo t_{eq} in cui le densità di energia di materia e di radiazione assumono lo stesso valore

$$\varepsilon_m(t_{\text{eq}}) = \varepsilon_r(t_{\text{eq}})$$

Su queste basi si costruisce un modello cosmologico che chiamiamo **modello MR** (materia-radiazione) a cui è dedicato quasi tutto il resto del lavoro.

Questo modello si differenzia dal modello standard Λ CDM per il fatto che l’equazione dinamica che governa l’evoluzione del fattore di scala $a(t, t_0)$, con tempo di riferimento il tempo presente t_0 , può ridursi alla forma (Teorema 3.7.2)

$$[*] \quad \dot{a}^2 = H_0^2 \left[1 + \Omega_\Lambda (a^2 - 1) + \Omega_m \left(a^{-1} - 1 + \frac{a^{-2} - 1}{1 + z_{\text{eq}}} \right) \right]$$

dove intervengono solo quattro costanti, che chiamiamo **dati primari**:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 \quad \text{valore attuale del fattore di Hubble,} \\ \Omega_\Lambda \quad \text{parametro di energia oscura,} \\ \Omega_m \quad \text{parametro di energia di materia,} \\ z_{\text{eq}} \quad \text{redshift corrispondente al tempo } t_{\text{eq}}. \end{array} \right.$$

Dei quattro **parametri cosmologici** propri del modello Λ CDM,

$$\left[\begin{array}{l} \text{energia oscura,} \quad \Omega_\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{3} \frac{c^2}{H_0^2} \Lambda \iff \Lambda = \frac{3H_0^2}{c^2} \Omega_\Lambda, \\ \text{materia,} \quad \Omega_m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{3} \frac{c^2}{H_0^2} \chi \varepsilon_{m0} \iff \chi \varepsilon_{m0} = \frac{3H_0^2}{c^2} \Omega_m, \\ \text{radiazione,} \quad \Omega_r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{3} \frac{c^2}{H_0^2} \chi \varepsilon_{r0} \iff \chi \varepsilon_{r0} = \frac{3H_0^2}{c^2} \Omega_r, \\ \text{curvatura,} \quad \Omega_K \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_\Lambda - \Omega_m - 1, \end{array} \right.$$

rimangono solo Ω_Λ e Ω_m mentre gli altri due, Ω_r e Ω_m , sono rimpiazzati dal redshift z_{eq} corrispondente al **tempo di pareggiamento** t_{eq} tra le densità di materia e di radiazione. Questa riduzione è possibile grazie al fatto che l'esistenza del tempo di pareggiamento t_{eq} implica una relazione lineare tra il parametro di materia e il parametro di radiazione:

$$\Omega_r = \frac{\Omega_m}{1 + z_{\text{eq}}}.$$

Un secondo non trascurabile vantaggio del modello MR è che nell'equazione dinamica [*] non interviene il parametro di curvatura spaziale Ω_K . Questo evita di cadere nell'errore di ritenere che la curvatura sia nulla (**flatness assumption**) semplicemente perché dai dati osservazionali il suo valore risulta essere estremamente piccolo. In realtà è possibile dimostrare (Teorema 3.8.1) che **indipendentemente dai valori dei dati primari, nel modello MR la curvatura spaziale non può essere nulla**.

L'analisi dell'equazione dinamica [*] è facilitata dal fatto che essa è una **equazione di Weierstrass**, cioè del tipo

$$\dot{a}^2 = W(a).$$

Una siffatta equazione offre infatti tre notevoli vantaggi.

(i) Anche se non la si sa integrare, dall'analisi della **funzione di Weierstrass** $W(a)$ nel piano ($y = \dot{a}^2, x = a$) si possono riconoscere le proprietà caratteristiche delle soluzioni $a(t)$. I grafici nel piano (t, a) delle soluzioni vengono qui chiamati **profili dell'Universo**.

(ii) L'integrale

$$[**] \quad t(a) = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{W(x)}}$$

fornisce il tempo t in cui il fattore di scala assume il valore a , estremo superiore dell'intervallo di integrazione. Pertanto, calcolando questi integrali per una fitta sequenza di valori di a , a partire da $a = 0$, e invertendo la tabulazione della funzione $t(a)$ si ottiene un **profilo puntuale** dell'Universo $a(t, t_0)$ che parte dall'origine $(0, 0)$ e che quindi prevede l'esistenza della singolarità $a = 0$ per $t = 0$ (big-bang). In particolare, con $a = 1$ l'integrale **[**]** fornisce l'**età dell'Universo**:

$$t_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{W(x)}}$$

(iii) A differenza degli ordinari metodi d'integrazione numerica *step by step* l'errore nel calcolo di $t(a)$ non si propaga da un passo a quello successivo.

Col Capitolo 4 inizia l'analisi numerica. Occorre innanzitutto fissare i valori dei dati primari da immettere nell'equazione dinamica. L'analisi dei numerosi *data reports* associati ai vari progetti spaziali portati avanti negli ultimi anni, a cui si accenna brevemente nel paragrafo 4.1, porta a considerare sufficientemente affidabili le stime seguenti:

Tabella 1: Dati primari del modello MR.

\hat{H}_0	$70.0 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$	Ligo [12]
\bar{H}_0	$67.74 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$	Planck [2]
Ω_Λ	0.6911	Planck [2]
Ω_m	0.3089	Planck [2]
z_{eq}	3371	Planck [2]

Con queste stime si può dimostrare che **secondo il modello MR la curvatura spaziale è positiva** (Teorema 4.2.1) e se ne può calcolare il valore attuale (paragrafo 4.5)

$$\hat{H}_0 \mapsto K_0 \simeq 0.46885 * 10^{-6} \text{ Glyr}^{-2} \quad \bar{H}_0 \mapsto K_0 \simeq 0.43907 * 10^{-6} \text{ Glyr}^{-2}$$

insieme al raggio di curvatura

$$\hat{H}_0 \mapsto r_0 \simeq 1460.4299 \text{ Glyr} \quad \bar{H}_0 \mapsto r_0 = 1509.1540 \text{ Glyr}$$

Per quel che riguarda la costante di Hubble H_0 si è deciso di tener conto di due stime. La prima, denotata con \hat{H}_0 , di recente acquisizione e ritenuta di alta precisione, è stata fornita dall'esperimento LIGO sulle onde gravitazionali del 2017. La seconda,

denotata con \bar{H}_0 , risale al rapporto 2016 del progetto Planck. Il motivo di questa doppia scelta è dovuto al fatto che la funzione di Weierstrass dell'equazione [*]

$$W(a) = H_0^2 \left[1 + \Omega_\Lambda (a^2 - 1) + \Omega_m \left(a^{-1} - 1 + \frac{a^{-2} - 1}{1 + z_{\text{eq}}} \right) \right],$$

avendo a fattore H_0 , è molto 'sensibile' anche alle sue più piccole variazioni. Questa 'sensibilità' si propaga quindi a tutti i dati numerici derivanti dalla $W(a)$. Per esempio, per l'età dell'Universo si ottengono le due stime

$$\hat{H}_0 \mapsto t_0 \simeq 13.36116 \text{ Gyr} \quad \bar{H}_0 \mapsto t_0 \simeq 13.80692 \text{ Gyr}$$

Il tempo t_0 è uno dei **quattro tempi cruciali** t_* che occorre prendere in considerazione. A questi corrispondono altrettanti valori cruciali a_* del fattore di scala:

a_*	evento	t_*
1	tempo attuale	t_0
a_{eq}	pareggiamento densità di materia e radiazione	t_{eq}
a_q	inizio dell'espansione accelerata	t_q
a_{re}	reionizzazione (inizio dell'emissione di luce)	t_{re}

Il decremento di H_0 nel passaggio da \hat{H}_0 a \bar{H}_0 ha l'effetto di aumentare tutte le datazioni e quindi di spostare in avanti (verso il futuro) il profilo dell'Universo, come mostrato nella Figura 1.

Noti i valori dei fattori di scala cruciali a_* , le varie datazioni si calcolano con il solito integrale

$$t_* = \int_0^{a_*} \frac{dx}{\sqrt{W(x)}}.$$

Le stime risultanti sono (paragrafo 4.8):

$\hat{H}_0 \mapsto t_{\text{eq}} \simeq 50,1595 \text{ yr}$	$\hat{H}_0 \mapsto t_{\text{re}} \simeq 0.54409 \text{ Gyr}$
$\bar{H}_0 \mapsto t_{\text{eq}} \simeq 51,8330 \text{ yr}$	$\bar{H}_0 \mapsto t_{\text{re}} \simeq 0.56224 \text{ Gyr}$
$\hat{H}_0 \mapsto t_q \simeq 7.37949 \text{ Gyr}$	
$\bar{H}_0 \mapsto t_q \simeq 7.62569 \text{ Gyr}$	

La determinazione di un profilo numerico del modello MR è di per sé un risultato significativo, ma ciò di cui abbiamo effettivamente bisogno per proseguire la nostra

analisi è una sua rappresentazione analitica. È però impensabile affrontare la ricerca di una soluzione esatta dell'equazione dinamica di Weierstrass. Sarebbe anche inutile perché, con ogni probabilità, coinvolgerebbe funzioni trascendenti non elementari trattabili solo attraverso rappresentazioni approssimate.

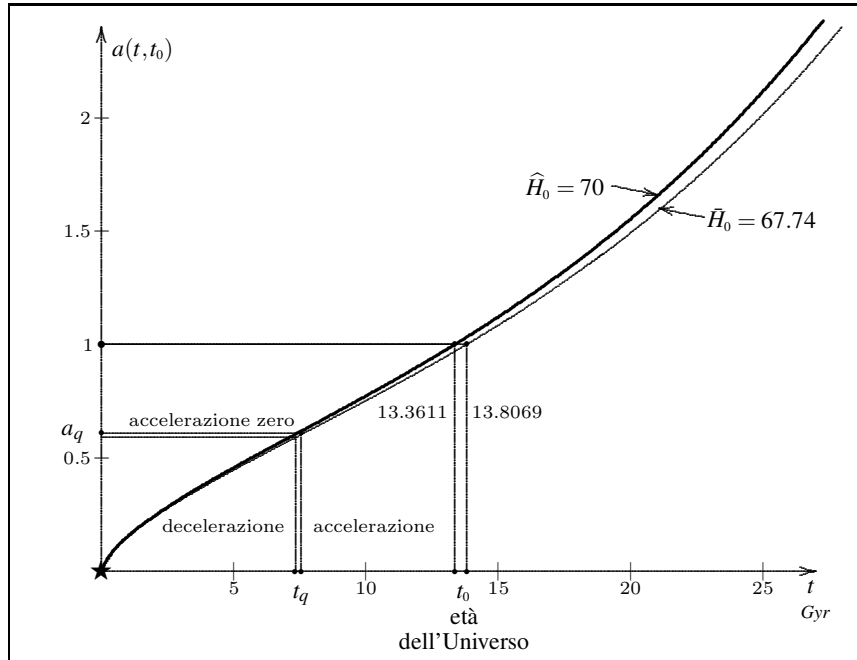


Figura 1: Profili corrispondenti ai due valori \hat{H}_0 e \bar{H}_0 della costante di Hubble.

Questo cruciale problema viene risolto al paragrafo 4.9 osservando che un profilo del tipo

$$a(t, t_0) = \alpha \sqrt[3]{\cosh(\beta t) - 1}$$

con α e β costanti positive, è molto simile a quello ottenuto per via numerica. Anzi, diventa praticamente indistinguibile (specialmente nei punti cruciali di cui si è detto sopra) se le costanti assumono i valori (Teorema 4.9.2)

$$\alpha \simeq 0.607247, \quad \beta = 0.178366 \text{ Gyr}^{-1},$$

che seguono dall'aver assunto il valore \hat{H}_0 per la costante di Hubble.

Grazie alla conoscenza di questo profilo analitico, negli ultimi due capitoli viene condotta un'analisi teorica e al contempo numerica concernente la trasmissione di segnali luminosi, la visibilità dell'Universo e il fenomeno di redshift. I principali risultati ottenuti sono riassumibili nella Figura 2 che fornisce una panoramica della

configurazione dell'Universo riferita all'epoca attuale e ad un osservatore sito in una qualunque galassia B .

Il grande cerchio rappresenta la sfera tridimensionale \mathbb{S}_3 dove al tempo presente t_0 sono distribuite le galassie. Il suo raggio è $r_0 \simeq 1460.42 \text{ Glyr}$ (4.15). Nella parte superiore della figura è rappresentato l'intorno dell'osservatore in B . Stante l'estremamente piccola curvatura di \mathbb{S}_3 , l'Universo appare a B piatto almeno fino ad una distanza di circa 29.59 miliardi di anni luce. Questo è il **raggio di visibilità attuale** $r_{\text{vis}}(t_0)$ oltre al quale, oggi, non si può vedere nulla.

Esiste anche un **raggio di invisibilità assoluta dell'Universo**

$$r_{\text{inv}} \simeq 45.61 \text{ Glyr}$$

oltre il quale l'Universo resta per sempre invisibile a B .

Questi due 'raggi' sono delle distanze misurate sulla sfera \mathbb{S}_3 , a partire da B , che sottendono quindi due angoli al centro $\psi_{\text{vis}}(t_0)$ e ψ_{inv} . Nel corso del tempo l'**angolo di visibilità attuale** $\psi_{\text{vis}}(t_0)$ tende asintoticamente all'**angolo di invisibilità assoluta** ψ_{inv} , che invece resta costante. Va detto che essi non sono riportati in scala con il resto della figura; rispettando la scala risulterebbero essere quasi impercettibili:

$$\psi_{\text{vis}}(t_0) = \frac{r_{\text{vis}}(t_0)}{r_0} \simeq 0.020262, \quad \psi_{\text{inv}} = \frac{r_{\text{inv}}}{r_0} \simeq 0.031233.$$

La conclusione è stupefacente:

Esiste un mondo di galassie immensamente più grande di quello che oggi possiamo osservare e che resterà per sempre a noi sconosciuto. Questo mondo invisibile influisce comunque sull'evoluzione dell'intero Universo, quindi anche su quella parte a noi oggi visibile.

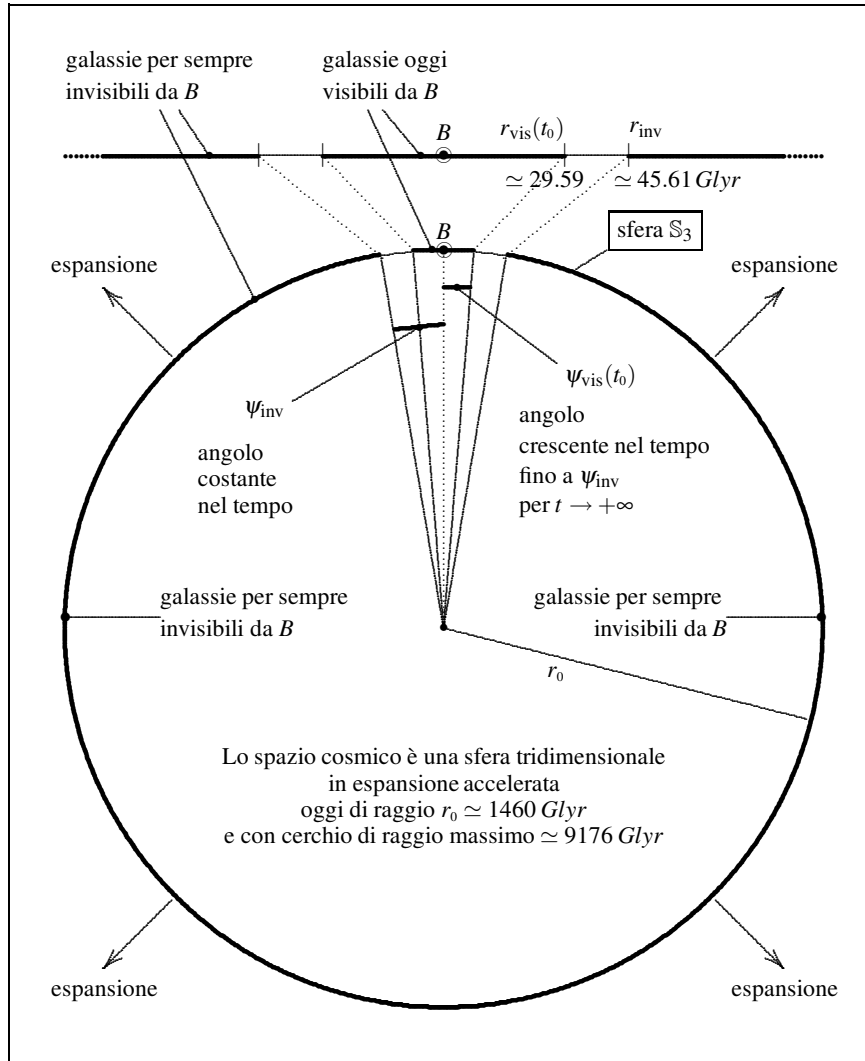


Figura 2: Configurazione attuale dell'Universo riferito ad un osservatore posto in una qualunque galassia B .

Capitolo 1

Geometria dello spazio-tempo cosmico

1.1 Postulati geometrici

In una visione semplificata e su larga scala della cosmologia possiamo pensare ai corpi diffusi nell'Universo come particelle costituenti un **fluido cosmico**. Non è necessario discutere ora sulla natura di questi **corpi cosmici**; possono essere stelle, galassie o quant'altro. Per semplicità li interpreteremo come **galassie**.¹ Il fluido cosmico potrà quindi anche essere chiamato **fluido galattico**.

Postulato I. *L'evoluzione dell'Universo è descritta in una varietà a quattro dimensioni M chiamata **spazio-tempo cosmico**, i cui elementi (o punti) sono chiamati **eventi**.*

Postulato II. *La vita di un corpo cosmico (galassia) è una sequenza di eventi costituenti una curva regolare in M che chiamiamo **storia** ('world-line' nella terminologia anglo-sassone). Le storie del fluido cosmico formano una **congruenza di curve** che riempie l'intero spazio-tempo M (Figura 1.1).*

Una *congruenza* è un fascio di curve regolari che non si intersecano mai. La collisione tra corpi cosmici è quindi esclusa da questo postulato.

¹ Teniamo conto che uno dei primi fondamentali fenomeni osservati in cosmologia è la **legge di Hubble** che riguarda la distanza tra galassie e la loro velocità di recessione.

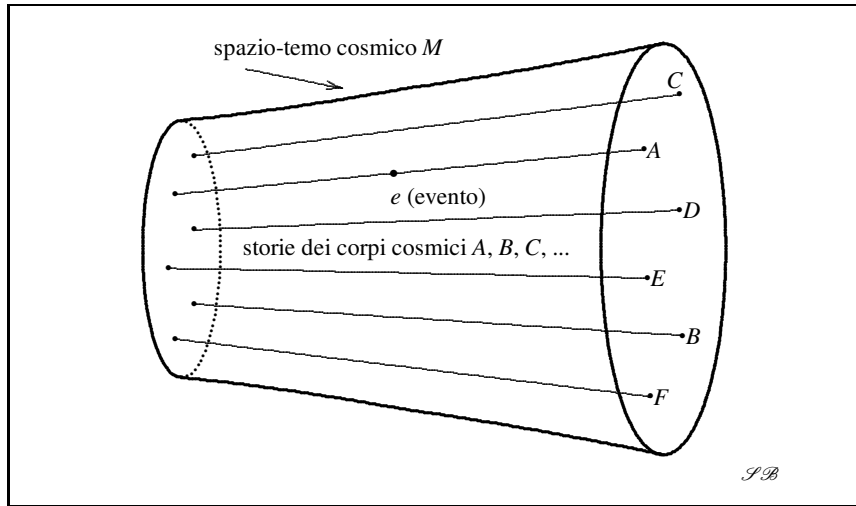


Figura 1.1: Spazio-tempo cosmico M e congruenza delle storie dei corpi cosmici.

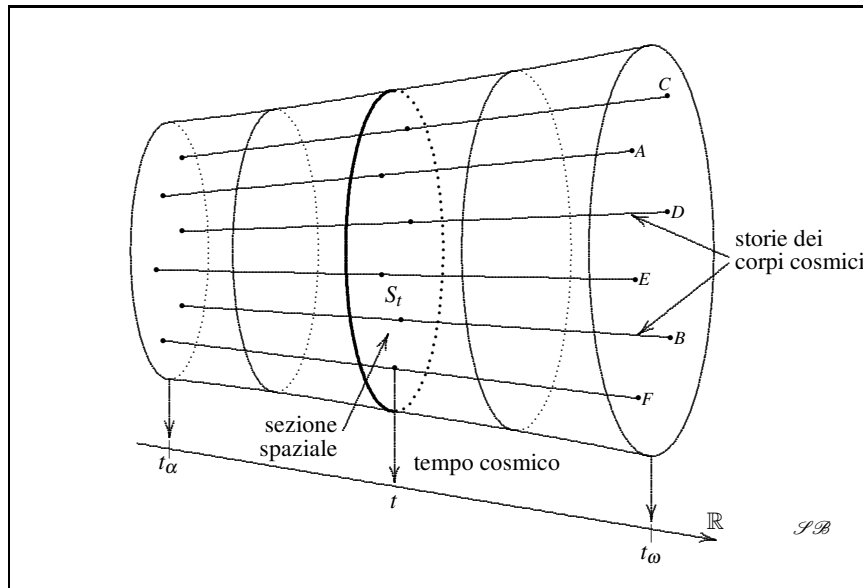


Figura 1.2: Storie del fluido cosmico, sezioni spaziali e tempo cosmico.

Postulato III. In M esiste un fogliettamento di sottovarietà tridimensionali S_t , chiamate **sezioni spaziali**, trasversali alle storie del fluido cosmico e parametrizzate da un numero reale t variabile in un intervallo aperto $(t_\alpha, t_\omega) \subseteq \mathbb{R}$ (Figura 1.2).

Il termine **fogliettamento** sta ad indicare la partizione di una varietà M in sottovarietà di dimensione inferiore e disgiunte, cioè senza punti di intersezione. Una

congruenza di curve, vedi sopra, è un esempio di fogliettamento dove le sottovarietà sono curve (dimensione 1). Inoltre il termine **trasversale** sta ad indicare che le storie non sono mai tangenti alle sezioni. L'attributo 'spaziali' assegnato alle sezioni S_t sarà giustificato più avanti con il Postulato V.

Segue un primo teorema, la cui dimostrazione utilizza elementari nozioni di geometria differenziale:

Teorema 1.1.1 – (i) *Le storie del fluido cosmico definiscono dei diffeomorfismi fra le sezioni spaziali.* (ii) *Queste storie sono a loro volta diffeomorfe all'intervallo aperto (t_α, t_ω) .*

Il parametro t può essere interpretato come **tempo cosmico**. Se un evento $e \in M$ è localizzato in una sezione spaziale S_t allora diciamo che esso **accade al tempo t** , o che **la sua data è $t(e)$** .

Il tempo cosmico t determina una **cronologia degli eventi**: dati due eventi e_1 e e_2 , diciamo che

$$e_1 \text{ accade prima di } e_2 \iff t(e_1) < t(e_2),$$

$$e_1 \text{ accade dopo } e_2 \iff t(e_1) > t(e_2),$$

$$e_1 \text{ e } e_2 \text{ sono simultanei} \iff t(e_1) = t(e_2).$$

Pertanto le sezioni spaziali S_t sono composte da **eventi simultanei**.

Per il momento, il tempo cosmico t non è univocamente determinato. Può essere sostituito da un qualunque altro parametro, purché quest'ultimo non modifichi la cronologia, che ha quindi **carattere assoluto**. Il tempo t acquisirà un significato fisico solo attraverso un postulato-ponte (Capitolo 2) preparatorio alla dinamica.

L'istituzione di una cronologia assoluta, che è uno dei postulati della meccanica newtoniana, può suscitare qualche perplessità. Tuttavia essa è il necessario preludio alla definizione dei concetti di **omogeneità** e **isotropia spaziale** che vedremo fra breve e che insieme formano il cosiddetto **principio cosmologico** adottato nella maggior parte dei modelli cosmologici.

L'esistenza di sottovarietà di eventi simultanei è d'altra parte giustificata dall'ipotesi (che sarà tradotta in un postulato) che esistano delle entità fisiche scalari $\rho(t)$, come p.es. la densità di materia o di radiazione, che sono funzioni monotone del tempo, cioè sempre crescenti o sempre decrescenti. Ne consegue che due eventi sono da ritenersi simultanei se in essi la densità ρ assume lo stesso valore e quindi che la densità ρ può essere assunta come parametro temporale in sostituzione di t .

Gli estremi t_α e t_ω dell'intervallo di definizione di t rappresentano rispettivamente le **date d'inizio e di fine** dell'Universo. Non dobbiamo per ora imporre alcuna condizione sulla limitatezza o meno (unilaterale o bilaterale) di questo intervallo. Non possiamo cioè escludere i casi in cui $t_\alpha = -\infty$ o $t_\omega = +\infty$. La tipologia (o topologia) di questo intervallo, e di conseguenza la durata di vita dell'Universo, sarà determinata dai postulati dinamici.

1.2 Il principio di isotropia e sue conseguenze

Il **principio copernicano** assume che né il Sole né la Terra sono in una posizione speciale, particolarmente favorita, dell'Universo. Possiamo rafforzare questo principio richiedendo che non ci siano neanche direzioni privilegiate. Si tratta del cosiddetto **principio di isotropia**. Siccome possiamo interpretare una sezione spaziale S_t come una *istantanea* del mondo fisico tridimensionale al tempo t , possiamo esprimere il principio di isotropia come segue:

Postulato IV. *Su ogni sezione spaziale S_t non esistono campi vettoriali privilegiati aventi significato geometrico o fisico.*

I vettori tangenti alle sezioni spaziali saranno detti **vettori spaziali**. È ragionevole pensare che in ognuna delle 'istantanee' S_t del mondo fisico si possano misurare lunghezze, angoli, volumi, ecc. Traduciamo questo pensiero nel postulato seguente.

Postulato V. *Nello spazio-tempo cosmico esiste un campo tensoriale doppio g , covariante e simmetrico, che si annulla sui vettori tangenti alle curve del fluido cosmico e che su ogni sezione spaziale S_t definisce un tensore metrico positivo g_t .*

In questo postulato è sottinteso che g , e quindi i tensori g_t , siano di classe sufficientemente alta da garantire la validità delle formule in cui saranno coinvolti. In ogni caso, non c'è perdita di generalità nel considerare di classe C^∞ tutti i campi scalari, vettoriali e tensoriali fin qui introdotti e che introdurremo nel seguito.

Ogni sezione spaziale S_t risulta essere un varietà riemanniana tridimensionale con metrica definita positiva (Figura 1.3).

Per mezzo della metrica g_t possiamo definire il **gradiente** di qualunque campo scalare su S_t . Un tale gradiente è un campo vettoriale privilegiato. Ciò è in contrasto col principio di isotropia. Il seguente teorema ne evita l'esistenza.

Teorema 1.2.1 – Omogeneità spaziale: *dal principio di isotropia segue che ogni campo scalare su M avente significato geometrico o fisico è funzione del solo tempo cosmico t , è cioè costante su ogni sezione spaziale S_t .*

Nel percorso assiomatico che stiamo seguendo l'omogeneità spaziale è dunque una conseguenza dell'isotropia, mentre nell'approccio classico alla cosmologia l'omogeneità è considerata come 'principio' insieme all'isotropia (vedi sopra).

Il principio di isotropia implica il principio copernicano di cui si è detto all'inizio del paragrafo.

Teorema 1.2.2 – Il principio di isotropia implica la non esistenza su una qualunque sezione spaziale S_t di punti privilegiati aventi significato geometrico o fisico.

Traccia della dimostrazione. In un intorno (sufficientemente ristretto) $U \subset S_t$ di un tale punto P possiamo definire, per mezzo della metrica g_t , la distanza $d_{P,X}(t)$ di ogni punto $X \in U$ da P . Di conseguenza, il gradiente di $d_{P,X}$ determina un campo vettoriale privilegiato su U in contrasto con il principio di isotropia. ■

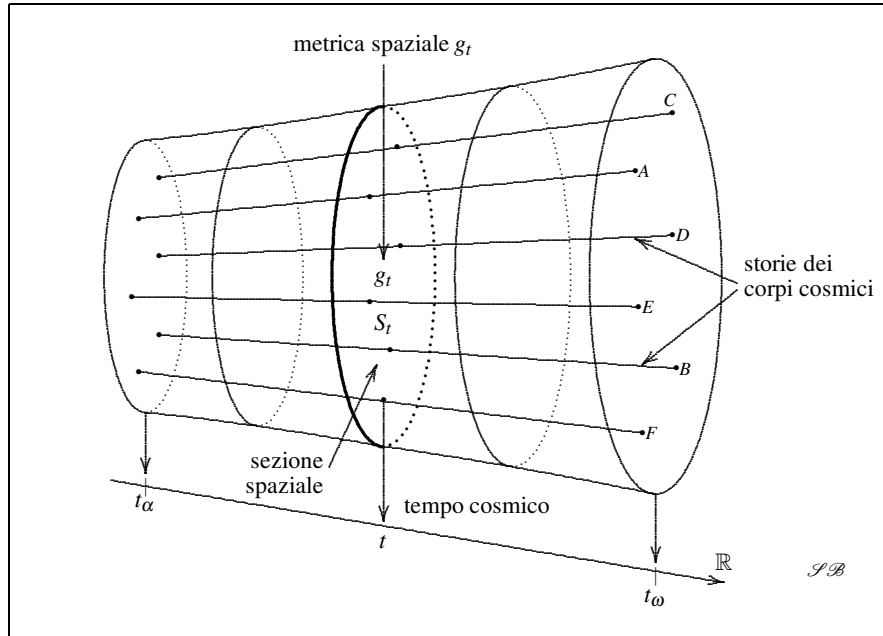


Figura 1.3: Elementi geometrici fondamentali nello spazio-tempo.

Teorema 1.2.3 – *Ogni sezione spaziale (S_t, g_t) è una varietà riemanniana tridimensionale a curvatura costante.*

Traccia della dimostrazione. Qui intervengono nozioni basilari di geometria riemanniana in parte richiamate nel paragrafo 1.4 più avanti. In ogni varietà riemanniana tridimensionale il tensore di Ricci determina in ogni punto tre direzioni privilegiate, in contrasto con il principio di isotropia. Queste direzioni non sono definite se e solo se il tensore di Ricci è proporzionale al tensore metrico: $R_t = \lambda_t g_t$. Il fattore λ_t deve essere costante su S_t in virtù del Teorema 1.2.1. Quindi, (S_t, g_t) risulta essere una **varietà di Einstein**. Un teorema di geometria riemanniana stabilisce che ogni varietà di Einstein tridimensionale ha curvatura costante. ■

1.3 Commenti sul principio di Weyl

In genere i trattati di cosmologia considerano il principio di Weyl e il principio cosmologico (isotropia e omogeneità) come basi per la costruzione di modelli di dinamica dell'Universo. Essi sono comunemente formulati come segue.²

Weyl's principle: *In cosmic spacetime the world-lines of the galaxies form a bundle of non-intersecting time-like geodesics orthogonal to a series of space-like hyper-surfaces.*

Cosmological principle: *On large scales the Universe is spacely homogeneous and spacely isotropic.*

Primo commento. Il principio di Weyl pone fin da subito la cosmologia nel dominio relativistico. Nel nostro approccio la seconda parte di questo principio, relativo alle geodetiche, è un teorema (Teorema 2.4.2) posto nel Capitolo 2 concernente i postulati-ponte, mentre la prima parte concernente le storie cosmiche è parte del nostro Postulato II. Ci si può porre la domanda: perché non accettare il principio di Weyl fin dall'inizio invece di spendere tanto tempo e spazio partendo da parecchi postulati molto più deboli? La risposta è che, innanzitutto, i nostri postulati sono di semplice e immediata comprensione per chi non ha una pronta familiarità con la teoria della relatività generale. Il secondo motivo, importante anche per chi ha questa familiarità, è che seguendo la nostra via non si perde la visione di fatti interessanti e importanti che non sono strettamente pertinenti alla relatività. È la differenza fra un viaggio in auto e un viaggio in aereo. Con l'auto si può osservare da vicino il succedersi di pittoreschi panorami e splendidi monumenti. A parte questa similitudine va osservato che, come si vedrà, la legge di Hubble così come molte altri concetti, concernenti per esempio il fattore di scala e lo spazio di riferimento, i tensori isotropi e le connessioni cosmiche, che sono indipendenti da ogni ipotesi sulla 'fisica' del fluido cosmico, sarebbero lasciati per sempre nell'oscurità.

Secondo commento. Circa il principio cosmologico va osservato che nel nostro più lungo approccio il principio di isotropia implica (teorema) l'omogeneità spaziale.

1.4 Connessioni lineari e curvatura

Richiamiamo alcune nozioni basilari di geometria differenziale, non solo per chiarire il significato di quanto detto nei paragrafi precedenti ma anche perché ad esse faremo sovente riferimento nel seguito. Consideriamo una varietà n -dimensionale Q con coordinate locali $(q^\alpha) = (q^1, \dots, q^n)$.

1. Una **connessione Γ su di una varietà Q** è una *regola*, chiamata **trasporto parallelo**, secondo la quale, assegnata su Q una qualunque curva parametrizzata $q^\alpha(\xi)$ su di un intervallo (ξ_0, ξ_1) e dato un qualunque vettore v_0 nel punto iniziale

² Si veda p.es. [15].

$P_{\xi_0} = [q^\alpha(\xi_0)]$, risulta univocamente determinato un vettore v_ξ in ogni punto $P_\xi = [q^\alpha(\xi)]$ della curva e quindi anche nel punto finale $P_{\xi_1} = [q^\alpha(\xi_1)]$. Va subito detto che, mantenendo fissati i punti iniziale e finale nonché il vettore v_0 , ma cambiando la curva che unisce tali punti, il vettore trasportato nel punto finale è, in generale, diverso dal vettore ottenuto percorrendo la curva precedente.

2. Una connessione è detta **lineare** se il suo trasporto parallelo commuta con la combinazione lineare dei vettori. Nel dominio di un dato sistema di coordinate $(q^\alpha) = (q^1, \dots, q^n)$ una connessione lineare Γ è rappresentata da **simboli** a tre indici $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$, funzioni delle coordinate, tali che il trasporto di un vettore $v^\alpha(\xi)$ lungo una curva $q^\alpha(\xi)$ è governato da equazioni del tipo

$$(1.1) \quad \frac{dv^\gamma}{d\xi} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma v^\alpha \frac{dq^\beta}{d\xi} = 0,$$

dette **equazioni di trasporto**. D'ora in poi considereremo solo connessioni lineari. L'attributo 'lineare' sarà quasi sempre omissso. Cambiando il sistema di coordinate i simboli di una connessione cambiano secondo la legge

$$(1.2) \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = J_{\gamma'}^\gamma \Gamma_{\alpha'\beta'}^{\gamma'} J_{\alpha'}^{\alpha} J_{\beta'}^{\beta} + J_{\gamma'}^\gamma \partial_{\alpha'} J_{\beta'}^{\gamma'}, \quad J_{\alpha'}^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial q^{\alpha'}}{\partial q^\alpha}, \quad J_{\alpha'}^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial q^\alpha}{\partial q^{\alpha'}}.$$

che dà **significato intrinseco** alle equazioni di trasporto (1.1).³

3. Una connessione è detta **simmetrica** se i suoi simboli sono simmetrici negli indici in basso, $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma$. Si può dimostrare che questa proprietà non dipende dalla scelta delle coordinate.

4. Una connessione simmetrica determina due **tensori di curvatura** di fondamentale importanza, il **tensore di Riemann** e il **tensore di Ricci**. Le loro componenti sono rispettivamente definite come segue:⁴

$$(1.3) \quad R_{\alpha\mu\beta}^\nu \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\nu - \partial_\beta \Gamma_{\mu\alpha}^\nu + \Gamma_{\alpha\beta}^\ell \Gamma_{\mu\ell}^\nu - \Gamma_{\mu\alpha}^\ell \Gamma_{\beta\ell}^\nu$$

$$(1.4) \quad R_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} R_{\alpha\mu\beta}^\mu = \partial_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\mu}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\mu - \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma \Gamma_{\sigma\beta}^\mu$$

5. Una curva parametrizzata $q^\alpha(\xi)$ può essere interpretata come moto di un punto sulla varietà riferito al 'tempo' ξ . Il vettore

$$v^\alpha(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dq^\alpha}{d\xi}$$

³ Si dice che una definizione o un'equazione che fa ricorso ad un sistema di coordinate ha **significato intrinseco**, o anche **significato geometrico**, se non dipende dalla scelta delle coordinate.

⁴ Queste definizioni sono materia di convenzioni. Esse possono cambiare e per la posizione degli indici e per il segno.

è allora interpretabile come **velocità** del punto. Una connessione permette di definire il vettore **accelerazione**

$$(1.5) \quad a^\gamma(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2 q^\gamma}{d\xi^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{dq^\alpha}{d\xi} \frac{dq^\beta}{d\xi}.$$

Entrambi questi vettori risultano essere indipendenti dalla scelta delle coordinate.

6. Una curva è detta **geodetica** rispetto ad una connessione se la sua accelerazione è sempre parallela alla velocità,

$$(1.6) \quad a^\gamma(\xi) = \lambda(\xi) \frac{dq^\gamma}{d\xi},$$

quindi se esiste una funzione $\lambda(\xi)$ per cui le **equazioni delle geodetiche**

$$(1.7) \quad \frac{d^2 q^\gamma}{d\xi^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{dq^\alpha}{d\xi} \frac{dq^\beta}{d\xi} = \lambda(\xi) \frac{dq^\gamma}{d\xi}$$

sono soddisfatte.

Il parametro di una curva può essere cambiato. Cambiano allora sia la velocità sia l'accelerazione. Una geodetica può ammettere un **parametro affine**, definito a meno di una trasformazione affine, per cui l'accelerazione si annulla, cosicché le equazioni (1.7) diventano

$$(1.8) \quad \frac{d^2 q^\gamma}{d\bar{\xi}^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{dq^\alpha}{d\bar{\xi}} \frac{dq^\beta}{d\bar{\xi}} = 0.$$

7. Una varietà si dice **riemanniana** se su di essa è definito un campo tensoriale doppio simmetrico, $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$, non degenere $\det[g_{\alpha\beta}] \neq 0$, detto **tensore metrico** o brevemente **metrica**. Se la sua segnatura è positiva la varietà si dice **propriamente riemanniana** o semplicemente **riemanniana**; altrimenti si dice **semi-riemanniana** o **pseudo-riemanniana**. Un tensore metrico serve innanzitutto a definire il prodotto scalare fra due vettori:

$$u \cdot v \stackrel{\text{def}}{=} g_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta.$$

8. Qualunque sia la segnatura della metrica, una varietà riemanniana ammette una connessione 'canonica', detta **connessione di Levi-Civita**. Essa è una connessione lineare e simmetrica il cui trasporto conserva il prodotto scalare. Si dimostra che è unica e che i suoi simboli sono dati da

$$(1.9) \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} (\partial_\alpha g_{\beta\delta} + \partial_\beta g_{\delta\alpha} - \partial_\delta g_{\alpha\beta}).$$

Questi vengono anche chiamati **simboli di Christoffel**, più precisamente **simboli di Christoffel di seconda specie**. Quelli di **prima specie** si ottengono abbassando l'indice in alto tramite il tensore metrico:

$$(1.10) \quad \Gamma_{\alpha\beta\delta} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma g_{\gamma\delta} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\beta\delta} + \partial_\beta g_{\delta\alpha} - \partial_\delta g_{\alpha\beta}).$$

9. Per una connessione di Levi-Civita possiamo definire il **tensore di Riemann totalmente covariante**

$$(1.11) \quad R_{\lambda\alpha\mu\beta} \stackrel{\text{def}}{=} g_{\lambda\nu} R^{\nu}_{\alpha\mu\beta}$$

e la **curvatura di Ricci** (o **scalare di Ricci**)

$$(1.12) \quad R \stackrel{\text{def}}{=} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$$

10. Si dimostra che se l'equazione

$$(1.13) \quad R_{\alpha\beta\gamma\delta} = K (g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma})$$

è soddisfatta allora il fattore K è una costante, detta **costante di curvatura**, e la varietà riemanniana, o il tensore metrico, si dicono **a curvatura costante**. L'equazione (1.13) equivale a

$$(1.14) \quad R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = K (\delta_{\gamma}^{\alpha} g_{\beta\delta} - \delta_{\delta}^{\alpha} g_{\beta\gamma}).$$

Ne consegue che su di una varietà a curvatura costante K di dimensione n il tensore e lo scalare di Ricci assumono rispettivamente le espressioni

$$(1.15) \quad R_{\alpha\beta} = (n-1)K g_{\alpha\beta} \quad R = n(n-1)K$$

Nota 1.4.1 – È importante osservare che i simboli di Christoffel (1.9) sono invarianti rispetto a **trasformazioni conformi** della metrica

$$g_{\alpha\beta} \mapsto \widehat{g}_{\alpha\beta} = \sigma g_{\alpha\beta}$$

con fattore costante $\sigma \in \mathbb{R}$. Ne consegue che anche le componenti dei tensori di Riemann e di Ricci sono invarianti:

$$\widehat{R}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}, \quad \widehat{R}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta}. \quad \bullet$$

Nota 1.4.2 – Se una metrica $g_{\alpha\beta}$ ha curvatura costante K allora ogni metrica ad essa conforme $\widehat{g}_{\alpha\beta} = \sigma g_{\alpha\beta}$ con fattore σ costante ha curvatura costante data da

$$(1.16) \quad \widehat{K} = \frac{K}{\sigma}$$

Infatti, se $g_{\alpha\beta}$ ha curvatura costante allora l'equazione (1.14) è soddisfatta e quindi

$$\widehat{R}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = K (\delta_{\gamma}^{\alpha} g_{\beta\delta} - \delta_{\delta}^{\alpha} g_{\beta\gamma}) = K \sigma^{-1} (\delta_{\gamma}^{\alpha} \widehat{g}_{\beta\delta} - \delta_{\delta}^{\alpha} \widehat{g}_{\beta\gamma}),$$

cioè

$$\widehat{R}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \widehat{K} (\delta_{\gamma}^{\alpha} \widehat{g}_{\beta\delta} - \delta_{\delta}^{\alpha} \widehat{g}_{\beta\gamma}),$$

con $\widehat{K} \stackrel{\text{def}}{=} K/\sigma$. •

Nota 1.4.3 – Si dimostra che nell'intorno di ogni punto di una varietà a curvatura costante K esistono delle coordinate (x_i) , dette **coordinate di curvatura** o **coordinate di Riemann**, tali che l'elemento di linea ds^2 assume la **forma di Riemann**

$$(1.17) \quad ds^2 = \frac{\sum_i e_i (dx_i)^2}{\left(1 + \frac{1}{4} K \sum_i e_i x_i^2\right)^2}, \quad e_i = \pm 1$$

Per una metrica definita positiva, per la quale $e_i = 1$, risulta

$$(1.18) \quad ds^2 = \frac{\sum_i (dx_i)^2}{\left(1 + \frac{1}{4} K \sum_i x_i^2\right)^2}$$

Le coordinate di curvatura sono **ortogonali**: $g_{ij} = 0$ per $i \neq j$. Un tale sistema di coordinate è determinato da un punto p_0 , dove le coordinate si annullano, e da una base u_i^0 di vettori unitari fra loro ortogonali applicati in p_0 . La presenza di un tale punto non è in contrasto col principio di isotropia. Un esempio notevole di coordinate di Riemann è fornito dalla proiezione stereografica della sfera \mathbb{S}_n (paragrafo 4.13). •

1.5 Permanenza del segno della curvatura spaziale

Denotiamo con $K(t)$ o con K_t la costante di curvatura di una sezione spaziale (S_t, g_t) (Teorema 1.2.3). Questa 'costante' è una funzione di t sull'intero intervallo temporale (t_α, t_ω) della vita dell'Universo.

Teorema 1.5.1 – (i) Se $K_{t_1} \neq 0$ allora per ogni altro $t_2 \neq t_1$ K_{t_2} ha lo stesso segno di K_{t_1} e le due metriche g_{t_1} e g_{t_2} sono legate dalla trasformazione conforme

$$(1.19) \quad g_{t_1} = \frac{K_{t_2}}{K_{t_1}} g_{t_2}$$

(ii) Se $K_{t_1} = 0$ allora $K_{t_2} = 0$ in ogni t_2 .

Dimostrazione. Denotiamo con R_t il tensore di Ricci della metrica spaziale g_t . Dalla prima delle (1.15) segue

$$R_{t_1} = 2 K_{t_1} g_{t_1}, \quad R_{t_2} = 2 K_{t_2} g_{t_2}.$$

Supposto $K_{t_1} \neq 0$ e ponendo

$$\sigma = \frac{K_{t_2}}{K_{t_1}},$$

per quanto detto nella Nota 1.4.2 e per l'equazione (1.16), la curvatura della metrica conforme $\widehat{g} = \sigma g_{t_2}$ è

$$\widehat{K} = \frac{K_{t_2}}{\sigma} = K_{t_1}.$$

Per la (1.15) il tensore di Ricci di \widehat{g} è uguale a

$$[1] \quad \widehat{R} = 2K_{t_1} g_{t_1}.$$

D'altra parte, per quanto detto nella Nota 1.4.1 abbiamo $\widehat{R}_{ab} = R_{t_2}$, quindi

$$[2] \quad \widehat{R} = R_{t_2} = 2K_{t_2} g_{t_2}.$$

Da [1] e [2] segue l'uguaglianza

$$(1.20) \quad \boxed{K_{t_1} g_{t_1 ab} = K_{t_2} g_{t_2 ab}}$$

e la (1.19) è dimostrata. Poiché entrambe le metriche g_{t_1} e g_{t_2} sono definite positive, nella (1.19) K_{t_1} e K_{t_2} devono avere lo stesso segno. (ii) Per quanto ora dimostrato, le due condizioni $K_{t_1} = 0$ e $K_{t_2} \neq 0$ sono in contraddizione. ■

Nota 1.5.1 – Il Teorema 1.5.1 afferma che *il segno della curvatura spaziale $K(t)$ non cambia in tutto l'intervallo temporale aperto (t_α, t_ω) della vita dell'Universo*. Il segno della curvatura detta le caratteristiche topologiche delle sezioni spaziali S_t .⁵ Per esempio, per $K(t) = 0$ la sezione spaziale S_t può essere omeomorfa allo spazio euclideo tridimensionale \mathbb{E}_3 , oppure ad un toro \mathbb{T}_3 . Invece, per $K(t) > 0$ la S_t può essere una sfera tridimensionale \mathbb{S}_3 . In ogni caso, anche se $K(t)$ è una funzione continua, un suo cambio di segno produrrebbe una discontinuità della topologia. Grazie al Teorema 1.5.1 una tale inaccettabile singolarità è evitata. ●

1.6 Fattore conforme tra due metriche spaziali

Nel caso di curvatura non nulla, avendo le curvature spaziali in due tempi diversi K_{t_1} e K_{t_2} lo stesso segno, il rapporto K_{t_2}/K_{t_1} è positivo per cui risulta definita una funzione positiva a due variabili temporali

$$(1.21) \quad \boxed{a(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{K_{t_2}}{K_{t_1}}}}$$

Di conseguenza l'equazione (1.19) assume la forma

$$(1.22) \quad \boxed{g_{t_1} = a^2(t_1, t_2) g_{t_2}}$$

e possiamo quindi affermare che (vedi Figura 1.4)

⁵ Il celebre **teorema di Killing-Hopf**, p.es. vedi [20] e [14], è lo strumento basilare per la classificazione topologica delle varietà a curvatura costante.

Teorema 1.6.1 – Esiste una funzione positiva $a(t_1, t_2)$, con $t_1, t_2 \in (t_\alpha, t_\beta)$, tale che due metriche spaziali sono legate dalla trasformazione conforme (1.22).

Nota 1.6.1 – Nel caso di curvatura nulla l'esistenza di una funzione $a(t_1, t_2) > 0$ soddisfacente l'equazione (1.22) segue dalla generale proprietà che due varietà riemanniane con stessa dimensione, stessa segnatura e stessa costante di curvatura sono localmente isomorfe. •

Nota 1.6.2 – L'equazione (1.22) è equivalente a

$$(1.23) \quad ds_{t_1} = a(t_1, t_2) ds_{t_2}$$

dove ds_{t_1} e ds_{t_2} sono gli elementi d'arco delle metriche g_{t_1} e g_{t_2} . •

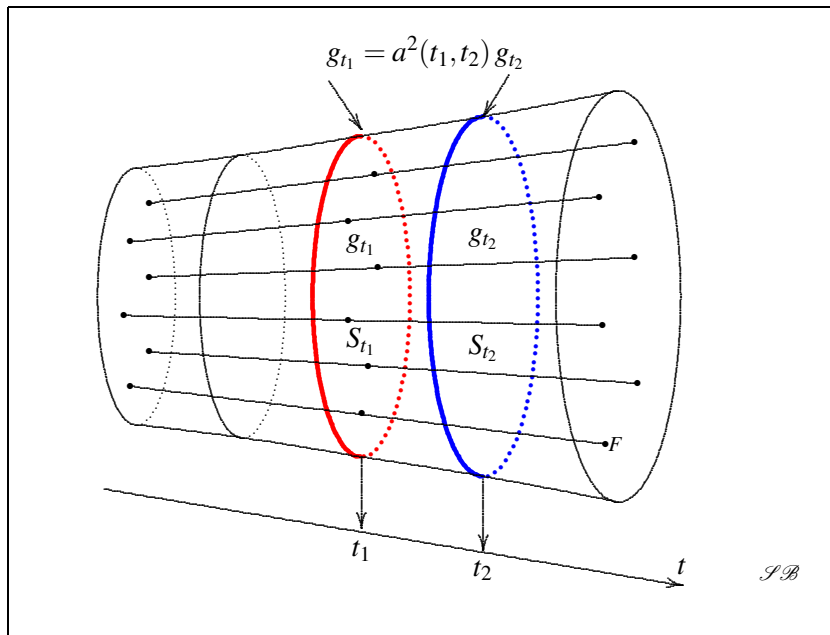


Figura 1.4: Trasformazione conforme (1.22) tra due metriche spaziali.

Nota 1.6.3 – Dall'equazione (1.22) si deducono le seguenti proprietà del fattore conforme $a(t_1, t_2)$:

$$(1.24) \quad \begin{array}{ll} a(t, t) = 1, & \text{normalizzazione,} \\ a(t_1, t_2) a(t_2, t_3) = a(t_1, t_3) & \text{composizione,} \\ a(t_2, t_1) = \frac{1}{a(t_1, t_2)} & \text{inversione.} \end{array}$$

Esse saranno applicate frequentemente senza esplicita menzione. •

1.7 Tempo di riferimento e fattore di scala

Fissando un valore $t_{\#}$ di t_2 e lasciando $t_1 = t$ libero di variare in tutto l'intervallo (t_α, t_ω) otteniamo una funzione $a(t, t_{\#})$ della sola variabile t che chiamiamo **fattore di scala con tempo di riferimento $t_{\#}$** . Chiamiamo **spazio di riferimento** la sezione spaziale $S_{t_{\#}}$ dotata della **metrica di riferimento $g_{t_{\#}}$** . Per $t = t_{\#}$ abbiamo $a(t_{\#}, t_{\#}) = 1$. Il tempo di riferimento può quindi essere interpretato come **tempo di normalizzazione** per il fattore di scala.

Dalla (1.22) segue l'equazione

$$(1.25) \quad \boxed{g_t = a^2(t, t_{\#}) g_{t_{\#}}}$$

che nel seguito sarà richiamata più volte come **relazione di fattorizzazione** delle metriche spaziali.

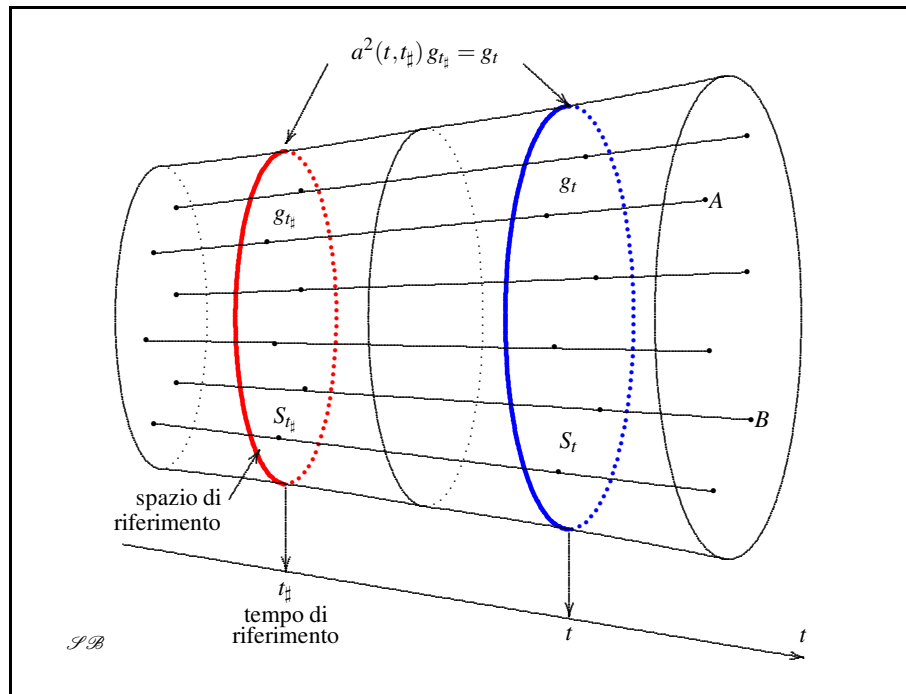


Figura 1.5: Fattore di scala $a(t, t_{\#})$ con tempo di riferimento $t_{\#}$.

Nota 1.7.1 – Il fattore di scala $a(t, t_{\#})$ non si annulla mai nell'intervallo aperto (t_α, t_ω) perché le metriche spaziali sono sempre regolari. •

Applicando le regole (1.24) si dimostra che tra i fattori di scala riferiti a due tempi

diversi $a(t, t_{\#})$ e $a(t, t_b)$ sussiste il legame

$$(1.26) \quad \boxed{a(t, t_{\#}) = a(t, t_b) a(t_b, t_{\#})}$$

Dunque essi differiscono per il fattore costante $a(t_b, t_{\#})$ dipendente dai due tempi di riferimento. Dalle (1.21) e (1.23) si derivano inoltre le equazioni

$$(1.27) \quad \boxed{K(t) = \frac{K_{\#}}{a^2(t, t_{\#})}, \quad K_{\#} \stackrel{\text{def}}{=} K(t_{\#})}$$

$$(1.28) \quad \boxed{ds_t = a(t, t_{\#}) ds_{\#}, \quad ds_{\#} \stackrel{\text{def}}{=} ds(t_{\#})}$$

che saranno più volte applicate nel seguito.

Nota 1.7.2 – Il fattore di scala è una funzione scalare adimensionale del tempo cosmico t che, come si vedrà, racchiude in sé tutte le informazioni relative all'evoluzione temporale dell'Universo e di gran parte delle grandezze cosmologiche. Il fatto che il fattore di scala $a(t, t_{\#})$ risulti nel nostro approccio assiomatico dipendente dalla scelta di un tempo di riferimento rappresenta una novità rispetto alla letteratura corrente. Questa dipendenza non ha solo interesse teorico ma fornisce anche uno strumento risolutivo in molte dimostrazioni nonché, fatto importante, nel controllo della correttezza di definizioni ed equazioni. È infatti chiaro che, per avere senso geometrico o fisico, le equazioni o le definizioni che lo coinvolgono, eventualmente insieme alle sue derivate, devono essere indipendenti dalla scelta di $t_{\#}$. Un semplice esempio è dato dalla definizione (1.32) del **fattore di Hubble** nel prossimo paragrafo. •

1.8 Velocità di recessione e legge di Hubble

Si definiscono due tipi di distanze fra due corpi cosmici A e B (Figura 1.6):

- La **distanza sincrona** $d_{AB}(t)$ al tempo t è la distanza misurata nella sezione spaziale (S_t, g_t) , cioè la lunghezza della geodetica che unisce i punti di intersezione delle storie di A e B con S_t .

- La **distanza di riferimento** $d_{AB}(t_{\#})$, anche detta **distanza co-mobile**, è la distanza misurata nello spazio di riferimento $(S_{t_{\#}}, g_{t_{\#}})$.

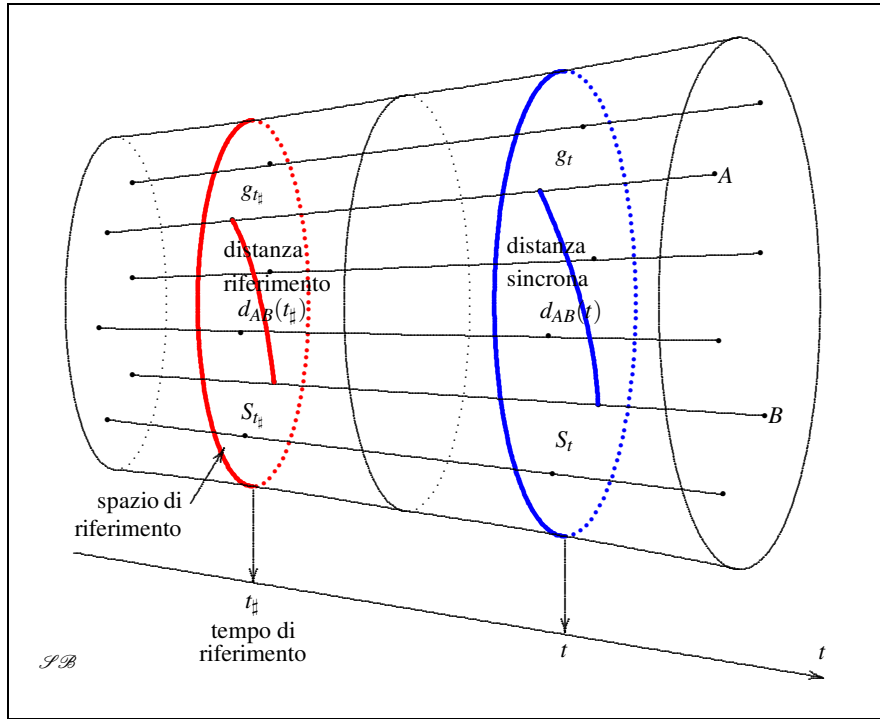


Figura 1.6: Distanze fra due galassie A e B.

In virtù dell'equazione (1.28) tra queste due distanze intercorre la relazione

$$(1.29) \quad d_{AB}(t) = a(t, t_{\#}) d_{AB}(t_{\#}).$$

Essendo $t_{\#}$ fissato, derivando questa equazione rispetto a t troviamo l'uguaglianza

$$(1.30) \quad \dot{d}_{AB}(t) = \dot{a}(t, t_{\#}) d_{AB}(t_{\#}).$$

Di qui, applicando la (1.29), segue l'uguaglianza

$$(1.31) \quad \dot{d}_{AB}(t) = \frac{\dot{a}(t, t_{\#})}{a(t, t_{\#})} d_{AB}(t).$$

Osserviamo ora che, in virtù della (1.26), il rapporto $\dot{a}(t, t_{\#})/a(t, t_{\#})$ non dipende dal tempo di riferimento $t_{\#}$ cosicché possiamo introdurre la funzione nella sola variabile t

$$(1.32) \quad \boxed{H(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\dot{a}(t, t_{\#})}{a(t, t_{\#})}}$$

detta **fattore di Hubble** o **parametro di Hubble**, e riscrivere la (1.31) nella forma

(1.33)

$$\dot{d}_{AB}(t) = H(t) d_{AB}(t)$$

Questa equazione esprime la ben nota **legge di Hubble**. La derivata $\dot{d}_{AB}(t)$ è detta **velocità di recessione** al tempo t delle due galassie A e B .

1.9 Analisi dimensionale

Un'equazione non può essere ritenuta corretta se non è coerente con la dimensione fisica delle grandezze coinvolte. Sfortunatamente questo **principio di omogeneità dimensionale** non è sempre rispettato, il che provoca repressibili incomprensioni. Vediamone tre esempi.

(i) Una diffusa abitudine è quella di porre $c = \text{velocità della luce} = 1$. Con questa azione il simbolo c sparisce dalle formule e la loro coerenza dimensionale è perduta. Lo stesso capita per altre costanti fisiche, come per esempio la costante di Planck. Naturalmente è del tutto legittimo, se lo si ritiene conveniente per i calcoli, porre $c = 1$. Ciò comporta solamente un cambio delle unità di misura delle lunghezze e dei tempi. Ma se si opta per questa scelta è estremamente importante *mantenere il simbolo c nelle formule* anche se il suo valore numerico è 1.

(ii) Su di una varietà Riemanniana si possono considerare coordinate di diversa dimensione: angoli (adimensionali), tempi, lunghezze, ecc. Di conseguenza, le varie componenti del tensore metrico possono avere dimensioni differenti. Questa differenza si ripercuote in maniera esasperata sulle componenti dei tensori di curvatura, quindi, in particolare, sulle equazioni di Einstein. Come si vedrà nel prossimo paragrafo, per evitare questa confusione converrà utilizzare sullo spazio-tempo cosmico solo coordinate di dimensione lunghezza, anche per il *tempo*.

(iii) La funzione esponenziale e^z , dove z è un numero reale o complesso, è definita da una serie di potenze di z che, se rappresenta una quantità fisica o geometrica, deve essere adimensionale, altrimenti non avrebbe senso sommare z a z^2 , ecc. Lo stesso riguardo si deve avere nell'estensione di e^z al caso in cui z è una matrice quadrata: i suoi elementi devono essere adimensionali. In letteratura si trovano molti esempi in cui a questo riguardo non è prestata la dovuta attenzione.

Nel seguito useremo il simbolo $\text{Dim}(X)$ per indicare la dimensione di un'entità fisico-geometrica X .⁶ Le dimensioni fondamentali sono denotate con

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dim}(\text{tempo}) = T \\ \text{Dim}(\text{lunghezza}) = L \\ \text{Dim}(\text{massa}) = M \\ \text{Dim}(\text{grandezza adimensionale}) = 1 \end{array} \right.$$

⁶ Si usa diffusamente anche il simbolo $[X]$.

La dimensione di un oggetto X è esprimibile come prodotto di potenze intere positive o negative dei simboli T , L e M ,

$$\text{Dim}(X) = T^a L^b M^c, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Le dimensioni delle quantità fondamentali ricorrenti sono elencate nelle tabelle che seguono.

(1.34)

Oggetto	Dim	Oggetto	Dim
area	L^2	accelerazione	$L T^{-2}$
volume	L^3	angolo	1
velocità	$L T^{-1}$	velocità angolare	T^{-1}

(1.35)

Oggetto	Dim
forza (o massa * accelerazione)	$M L T^{-2}$
pressione (forza/area)	$M L^{-1} T^{-2}$
energia, lavoro (forza * lunghezza)	$M L^2 T^{-2}$
densità di energia (energia/volume)	$M L^{-1} T^{-2}$
densità di massa (massa/volume)	$M L^{-3}$

(1.36)

Oggetto	Dim
fattore di scala $a(t)$	1 (adimensionale)
Fattore di Hubble $H(t)$	T^{-1}

1.10 Coordinate co-mobili

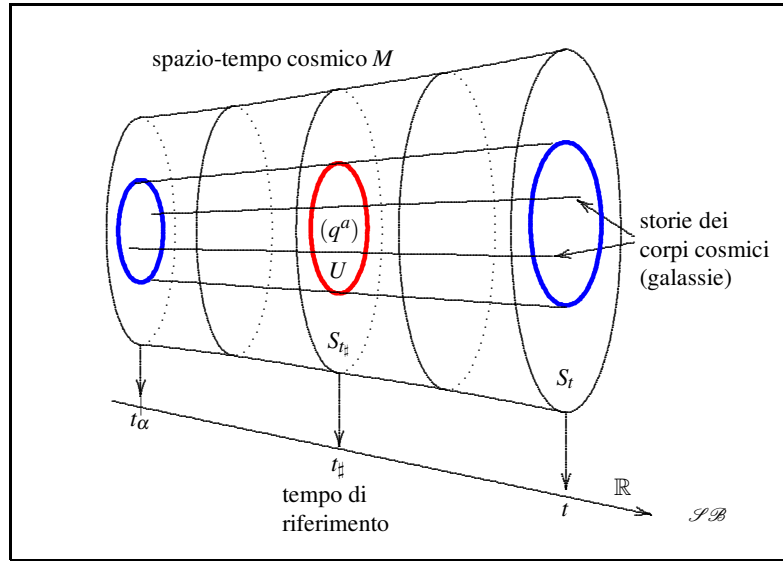


Figura 1.7: Coordinate co-mobili.

Poiché lo spazio di riferimento $S_{t_\#}$ è diffeomorfo a tutte le altre sezioni spaziali, se prendiamo un sistema di coordinate $(q^a) = (q^1, q^2, q^3)$ su di un dominio aperto $U \subseteq S_{t_\#}$ allora generiamo un sistema di coordinate (t, q^a) sul sotto-insieme tubolare aperto di M costituito dalle storie galattiche che intersecano U (Figura 1.7).

Le coordinate di questo tipo sono dette **coordinate co-mobili**. Le tre coordinate spaziali (q^a) sono **coordinate lagrangiane** del fluido cosmico: sono costanti lungo le storie che passano per U .

Nel seguito denoteremo con g_{tab} e $g_{\#ab}$ le componenti rispetto alle coordinate (q^a) dei tensori metrici spaziali di S_t e $S_{t_\#}$ rispettivamente. Esse soddisfano alla relazione conforme (1.25):

$$(1.37) \quad g_{tab} = a^2(t, t_\#) g_{\#ab}$$

Non useremo particolari tipi di coordinate spaziali (q^a) , come invece è consuetudine in cosmologia. Imporremo soltanto la condizione che esse siano L-dimensionali, abbiano cioè la dimensione di una lunghezza, di modo che le componenti dei tensori metrici g_{tab} risultano adimensionali. Di conseguenza, per ragioni di omogeneità, sostituiremo la coordinata temporale t con una coordinata L-dimensionale q^0 attraverso la semplice relazione lineare

$$(1.38) \quad q^0 = \kappa t$$

dove κ è una costante positiva fissata arbitrariamente e avente la dimensione di una velocità.⁷ La chiamiamo **velocità ausiliaria**.

Nel seguito ci riferiremo sempre e tacitamente a coordinate $(q^\alpha) = (q^0, q^a)$ di questo tipo. Le coordinate spaziali (q^a) rimarranno del tutto generiche.

1.11 Vettori e tensori isotropi

Diciamo che un campo vettoriale o un campo tensoriale nello spazio-tempo M sono **isotropi** se non inducono campi vettoriali particolari sulle sezioni spaziali. In un modello cosmologico isotropo i campi vettoriali o tensoriali non isotropi **non sono ammissibili**.

Teorema 1.11.1 – *Un campo vettoriale V^α su M è isotropo se e solo se le sue componenti rispetto ad un sistema di coordinate co-mobili $(q^\alpha) = (q^0, q^a)$ sono del tipo*

$$(1.39) \quad \begin{cases} V^0 = \text{funzione di } q^0 \text{ solamente,} \\ V^a = 0. \end{cases}$$

Dimostrazione. (i) Se V^0 dipendesse anche dalle coordinate spaziali (q^a) allora su ogni sezione spaziale il suo gradiente definirebbe un campo vettoriale particolare in contrasto col principio di isotropia. (ii) Per le coordinate co-mobili $(q^\alpha) = (q^0, q^a)$ sono ammissibili solo trasformazioni delle coordinate spaziali (q^a) essendo la coordinata q^0 univocamente definita.⁸ Pertanto le componenti spaziali V^a definiscono un vettore spaziale particolare in contrasto col principio di isotropia. Devono quindi essere tutte nulle. ■

Teorema 1.11.2 – *Un campo tensoriale doppio simmetrico contravariante è isotropo se e solo se le sue componenti $T^{\alpha\beta}$ rispetto ad un sistema di coordinate co-mobili $(q^\alpha) = (q^0, q^a)$ sono del tipo*

$$(1.40) \quad \begin{cases} T^{00} = \phi(q^0) = \text{funzione della sola } q^0, \\ T^{0a} = 0, \\ T^{ab} = \psi(q^0) g_{\#}^{ab}(\tilde{q}) = \text{una funzione di } q^0 \text{ per } g_{\#}^{ab}, \end{cases}$$

dove le $g_{\#}^{ab}(\tilde{q})$ le componenti contravarianti della metrica di riferimento, denotato con \tilde{q} un qualunque sistema di coordinate spaziali (q^a) .

⁷ Quando tratteremo la cosmologia relativistica saremo condotti a considerare $\kappa = c$.

⁸ Di questo si dovrà tener conto anche nel seguito.

Dimostrazione. Legge di trasformazione delle componenti di un tensore contravariante:

$$T^{\alpha\beta} = J_{\alpha'}^{\alpha} J_{\beta'}^{\beta} T^{\alpha'\beta'}, \quad J_{\alpha'}^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial q^{\alpha'}}{\partial q^{\alpha}}, \quad J_{\alpha'}^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial q^{\alpha}}{\partial q^{\alpha'}}.$$

Per una trasformazione di coordinate co-mobili che lasciano invariata q^0 abbiamo

$$J_0^0 = 1, \quad J_a^0 = 0, \quad J_0^a = 0, \quad J_c^0 = 0, \quad J_0^c = 0.$$

Di conseguenza,

$$\begin{cases} T^{00} = J_{\alpha'}^0 J_{\beta'}^0 T^{\alpha'\beta'} = (J_0^0)^2 T^{0'0'} = T^{0'0'}. \\ T^{0b} = J_{\alpha'}^0 J_{\beta'}^b T^{\alpha'\beta'} = J_0^0 J_{b'}^b T^{0'b'} = J_{b'}^b T^{0'b'}. \\ T^{ab} = J_{\alpha'}^a J_{\beta'}^b T^{\alpha'\beta'} = J_{a'}^a J_{b'}^b T^{a'b'}. \end{cases}$$

Queste equazioni mostrano che: (i) T^{00} è un campo scalare, quindi deve essere una funzione della sola q^0 ; (ii) T^{0b} è un campo vettoriale spaziale, quindi deve essere nullo; (iii) T^{ab} è un tensore simmetrico su ogni sezione spaziale quindi non deve generare particolari autovettori; non può che essere proporzionale alla metrica con un coefficiente dipendente al più da q^0 . ■

Nota 1.11.1 – Un risultato simile vale per un campo tensoriale doppio simmetrico covariante $T_{\alpha\beta}$:

$$(1.41) \quad \begin{cases} T_{00} = \phi(q^0) = \text{funzione della sola } q^0, \\ T_{0a} = 0, \\ T_{ab} = \psi(q^0) g_{ab}(\tilde{q}) = \text{funzione di } q^0 \text{ per } g_{ab} \end{cases}$$

Nota 1.11.2 – Questo teorema mostra che ogni campo tensoriale doppio simmetrico isotropo, sia esso contravariante o covariante, è completamente determinato da due funzioni $\phi(q^0)$ e $\psi(q^0)$ di q^0 che chiamiamo **funzioni caratteristiche** del tensore. ●

Nota 1.11.3 – Un tensore doppio contravariante anti-simmetrico $F^{\alpha\beta}$ dà origine ad un vettore spaziale F^{0a} e ad un tensore antisimmetrico spaziale F^{ab} . Per l'isotropia deve essere $F^{0a} = 0$. Però ogni tensore antisimmetrico F^{ab} su di una varietà riemanniana tridimensionale ammette degli autovettori reali. Questo va contro il principio di isotropia. Di conseguenza un tensore doppio antisimmetrico isotropo è necessariamente nullo. Questo è per esempio il caso del tensore elettromagnetico. Dunque un campo elettromagnetico non può comparire in un modello cosmologico isotropo, per esempio nelle equazioni di Einstein. Tuttavia, un gran numero di campi elettromagnetici produce un gran numero di autovettori spaziali tale da rendere il principio di isotropia di fatto rispettato, per cui si può riassumere in un campo scalare isotropo (cioè dipendente da q^0 solamente): la **densità di radiazione**. ●

1.12 Monitor cosmico e particelle vaganti

Così come per ogni altra sezione spaziale, lo spazio di riferimento è in corrispondenza biunivoca con le storie galattiche che lo attraversano trasversalmente e quindi con l'insieme di tutte le galassie. Supponiamo che esista un dispositivo di controllo di questo insieme, un **monitor cosmico**, costituito da punti (pixels), ognuno dei quali rappresenta una galassia.

Supponiamo inoltre che questo monitor sia controllato da un **Astronomo**. Il monitor e l'Astronomo sono disegnati nella parte inferiore della Figura 1.8.⁹ Lo spazio-tempo M è rappresentato nella parte superiore, insieme alle curve galattiche e alle sezioni spaziali.

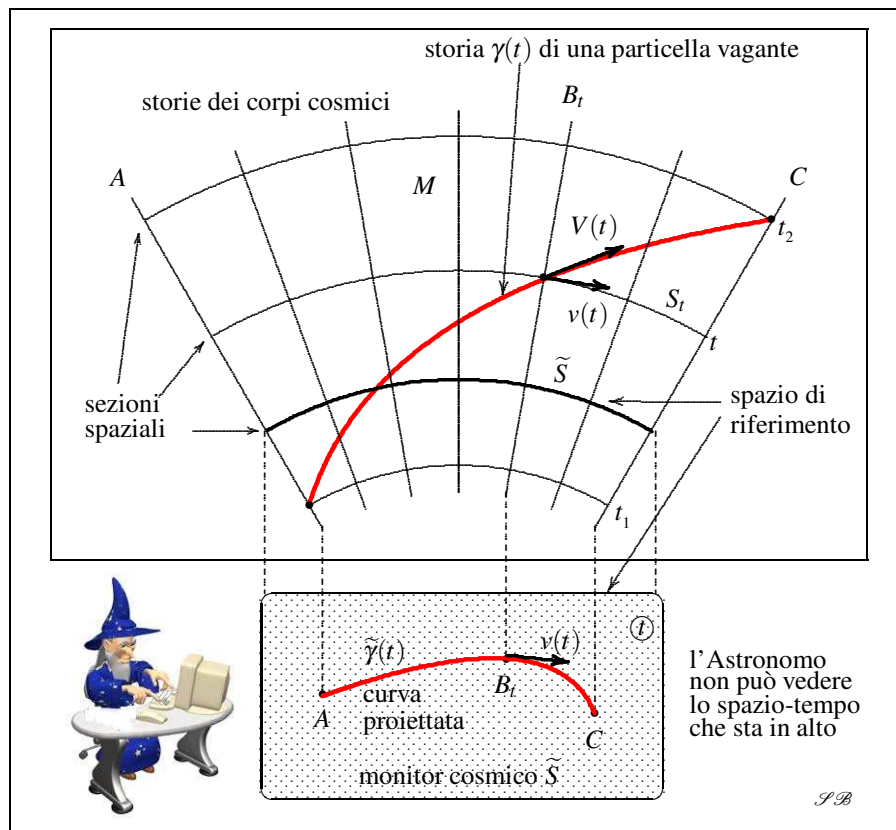


Figura 1.8: L'Astronomo osserva la traccia di una particella vagante sul monitor cosmico.

⁹ L'Astronomo indossa gli abiti e il cappello di un mago.

Nota 1.12.1 – Notazioni da tenere bene a mente. Nel seguito tutte le entità che stanno nello spazio di riferimento, e che sono percepite dal monitor cosmico, saranno contrassegnate da una tilde \sim sovrapposta:

\tilde{q} , qualunque sistema di coordinate spaziali (q^a);

$\tilde{g}, \tilde{g}_{ab}$, metrica di riferimento e sue componenti covarianti;

$\tilde{\Gamma}_{ab}^c$, simboli di Christoffel della metrica \tilde{g} ; ecc. •

Il monitor cosmico è un'istantanea del cosmo al tempo $t_{\#}$ ed è quindi per il mago che lo osserva una 'sfera di cristallo' tridimensionale. In questa sfera il mondo è fermo al tempo $t_{\#}$, le galassie sono ferme e non si avverte nessuna espansione o contrazione delle loro distanze.¹⁰ L'Astronomo possiede un orologio che gli indica il tempo cosmico t ,¹¹ ma non vede lo spazio-tempo, che nella figura sta sopra la sua testa. Tuttavia ammettiamo che, pur restando le galassie immobili, egli osservi sul monitor dei punti che si muovono e che lui chiama **particelle vaganti**.

Per noi, che 'vediamo' lo spazio-tempo, le tracce che queste particelle lasciano sul monitor sono la proiezione di storie di minuscoli oggetti vaganti nell'Universo. Potrebbero essere delle astronavi in viaggio intergalattico, o delle comete, o particelle fisiche, come per esempio fotoni. Nella Figura 1.8 si vedono le curve $\gamma(t)$ e $\tilde{\gamma}(t)$ di una particella vagante partita da una galassia A al tempo t_1 , che ha raggiunto un'altra galassia C al tempo t_2 e che ha attraversato una galassia B in un tempo intermedio t .

L'Astronomo nota però che alcune delle tracce osservate sono delle geodetiche (Figura 1.9). Può distinguerle perché, ricordiamolo, il monitor ha una metrica, che si identifica con quella dello spazio di riferimento, e inoltre, essendo anche un Matematico, egli è a conoscenza di questa nozione.

Così l'Astronomo percepisce che nell'Universo ci sono delle **particelle vaganti speciali** di cui però non conosce la natura fisica. Come matematico egli congetture allora che le curve spazio-temporali da cui provengono queste tracce siano anch'esse delle geodetiche. Ma affinché questa congettura abbia senso deve esserci nello spazio-tempo una qualche particolare connessione.

Nel prossimo paragrafo investigheremo sull'esistenza di una connessione che, in qualche modo, sia compatibile con le varie strutture finora introdotte nello spazio-tempo cosmico in virtù dei postulati geometrici. Va subito osservato che non si tratterà di una connessione di tipo Levi-Civita perché nello spazio-tempo non esiste, almeno per ora, un tensore metrico tetra-dimensionale. Tensori metrici si trovano solo sulle sezioni spaziali.

¹⁰ Se si vuole, potrebbe essere interpretata come il **firmamento** della cosmologia biblica.

¹¹ È un Astronomo molto longevo e paziente, i suoi tempi sono dell'ordine dei milioni di anni.

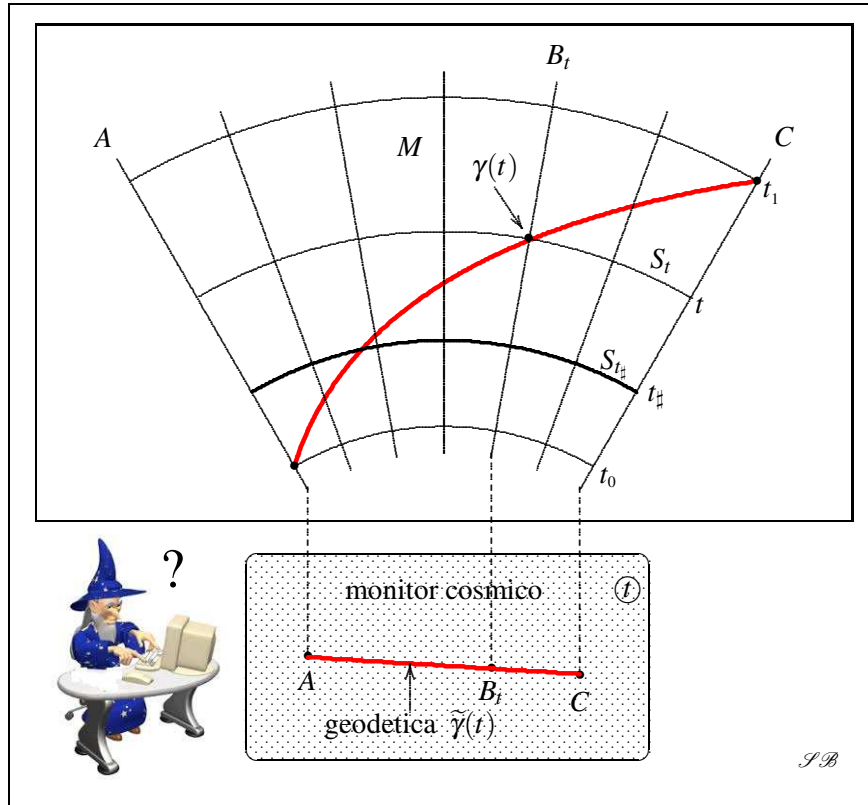


Figura 1.9: L'Astronomo osserva con sorpresa la traccia geodetica di una particella 'speciale'.

1.13 Connessioni cosmiche

Investighiamo sull'esistenza nello spazio-tempo di connessioni lineari e simmetriche soddisfacenti a requisiti di compatibilità con le strutture geometriche interne allo spazio-tempo finora conosciute. Le chiameremo **connessioni cosmiche**.

Requisito 1. Una connessione cosmica $\Gamma = (\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma)$ deve essere isotropa, non deve cioè dare origine a campi vettoriali particolari sulle sezioni spaziali.

Teorema 1.13.1 – Una connessione è isotropa se e solo se i suoi simboli $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ in coordinate co-mobili (q^0, q^a) sono del tipo

$$(1.42) \quad \begin{array}{l} \Gamma_{a0}^0 = 0, \quad \Gamma_{00}^c = 0 \\ \Gamma_{a0}^c = E(q^0) \delta_a^c, \quad \Gamma_{ab}^0 = F(q^0) \tilde{g}_{ab}(\tilde{q}), \quad \Gamma_{00}^0 = G(q^0) \end{array}$$

dove E , F e G sono funzioni della sola q^0 e dove inoltre i simboli con soli indici latini Γ_{ab}^c sono simboli di una connessione su ogni sezione spaziale.

Traccia della dimostrazione. Si richiama la legge di trasformazione dei simboli di una connessione (1.2) e la si applica alle trasformazioni di coordinate co-mobili che lasciano q^0 invariata,

$$q^0 = q^0, \quad q^{a'} = q^{a'}(q^a).$$

e per le quali

$$J_0^{0'} = 1, \quad J_a^{0'} = 0, \quad J_0^{a'} = 0, \quad J_{c'}^0 = 0, \quad J_{0'}^c = 0.$$

Si esaminano quindi tutti i casi particolari della (1.2). Un solo esempio per brevità:

$$\Gamma_{a0}^0 = J_{\gamma'}^0 \Gamma_{\alpha'\beta'}^{\gamma'} J_a^{\alpha'} J_0^{\beta'} + J_{\gamma'}^0 \partial_a J_0^{\gamma'} = J_{0'}^0 \Gamma_{a'0'}^0 J_a^{a'} J_0^{0'} + J_{c'}^0 \partial_a J_0^{c'} = \Gamma_{a'0'}^0 J_a^{a'}.$$

Questo risultato mostra che le Γ_{a0}^0 sono le componenti di una 1-forma particolare su ogni sezione spaziale. Per il requisito di isotropia deve annullarsi: $\Gamma_{a0}^0 = 0$. E così via ... ■

Con i simboli (1.42) le equazioni del trasporto (1.1) e delle geodetiche (1.7) di una connessione isotropa diventano

$$(1.43) \quad \begin{cases} \frac{dv^0}{d\xi} + G v^0 \frac{dq^0}{d\xi} + F \tilde{g}_{ab} v^a \frac{dq^b}{d\xi} = 0, \\ \frac{dv^c}{d\xi} + E \left(v^c \frac{dq^0}{d\xi} + v^0 \frac{dq^c}{d\xi} \right) + \Gamma_{ab}^c v^a \frac{dq^b}{d\xi} = 0. \end{cases}$$

$$(1.44) \quad \begin{cases} \frac{d^2 q^0}{d\xi^2} + F \tilde{g}_{ab} \frac{dq^a}{d\xi} \frac{dq^b}{d\xi} + G \left(\frac{dq^0}{d\xi} \right)^2 = \lambda \frac{dq^0}{d\xi}, \\ \frac{d^2 q^c}{d\xi^2} + \Gamma_{ab}^c \frac{dq^a}{d\xi} \frac{dq^b}{d\xi} + 2E \frac{dq^c}{d\xi} \frac{dq^0}{d\xi} = \lambda \frac{dq^c}{d\xi}. \end{cases}$$

Per curve trasversali alle sezioni spaziali la coordinata q^0 può essere presa come parametro. In questo caso $q^0(q^0) = q^0$ e $dq^0/dq^0 = 1$ e le equazioni precedenti diventano rispettivamente

$$(1.45) \quad \begin{cases} \frac{dv^0}{dq^0} + G v^0 + F \tilde{g}_{ab} v^a \frac{dq^b}{dq^0} = 0, \\ \frac{dv^c}{dq^0} + E \left(v^c + v^0 \frac{dq^c}{dq^0} \right) + \Gamma_{ab}^c v^a \frac{dq^b}{dq^0} = 0. \end{cases}$$

$$(1.46) \quad \begin{cases} F \tilde{g}_{ab} \frac{dq^a}{dq^0} \frac{dq^b}{dq^0} + G = \lambda, \\ \frac{d}{dq^0} \frac{dq^c}{dq^0} + \Gamma_{ab}^c \frac{dq^a}{dq^0} \frac{dq^b}{dq^0} + 2E \frac{dq^c}{dq^0} = \lambda \frac{dq^c}{dq^0}. \end{cases}$$

Teorema 1.13.2 – *Le storie del fluido galattico sono geodetiche rispetto ad una qualunque connessione isotropa.*

Dimostrazione. Le storie del fluido galattico sono trasversali alle sezioni spaziali per cui valgono le equazioni (1.45) e (1.46). Inoltre esse sono caratterizzate dalle equazioni $q^a = \text{costante}$ per cui le (1.45) si semplificano in

$$(1.47) \quad \text{equazioni di trasporto:} \quad \begin{cases} \frac{dv^0}{dq^0} + G v^0 = 0, \\ \frac{dv^c}{dq^0} + E v^c = 0. \end{cases}$$

Le equazioni del secondo gruppo (1.46) sono identicamente soddisfatte, mentre la prima equazione si riduce a

$$(1.48) \quad G = \lambda.$$

Questa fornisce il moltiplicatore che rende soddisfatte le equazioni delle geodetiche per le storie del fluido galattico. ■

Requisito 2. *La coordinata q^0 è un parametro affine per le storie galattiche.*

Teorema 1.13.3 – *Il requisito 2 è soddisfatto se e solo se $G = 0$.*

Dimostrazione. Segue dalla (1.48). ■

A questo punto la tavola dei simboli (1.42) diventa

$$(1.49) \quad \begin{array}{l} \Gamma_{a0}^0 = 0, \quad \Gamma_{00}^c = 0, \quad \Gamma_{00}^0 = 0 \\ \Gamma_{a0}^c = E(q^0) \delta_a^c, \quad \Gamma_{ab}^0 = F(q^0) \tilde{g}_{ab}(\tilde{q}) \\ \Gamma_{ab}^c \text{ simboli di una connessione spaziale} \end{array}$$

mentre la prima equazione di trasporto (1.47) si riduce semplicemente a

$$(1.50) \quad v^0 = \text{costante.}$$

Teorema 1.13.4 – *Il Γ -trasporto lungo le storie galattiche manda vettori spaziali in vettori spaziali.*

Dimostrazione. I vettori spaziali sono caratterizzati dall'equazione $v^0 = 0$ che soddisfa all'equazione di trasporto (1.50). ■

In virtù di questo teorema ha senso il

Requisito 3. *Il prodotto scalare fra vettori spaziali è conservato dal trasporto lungo le storie galattiche.*

Nota 1.13.1 – Si noti che non si richiede che il prodotto scalare sia conservato nel trasporto lungo una qualsiasi geodetica, né tantomeno lungo una qualsiasi curva. •

Teorema 1.13.5 – *Il requisito 3 implica che la funzione $E(q^0)$ coincide col fattore di Hubble pensato come funzione di q^0 , $E(q^0) = H(q^0)$.*

Dimostrazione. Il prodotto scalare di due vettori spaziali $u = [u^a(q^0)]$ e $v = [v^a(q^0)]$ lungo una curva $q^\alpha(q^0)$ è dato da

$$(1.51) \quad u(q^0) \cdot v(q^0) \stackrel{\text{def}}{=} g_{ab}(q^0, \tilde{q}) u^a(q^0) v^b(q^0) = a^2(q^0) \tilde{g}_{ab}(\tilde{q}) u^a(q^0) v^b(q^0).$$

Segue che

$$\frac{d}{dq^0} (u \cdot v) = \tilde{g}_{ab}(\tilde{q}) \left[2a' u^a v^b + a^2 \left(\frac{du^a}{dq^0} v^b + u^a \frac{dv^b}{dq^0} \right) \right].$$

Il Requisito 2 si traduce nell'equazione $\frac{d}{dq^0} (u \cdot v) = 0$ che si sviluppa in

$$[*] \quad \tilde{g}_{ab} \left[2a' u^a v^b + a \left(\frac{du^a}{dq^0} v^b + u^a \frac{dv^b}{dq^0} \right) \right] = 0, \quad \forall u^a, v^b.$$

Richiamiamo la seconda delle equazioni di trasporto (1.47) dei vettori spaziali, finora non utilizzata,

$$\frac{dv^c}{dq^0} + E v^c = 0.$$

Allora

$$\left[\begin{array}{l} [*] \iff \tilde{g}_{ab} [2a' u^a v^b - aE (u^a v^b + u^a v^b)] = 0 \\ \iff \tilde{g}_{ab} u^a v^b [a' - aE] = 0, \quad \forall u^a, v^b \iff E = \frac{a'}{a} = H(q^0). \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

Dopo questo teorema la tavola dei simboli (1.49) si aggiorna nella seguente:

$$(1.52) \quad \boxed{\begin{array}{l} \Gamma_{a0}^0 = 0, \quad \Gamma_{00}^c = 0, \quad \Gamma_{00}^0 = 0 \\ \Gamma_{a0}^c = H(q^0) \delta_a^c, \quad \Gamma_{ab}^0 = F(q^0) \tilde{g}_{ab}(\tilde{q}) \\ \Gamma_{ab}^c \text{ simboli di una connessione spaziale} \end{array}}$$

Nota 1.13.2 – Il fattore di scala $a(t)$ può essere visto come funzione del parametro $q^0 = \kappa t$ avente la dimensione di una lunghezza. La sua derivata rispetto a q^0 sarà denotata con $a'(q^0)$. Per quel che riguarda il fattore di Hubble, passando dal parametro t al parametro q^0 , risulta

$$H(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\dot{a}}{a} = a^{-1} \frac{da}{dq^0} \frac{dq^0}{dt} = \kappa \frac{a'}{a}.$$

Posto allora

$$(1.53) \quad H(q^0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a'}{a}$$

risulta

$$(1.54) \quad H(t) = \kappa H(q^0). \quad \bullet$$

Requisito 4 (ultimo). *Le Γ -geodetiche trasversali alle sezioni spaziali si proiettano in geodetiche dello spazio di riferimento.*

Questo è il requisito che ha dato origine alla ricerca di connessioni nello spazio-tempo (fine paragrafo 1.12). Si osservi che questo requisito è soddisfatto dalle storie galattiche le cui proiezioni si riducono a punti dello spazio di riferimento (cioè a punti del monitor). I punti sono infatti **geodetiche singolari**.¹²

Teorema 1.13.6 – *Una curva $\gamma(q^0)$ nello spazio-tempo trasversale alle sezioni spaziali si proietta in una geodetica $\tilde{\gamma}(q^0)$ dello spazio di riferimento se e solo se (i) $\Gamma_{ab}^c = \tilde{\Gamma}_{ab}^c$ e (ii) posto*

$$V(q^0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\tilde{s}}{dq^0} > 0$$

dove $d\tilde{s}$ è l'elemento d'arco della metrica di riferimento \tilde{g} , vale l'equazione

$$(1.55) \quad \frac{d \log V}{dq^0} + 2H = FV^2$$

Dimostrazione. Per curve trasversali alle sezioni spaziali la coordinata q^0 può essere presa come parametro. In questo caso $q^0(q^0) = q^0$ e $dq^0/dq^0 = 1$ e le componenti della sua accelerazione sono, vedi la (1.46),

$$\begin{cases} A^0 = F \tilde{g}_{ab} \frac{dq^a}{dq^0} \frac{dq^b}{dq^0}, \\ A^c = \frac{d}{dq^0} \frac{dq^c}{dq^0} + \Gamma_{ab}^c \frac{dq^a}{dq^0} \frac{dq^b}{dq^0} + 2H \frac{dq^c}{dq^0}. \end{cases}$$

Le A^c sono le componenti dell'accelerazione della curva proiettata $\tilde{\gamma}$. Passando al parametro \tilde{s} si trova:

$$A^0 = F \tilde{g}_{ab} \frac{dq^a}{d\tilde{s}} \frac{dq^b}{d\tilde{s}} \left(\frac{d\tilde{s}}{dq^0} \right)^2$$

¹² Le equazioni delle geodetiche di una connessione (1.7)

$$\frac{d^2 q^\gamma}{d\xi^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{dq^\alpha}{d\xi} \frac{dq^\beta}{d\xi} = \lambda(\xi) \frac{dq^\gamma}{d\xi}$$

sono soddisfatte dalle curve parametriche $q^\alpha(\xi) = \text{costante}$ che rappresentano semplicemente dei punti.

ovvero, essendo $\tilde{g}_{ab} \frac{dq^a}{d\tilde{s}} \frac{dq^b}{d\tilde{s}} = 1$,

$$A^0 = F V^2.$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} A^c &= \frac{d}{dq^0} \left(V \frac{dq^c}{d\tilde{s}} \right) + \Gamma_{ab}^c \frac{dq^a}{d\tilde{s}} \frac{dq^b}{d\tilde{s}} V^2 + 2HV \frac{dq^c}{d\tilde{s}} \\ &= \frac{dV}{dq^0} \frac{dq^c}{d\tilde{s}} + V \frac{d}{dq^0} \left(\frac{dq^c}{d\tilde{s}} \right) + \Gamma_{ab}^c \frac{dq^a}{d\tilde{s}} \frac{dq^b}{d\tilde{s}} V^2 + 2HV \frac{dq^c}{d\tilde{s}} \\ &= \frac{dV}{dq^0} \frac{dq^c}{d\tilde{s}} + V^2 \frac{d}{d\tilde{s}} \left(\frac{dq^c}{d\tilde{s}} \right) + \Gamma_{ab}^c \frac{dq^a}{d\tilde{s}} \frac{dq^b}{d\tilde{s}} V^2 + 2HV \frac{dq^c}{d\tilde{s}}. \end{aligned}$$

Riordinando:

$$A^c = V^2 \left[\frac{d}{d\tilde{s}} \left(\frac{dq^c}{d\tilde{s}} \right) + \Gamma_{ab}^c \frac{dq^a}{d\tilde{s}} \frac{dq^b}{d\tilde{s}} \right] + \left[\frac{dV}{dq^0} + 2HV \right] \frac{dq^c}{d\tilde{s}}.$$

Primo percorso: Requisito 4 \implies (i) e (ii). Per il Requisito 4 se γ è una geodetica, cioè se valgono le equazioni

$$A^0 = \lambda, \quad A^c = \lambda \frac{dq^c}{dq^0} = \lambda \frac{dq^c}{d\tilde{s}} V,$$

che per quanto visto sopra diventano

$$(1.56) \quad \begin{cases} F V^2 = \lambda, \\ V^2 \left[\frac{d}{d\tilde{s}} \left(\frac{dq^c}{d\tilde{s}} \right) + \Gamma_{ab}^c \frac{dq^a}{d\tilde{s}} \frac{dq^b}{d\tilde{s}} \right] + \left[\frac{dV}{dq^0} + 2HV \right] \frac{dq^c}{d\tilde{s}} = \lambda \frac{dq^c}{d\tilde{s}} V, \end{cases}$$

allora anche $\tilde{\gamma}$ deve essere una geodetica della metrica di riferimento \tilde{g} e le $q^c(\tilde{s})$ devono soddisfare alle equazioni

$$(1.57) \quad \frac{d}{d\tilde{s}} \left(\frac{dq^c}{d\tilde{s}} \right) + \tilde{\Gamma}_{ab}^c \frac{dq^a}{d\tilde{s}} \frac{dq^b}{d\tilde{s}} = 0$$

perché \tilde{s} è parametro affine. Le stesse $q^c(\tilde{s})$ devono anche soddisfare alle seconde equazioni (1.56) che, tenuto conto della prima (1.56), diventano

$$\frac{d}{d\tilde{s}} \left(\frac{dq^c}{d\tilde{s}} \right) + \Gamma_{ab}^c \frac{dq^a}{d\tilde{s}} \frac{dq^b}{d\tilde{s}} = \frac{1}{V} \left[F V^2 - \frac{d \log V}{dq^0} - 2H \right] \frac{dq^c}{d\tilde{s}}.$$

Sottraendo da queste equazioni le (1.57) si trova l'uguaglianza

$$(\Gamma_{ab}^c - \tilde{\Gamma}_{ab}^c) \frac{dq^a}{d\tilde{s}} \frac{dq^b}{d\tilde{s}} = \frac{1}{V} \left[F V^2 - \frac{d \log V}{dq^0} - 2H \right] \frac{dq^c}{d\tilde{s}}$$

il cui primo membro è quadratico omogeneo nelle $dq^a/d\tilde{s}$ mentre il secondo è lineare. Stante l'arbitrarietà delle $dq^a/d\tilde{s}$ i due membri devono annullarsi e quindi devono valere le uguaglianze

$$\Gamma_{ab}^c = \tilde{\Gamma}_{ab}^c, \quad FV^2 - \frac{d \log V}{dq^0} - 2H = 0,$$

che esprimono le condizioni dell'enunciato.

Percorso inverso: (i) e (ii) \implies Requisito 4. Le equazioni delle Γ -geodetiche (1.46) sono

$$\begin{cases} A^0 = \lambda, \\ A^c = \lambda \frac{dq^c}{dq^0}, \end{cases} \iff \begin{cases} F \tilde{g}_{ab} \frac{dq^a}{dq^0} \frac{dq^b}{dq^0} = \lambda, \\ \frac{d}{dq^0} \frac{dq^c}{dq^0} + \Gamma_{ab}^c \frac{dq^a}{dq^0} \frac{dq^b}{dq^0} + 2H \frac{dq^c}{dq^0} = \lambda \frac{dq^c}{dq^0}. \end{cases}$$

Passando al parametro \tilde{s} queste assumono rispettivamente la forma (si utilizzano i calcoli svolti nel percorso precedente)

$$(1.58) \quad \begin{cases} FV^2 = \lambda, \\ \frac{d}{d\tilde{s}} \left(\frac{dq^c}{d\tilde{s}} \right) + \Gamma_{ab}^c \frac{dq^a}{d\tilde{s}} \frac{dq^b}{d\tilde{s}} = \frac{1}{V} \left[\lambda - \frac{d \log V}{dq^0} - 2H \right] \frac{dq^c}{d\tilde{s}}. \end{cases}$$

Per ipotesi $\Gamma_{ab}^c = \tilde{\Gamma}_{ab}^c$ e vale l'equazione (1.55), quindi il sistema di equazioni (1.58) si traduce in

$$\begin{cases} FV^2 = \lambda, \\ \frac{d}{d\tilde{s}} \left(\frac{dq^c}{d\tilde{s}} \right) + \tilde{\Gamma}_{ab}^c \frac{dq^a}{d\tilde{s}} \frac{dq^b}{d\tilde{s}} = \frac{1}{V} [\lambda - FV^2] \frac{dq^c}{d\tilde{s}}. \end{cases}$$

Queste sono le equazioni delle Γ -geodetiche. Domanda: il Requisito 4 è soddisfatto? Vale a dire: nel loro insieme queste equazioni implicano che le seconde, che governano la curva proiettata, siano equazioni delle $\tilde{\Gamma}$ -geodetiche? La risposta è affermativa perché se le seconde sono le equazioni delle $\tilde{\Gamma}$ -geodetiche allora non solo il primo membro si annulla ma anche il secondo, in virtù della prima equazione $FV^2 = \lambda$. ■

Nota 1.13.3 – Nell'equazione (1.55) si assume $V > 0$. Questo significa che i due parametri q^0 e \tilde{s} sono considerati equiorientati. •

Nota 1.13.4 – Il teorema mostra anche che l'uguaglianza $\Gamma_{ab}^c = \tilde{\Gamma}_{ab}^c$ non dipende dalla scelta dello spazio di riferimento. Ne consegue che, fissate le coordinate mobili spaziali (q^a), i simboli di Christoffel $\tilde{\Gamma}_{ab}^c$ hanno la stessa espressione in ogni sezione spaziale. •

Nota 1.13.5 – La tavola completa dei simboli di una **connessione cosmica**, cioè di una connessione lineare simmetrica soddisfacente a tutti i requisiti sopra richiesti, risulta essere

$$(1.59) \quad \begin{array}{l} \Gamma_{a0}^0 = 0, \quad \Gamma_{00}^c = 0, \quad \Gamma_{00}^0 = 0 \\ \Gamma_{a0}^c = H(q^0) \delta_a^c, \quad \Gamma_{ab}^0 = F(q^0) \tilde{g}_{ab}(\tilde{q}), \quad \Gamma_{ab}^c = \tilde{\Gamma}_{ab}^c. \end{array}$$

dove resta indeterminata la funzione $F(q^0)$ soddisfacente all'equazione (1.55). Questa indeterminazione sarà risolta con l'intervento di un postulato-ponte (Capitolo 2). Dalle (1.46) segue che le equazioni delle geodetiche nel parametro q^0 sono

$$(1.60) \quad \begin{array}{l} F \tilde{g}_{ab} \frac{dq^a}{dq^0} \frac{dq^b}{dq^0} = \lambda, \\ \frac{d}{dq^0} \frac{dq^c}{dq^0} + \tilde{\Gamma}_{ab}^c \frac{dq^a}{dq^0} \frac{dq^b}{dq^0} = (\lambda - 2H) \frac{dq^c}{dq^0}. \end{array} \bullet$$

Nota 1.13.6 – L'istituzione di una connessione cosmica nello spazio-tempo consente di definire l'importante nozione di **particella libera**: è una *particella vagante la cui storia è una geodetica nello spazio-tempo*. Dal Teorema 1.13.2 segue che *le storie del fluido galattico sono particelle libere in qualunque connessione isotropa*. Fatta eccezione di questo caso, una *particella libera* ('free-falling particle') va intesa come *particella che è soggetta passivamente all'azione del fluido cosmico*. •

1.14 Tensore di Ricci di una connessione cosmica

In questo e nei prossimi paragrafi completeremo il quadro geometrico riguardante lo spazio-tempo dotato di una connessione, preparando alcuni *ingredienti* che saranno utilizzati nella formulazione della dinamica dell'Universo.

Teorema 1.14.1 – *Le componenti del tensore di Ricci di una connessione cosmica (1.59) sono*

$$(1.61) \quad \begin{array}{l} R_{00} = -3(H' + H^2) = -3a^{-1}a'' \\ R_{a0} = 0 \\ R_{ab} = \tilde{R}_{ab} + (F' + HF) \tilde{g}_{ab} = (F' + HF + 2\tilde{K}) \tilde{g}_{ab} \end{array}$$

dove \tilde{K} e \tilde{R}_{ab} sono la costante di curvatura e il tensore di Ricci della metrica di riferimento \tilde{g} .

Traccia della dimostrazione. Tenendo conto della (1.54) si calcolano le varie componenti definite dalla (1.4) con i simboli dati dalla (1.59). Si osservi che $R_{a0} = 0$ perché il tensore di Ricci è necessariamente isotropo, si veda la (1.41).

1.15 Derivate covarianti ed equazioni di conservazione

Denotiamo con ∇_α la derivata covariante associata ad una connessione cosmica. Le componenti della derivata di un qualunque campo vettoriale V^α sono date da

$$(1.62) \quad \nabla_\alpha V^\beta = \partial_\alpha V^\beta + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta V^\gamma \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla_0 V^0 = \partial_0 V^0, \\ \nabla_0 V^b = \partial_0 V^b + H V^b, \\ \nabla_a V^0 = \partial_a V^0 + F \tilde{g}_{ac} V^c, \\ \nabla_a V^b = \partial_a V^b + \tilde{\Gamma}_{ac}^b V^c + H \delta_a^b V^0 \end{array} \right.$$

Quindi la sua divergenza è

$$(1.63) \quad \nabla_\alpha V^\alpha = \partial_\alpha V^\alpha + \tilde{\Gamma}_{ac}^a V^c + 3H V^0.$$

Se il campo vettoriale è isotropo valgono le (1.39), V^0 funzione di q^0 solamente e $V^a = 0$, quindi:

$$(1.64) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla_0 V^0 = \partial_0 V^0 \\ \nabla_0 V^b = 0 \\ \nabla_a V^0 = 0 \\ \nabla_a V^b = H V^0 \delta_a^b \end{array} \right. \quad \boxed{\nabla_\alpha V^\alpha = \partial_0 V^0 + 3H V^0}$$

Per un tensore doppio simmetrico contravariante, dalla definizione

$$\nabla_\alpha T^{\beta\gamma} = \partial_\alpha T^{\beta\gamma} + \Gamma_{\alpha\delta}^\beta T^{\delta\gamma} + \Gamma_{\alpha\delta}^\gamma T^{\beta\delta}$$

si traggono le uguaglianze

$$(1.65) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla_0 T^{00} = \partial_0 T^{00} \\ \nabla_0 T^{0c} = \partial_0 T^{0c} + H T^{0c} \\ \nabla_0 T^{bc} = \partial_0 T^{bc} + 2H T^{bc} \\ \nabla_a T^{00} = \partial_a T^{00} + 2F \tilde{g}_{ab} T^{b0} \\ \nabla_a T^{b0} = \partial_a T^{b0} + \tilde{\Gamma}_{ad}^b T^{d0} + F \tilde{g}_{ad} T^{db} + H T^{00} \delta_a^b \\ \nabla_a T^{bc} = \partial_a T^{bc} + \tilde{\Gamma}_{ad}^b T^{dc} + \tilde{\Gamma}_{ad}^c T^{bd} + H (\delta_a^b T^{0c} + \delta_a^c T^{b0}). \end{array} \right.$$

Per le componenti della divergenza $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta}$ risulta quindi

$$(1.66) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla_\alpha T^{\alpha 0} = \nabla_0 T^{00} + \nabla_a T^{a0} = \partial_0 T^{00} + \partial_a T^{a0} + \tilde{\Gamma}_{ad}^a T^{d0} \\ \quad + F \tilde{g}_{ad} T^{da} + 3H T^{00}. \\ \nabla_\alpha T^{\alpha b} = \nabla_0 T^{0b} + \nabla_a T^{ab} = \partial_0 T^{0b} + H T^{0b} \\ \quad + \partial_a T^{ab} + \tilde{\Gamma}_{ad}^a T^{db} + \tilde{\Gamma}_{ad}^b T^{ad} + H (\delta_a^a T^{0b} + \delta_a^b T^{a0}) \\ = \partial_0 T^{0b} + H T^{0b} + \partial_a T^{ab} + \tilde{\Gamma}_{ad}^a T^{db} + \tilde{\Gamma}_{ad}^b T^{ad} \\ \quad + H (3T^{0b} + T^{b0}). \end{array} \right.$$

Se il tensore è isotropo valgono le (1.40), quindi dalle formula precedenti si trae:

$$(1.67) \quad \boxed{\begin{array}{l} \nabla_0 T^{00} = \phi' \\ \nabla_0 T^{0c} = 0 \\ \nabla_0 T^{ab} = (\psi' + 2H\psi) \tilde{g}^{ab} \end{array}}$$

$$(1.68) \quad \boxed{\begin{array}{l} \nabla_a T^{00} = 0 \\ \nabla_a T^{b0} = (H\phi + F\psi) \delta_a^b \\ \nabla_a T^{bc} = \psi \left(\partial_a \tilde{g}^{bc} + \tilde{\Gamma}_{ad}^b \tilde{g}^{dc} + \tilde{\Gamma}_{ad}^c \tilde{g}^{bd} \right) = 0 \end{array}}$$

$$(1.69) \quad \boxed{\begin{array}{l} \nabla_\alpha T^{\alpha 0} = \phi' + 3(H\phi + F\psi) \\ \nabla_\alpha T^{\alpha b} = 0 \end{array}}$$

Queste ultime equazioni provano una proprietà che avrà una notevole conseguenza in cosmologia relativistica (Teorema 2.3.6):

Teorema 1.15.1 – *Rispetto ad una qualunque connessione cosmica per qualunque tensore doppio covariante simmetrico $T^{\alpha\beta}$ le quattro equazioni di conservazione $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ equivalgono ad una sola equazione:*

$$(1.70) \quad \boxed{\phi' + 3(H\phi + F\psi) = 0}$$

Capitolo 2

Postulati-ponte

Come si è detto nella Prefazione, un postulato-ponte ci consente di transitare dal territorio puramente geometrico, riguardante la struttura dello spazio-tempo cosmico, al territorio di una **dinamica cosmica** dove si dovranno stabilire le equazioni che governano l'evoluzione del fattore di scala $a(t)$.

Un postulato-ponte ha il compito di determinare, tra le infinite possibili, un'unica connessione cosmica, vale a dire un'unica funzione $F(q^0)$ che completi il quadro dei simboli (1.59). Una connessione è lo strumento indispensabile per definire il concetto di **accelerazione** e anche per stabilire delle **equazioni di campo**. Inoltre, con l'assegnazione di una connessione, il tempo cosmico t , rimasto finora un parametro indeterminato, acquisirà un significato fisico. In altri termini, si potrà definire un **orologio standard** con cui misurarlo.

2.1 Connessione cosmica newtoniana

Postulato-ponte newtoniano. *Il tempo cosmico t è un parametro affine per le storie delle particelle libere.*

In una connessione cosmica il tempo t è un parametro affine delle storie galattiche (Requisito 2). Questo postulato estende tale proprietà alle particelle libere.

Teorema 2.1.1 – (i) *Esiste un'unica connessione cosmica soddisfacente al postulato-ponte newtoniano ed è caratterizzata dalla condizione $F = 0$.* (ii) *Le equazioni delle geodetiche trasverse alle sezioni spaziali sono*

$$(2.1) \quad \frac{d}{dt} \frac{dq^c}{dt} + \tilde{\Gamma}_{ab}^c \frac{dq^a}{dt} \frac{dq^b}{dt} = -2H(t) \frac{dq^c}{dt}$$

Dimostrazione. (i) Riscriviamo le equazioni (1.60) delle geodetiche di una connessione cosmica prendendo come parametro il tempo cosmico t ,

$$\begin{cases} F \tilde{g}_{ab} \frac{dq^a}{dt} \frac{dq^b}{dt} = \lambda \kappa^2, \\ \frac{d}{dt} \frac{dq^c}{dt} + \tilde{\Gamma}_{ab}^c \frac{dq^a}{dt} \frac{dq^b}{dt} = \kappa (\lambda - 2H(q^0)) \frac{dq^c}{dt}. \end{cases}$$

Il postulato equivale alla condizione $\lambda = 0$ e la prima equazione mostra che questa è soddisfatta se e solo se $F = 0$. (ii) Il secondo gruppo di equazioni geodetiche si riduce a

$$\frac{d}{dt} \frac{dq^c}{dt} + \tilde{\Gamma}_{ab}^c \frac{dq^a}{dt} \frac{dq^b}{dt} = -2 \kappa H(q^0) \frac{dq^c}{dt}.$$

Tenuto conto della (1.54) $H(t) = \kappa H(q^0)$, si ottengono le (2.1). ■

Le geodetiche spazio-temporali di una connessione cosmica si proiettano in geodetiche dello spazio di riferimento (Requisito 4). Le (2.1) sono le equazioni delle proiezioni delle geodetiche spazio-temporali delle particelle libere. Al primo membro troviamo le componenti a^c dell'accelerazione rispetto al tempo cosmico t di un punto mobile nello spazio di riferimento. Il secondo membro è quindi interpretabile come una forza

$$(2.2) \quad f^c = -2H(t) \frac{dq^c}{dt}$$

che agisce su questo punto e che è diretta secondo la sua velocità, concorde per $H(t) < 0$, opposta per $H(t) > 0$. Questo fatto non è in accordo con la dinamica newtoniana classica dove, per principio, una particella libera (cioè non soggetta ad alcuna sollecitazione esterna) si muove di moto rettilineo e uniforme. La concordanza si ha per $H = 0$ cioè per $a(t) = \text{costante}$. Questo è il caso di un **Universo statico**.

Dopo questo postulato-ponte si pone il problema di stabilire dei postulati dinamici su cui fondare modelli cosmologici newtoniani. Ma non ci spingeremo oltre su questo territorio.

2.2 Velocità peculiare di una particella vagante

Nel prossimo paragrafo verrà proposto un secondo postulato-ponte la cui formulazione necessita di alcune premesse. Siano $(q^0(t), q^a(t))$ le equazioni parametriche della storia $\gamma(t)$ di una particella vagante. Quando al tempo t questa sta attraversando una galassia B_t la sua **velocità cosmica** è il vettore V di componenti

$$(2.3) \quad V(t) = \left[\frac{dq^0}{dt}, \frac{dq^a}{dt} \right]$$

dove il vettore

$$v(t) = \left[\frac{dq^a}{dt} \right]$$

è tangente alla sezione spaziale S_t . Questa è la velocità della particella nei pressi della galassia B_t interpretata come riferimento fisico, definito dai tre vettori associati alle coordinate (q^a) . Per visualizzare questi due vettori si torni indietro alla Figura 1.8. Chiamiamo **velocità peculiare** della particella l'intensità di questo vettore spaziale:

$$(2.4) \quad v_{\text{pec}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{g_{ab}(t) \frac{dq^a}{dt} \frac{dq^b}{dt}}.$$

Per quanto detto sopra, questa è la **velocità scalare relativa** al riferimento B_t . Stante l'equazione di fattorizzazione (1.25), essa assume la forma

$$(2.5) \quad v_{\text{pec}}(t) = a(t, t_{\#}) \sqrt{g_{\#ab} \frac{dq^a}{dt} \frac{dq^b}{dt}}$$

essendo $t_{\#}$ il tempo di riferimento del fattore di scala e $g_{\#ab}$ le componenti del tensore metrico dello spazio di riferimento $S_{t_{\#}}$.

Se consideriamo l'elemento d'arco $d\tilde{s}$ della metrica di riferimento $g_{\#}$, definito dall'equazione

$$g_{\#ab} \frac{dq^a}{d\tilde{s}} \frac{dq^b}{d\tilde{s}} = 1$$

allora la velocità peculiare (2.5) assume la semplice forma

$$(2.6) \quad \boxed{v_{\text{pec}}(t) = a(t, t_{\#}) \frac{d\tilde{s}}{dt}}$$

2.3 Connessione cosmica relativistica

Postulato-ponte relativistico. *Esistono un tempo cosmico t e delle particelle libere la cui velocità peculiare è una costante universale c .*

Stante la (2.6), l'equazione $v_{\text{pec}}(t) = c$ si traduce in

$$(2.7) \quad \boxed{a(t, t_{\#}) \frac{d\tilde{s}}{dt} = c}$$

Anche se con abuso di linguaggio, chiameremo **fotoni** queste particelle.

Teorema 2.3.1 – *L'esistenza di fotoni è compatibile con una connessione cosmica se e solo se*

$$(2.8) \quad \boxed{F(q^0) = \frac{\kappa^2}{c^2} a a'}$$

Dimostrazione. Per il postulato relativistico un fotone è una particella libera e per definizione di particella libera la sua storia è una geodetica della connessione cosmica. Per il Requisito 4 questa si proietta su di una geodetica dello spazio di riferimento e inoltre, per il Teorema 1.13.6, lungo questa vale l'equazione (1.55)

$$[*] \quad \frac{d \log V}{dq^0} + 2H(q^0) = F(q^0)V^2, \quad V(q^0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\tilde{s}}{dq^0}.$$

In virtù dell'espressione (2.6) della velocità peculiare e dell'uguaglianza $v_{\text{pec}}(t) = c$ voluta dal postulato risulta

$$V = \frac{d\tilde{s}}{dq^0} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\tilde{s}}{dt} = \frac{1}{\kappa a} v_{\text{pec}} = \frac{c}{\kappa a}.$$

Quindi, essendo c e κ delle costanti,

$$\frac{d \log V}{dq^0} = - \frac{d \log a}{dq^0} = - \frac{a'}{a},$$

e la [*] si traduce in

$$- \frac{a'}{a} + 2H(q^0) = F \frac{c^2}{\kappa^2 a^2}.$$

Essendo $H = a'/a$ per la definizione (1.53), risulta

$$\frac{a'}{a} = F \frac{c^2}{\kappa^2 a^2}.$$

Di qui la (2.8). ■

Da questo teorema, richiamata la tavola (1.59), segue il

Teorema 2.3.2 – *Il postulato-ponte relativistico determina un'unica connessione cosmica relativistica i cui simboli sono*

$$(2.9) \quad \boxed{\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= 0, \quad \Gamma_{a0}^0 = 0, \quad \Gamma_{00}^c = 0 \\ \Gamma_{a0}^c &= \frac{a'}{a} \delta_a^c, \quad \Gamma_{ab}^0 = \frac{\kappa^2}{c^2} a a' \tilde{g}_{ab}, \quad \Gamma_{ab}^c = \tilde{\Gamma}_{ab}^c(\tilde{q}) \end{aligned}}$$

Lungo ogni storia parametrizzata dal tempo cosmico t questi simboli vanno considerati come funzioni di t . Siccome

$$a' = \dot{a} \frac{dt}{dq^0} = \frac{\dot{a}}{\kappa},$$

risulta

$$(2.10) \quad \boxed{\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= 0, \quad \Gamma_{a0}^0 = 0, \quad \Gamma_{00}^c = 0 \\ \Gamma_{a0}^c &= \frac{1}{\kappa} \frac{\dot{a}}{a} \delta_a^c, \quad \Gamma_{ab}^0 = \frac{\kappa}{c^2} a \dot{a} \tilde{g}_{ab}, \quad \Gamma_{ab}^c = \tilde{\Gamma}_{ab}^c(\tilde{q}) \end{aligned}}$$

Con questi simboli le equazioni delle geodetiche nel parametro t

$$\frac{d^2 q^\gamma}{dt^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{dq^\alpha}{dt} \frac{dq^\beta}{dt} = \lambda \frac{dq^\gamma}{dt}$$

si spezzano nel sistema

$$(2.11) \quad \begin{cases} \gamma = 0 \implies \frac{d^2 q^0}{dt^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{dq^\alpha}{dt} \frac{dq^\beta}{dt} = \lambda \frac{dq^0}{dt}, \\ \gamma = c \implies \frac{d^2 q^c}{dt^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^c \frac{dq^\alpha}{dt} \frac{dq^\beta}{dt} = \lambda \frac{dq^c}{dt}. \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \frac{d^2 q^0}{dt^2} + \frac{\kappa}{c^2} a \dot{a} \tilde{g}_{ab} \frac{dq^a}{dt} \frac{dq^b}{dt} = \lambda \frac{dq^0}{dt}, \\ \frac{d^2 q^c}{dt^2} + \tilde{\Gamma}_{ab}^c \frac{dq^a}{dt} \frac{dq^b}{dt} + \frac{2}{\kappa a} \dot{a} \frac{dq^0}{dt} \frac{dq^c}{dt} = \lambda \frac{dq^c}{dt}. \end{cases}$$

$$\frac{dq^0}{dt} = \kappa \implies \begin{cases} \frac{\kappa}{c^2} a \dot{a} \tilde{g}_{ab} \frac{dq^a}{dt} \frac{dq^b}{dt} = \lambda \kappa, \\ \frac{d^2 q^c}{dt^2} + \tilde{\Gamma}_{ab}^c \frac{dq^a}{dt} \frac{dq^b}{dt} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{dq^c}{dt} = \lambda \frac{dq^c}{dt}. \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} \frac{a \dot{a}}{c^2} \tilde{g}_{ab} \frac{dq^a}{dt} \frac{dq^b}{dt} = \lambda, \\ \frac{d^2 q^c}{dt^2} + \tilde{\Gamma}_{ab}^c \frac{dq^a}{dt} \frac{dq^b}{dt} = \left(\lambda - 2 \frac{\dot{a}}{a} \right) \frac{dq^c}{dt}. \end{cases}$$

La prima equazione mostra che non può essere $\lambda = 0$. Ciò significa che

Teorema 2.3.3 – *Il tempo cosmico non è parametro affine per le geodetiche trasversali, quindi neanche per le storie dei fotoni.*

Teorema 2.3.4 – *Le equazioni delle geodetiche della connessione cosmica relativistica (2.11) si riducono alle tre equazioni*

$$(2.12) \quad \boxed{\frac{d^2 q^c}{dt^2} + \tilde{\Gamma}_{ab}^c \frac{dq^a}{dt} \frac{dq^b}{dt} = -H(t) \frac{dq^c}{dt}}$$

Dimostrazione. Posto che $v_{\text{pec}} = a \frac{d\tilde{s}}{dt}$, dalla prima equazione (2.11) si ricava il moltiplicatore:

$$\lambda = \frac{a \dot{a}}{c^2} \tilde{g}_{ab} \frac{dq^a}{d\tilde{s}} \frac{dq^b}{d\tilde{s}} \left(\frac{d\tilde{s}}{dt} \right)^2 = \frac{a \dot{a}}{c^2} \left(\frac{d\tilde{s}}{dt} \right)^2 = \frac{\dot{a}}{ac^2} v_{\text{pec}}^2 = \frac{\dot{a}}{a}.$$

Sostituita questa espressione nelle seconde equazioni (2.11) si trovano le (2.12). ■

Nota 2.3.1 – La velocità ausiliaria κ non compare in queste equazioni. •

Teorema 2.3.5 – Se $t_\omega = +\infty$ e se il fattore di scala $a(t)$ è illimitato per $t \rightarrow +\infty$ allora le storie dei fotoni si avvicinano asintoticamente alle storie del fluido cosmico.

Dimostrazione. Poiché l'equazione (2.7) vale per ogni t , allora il limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = +\infty$ implica

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{d\tilde{s}}{dt} = 0.$$

Ciò significa che nel monitor cosmico la traccia di un fotone tende asintoticamente ad un punto fisso. ■

Nota 2.3.2 – Questo teorema mostra una proprietà cinematica dei fotoni indipendente dalla scelta dei postulati dinamici. •

Ulteriori proprietà della connessione cosmica relativistica riguardano le derivate covarianti. Dalle formule generali (1.67) e (1.70) segue che

Teorema 2.3.6 – (i) *Rispetto alla connessione cosmica relativistica (2.9) le derivate covarianti di un campo vettoriale isotropo sono*

$$(2.13) \quad \begin{array}{l} \nabla_0 V^0 = \partial_0 V^0, \quad \nabla_0 V^a = 0, \quad \nabla_b V^0 = 0, \\ \nabla_b V^a = \frac{a'}{a} V^0 \delta_b^a. \end{array}$$

(ii) *La divergenza è data da*

$$(2.14) \quad \nabla_\alpha V^\alpha = \partial_0 V^0 + 3 \frac{a'}{a} V^0$$

(iii) *Per ogni tensore doppio contravariante simmetrico $T^{\alpha\beta}$ le quattro equazioni di conservazione $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ equivalgono ad una singola equazione,*

$$(2.15) \quad \phi' + 3 a' \left(\frac{\phi}{a} + \frac{\kappa^2}{c^2} a \psi \right) = 0$$

2.4 Metrica cosmica relativistica

Qui si scopre che la connessione relativistica è la connessione di Levi-Civita di una metrica Lorentziana nello spazio-tempo.

Teorema 2.4.1 – La connessione cosmica relativistica è la connessione di Levi-Civita della metrica Lorentziana

$$(2.16) \quad g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta = \alpha \left(dq^{02} - \frac{\kappa^2 a^2}{c^2} \tilde{g}_{ab} dq^a dq^b \right)$$

$$\begin{cases} g_{00} = \alpha \\ g_{0a} = 0 \\ g_{ab} = -\alpha \frac{\kappa^2}{c^2} a^2 \tilde{g}_{ab} \end{cases}$$

dove α è un fattore costante non nullo e $q^0 = \kappa t$.

Nota 2.4.1 – Si osservi che, in virtù della fattorizzazione (1.25), le componenti spaziali g_{ab} non dipendono dalla scelta dello spazio di riferimento, ovvero dal tempo di riferimento del fattore di scala. •

Nota 2.4.2 – Con $\alpha = -1$ otteniamo la metrica Lorentziana

$$(2.17) \quad g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta = -dq^{02} + \frac{\kappa^2}{c^2} a^2 \tilde{g}_{ab} dq^a dq^b$$

$$\begin{cases} g_{00} = -1, \\ g_{0a} = 0, \\ g_{ab} = \frac{\kappa^2}{c^2} a^2 \tilde{g}_{ab}. \end{cases}$$

Dimostrazione. In accordo col Teorema 1.11.2 le componenti di un qualunque tensore metrico isotropo devono essere del tipo

$$(2.18) \quad g_{\alpha\beta} : \begin{cases} g_{00} = \alpha(q^0), \\ g_{0a} = 0, \\ g_{ab} = \beta(q^0) \tilde{g}_{ab}(\tilde{q}), \end{cases}$$

$$g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta = \alpha dq^{02} + \beta \tilde{g}_{ab} dq^a dq^b.$$

1. Calcolo dei simboli di Christoffel di prima specie

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}).$$

$$2\Gamma_{00,\gamma} = \partial_0 g_{0\gamma} + \partial_0 g_{\gamma 0} - \partial_\gamma g_{00} = \begin{cases} 2\Gamma_{00,0} = \partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00} = \alpha'. \\ 2\Gamma_{00,a} = \partial_0 g_{0a} + \partial_0 g_{a0} - \partial_a g_{00} = 0. \end{cases}$$

$$2\Gamma_{0b,\gamma} = \partial_0 g_{b\gamma} + \partial_b g_{\gamma 0} - \partial_\gamma g_{0b} = \begin{cases} 2\Gamma_{0b,0} = \partial_0 g_{b0} + \partial_b g_{00} - \partial_0 g_{0b} = 0. \\ 2\Gamma_{0b,c} = \partial_0 g_{bc} + \partial_b g_{c0} - \partial_c g_{0b} = \beta' \tilde{g}_{bc}. \end{cases}$$

$$2\Gamma_{ab,\gamma} = \partial_a g_{b\gamma} + \partial_b g_{\gamma a} - \partial_\gamma g_{ab} = \begin{cases} 2\Gamma_{ab,0} = \partial_a g_{b0} + \partial_b g_{0a} - \partial_0 g_{ab} = -\beta' \tilde{g}_{ab}. \\ 2\Gamma_{ab,c} = \partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ca} - \partial_c g_{ab} = 2\beta \tilde{\Gamma}_{ab,c}. \end{cases}$$

Simboli non identicamente nulli:

$$\begin{cases} \Gamma_{00,0} = \frac{1}{2} \alpha', & \Gamma_{ab,0} = -\frac{1}{2} \beta' \tilde{g}_{ab}, \\ \Gamma_{0b,c} = \frac{1}{2} \beta' \tilde{g}_{bc}, & \Gamma_{ab,c} = \beta \tilde{\Gamma}_{ab,c}. \end{cases}$$

2. Calcolo dei simboli di Christoffel di seconda specie $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = g^{\gamma\delta} \Gamma_{\alpha\beta,\delta}$.

$$g^{\alpha\beta} : \begin{cases} g^{00} = \alpha^{-1}(q^0), \\ g^{0a} = 0, \\ g^{ab} = \beta^{-1}(q^0) \tilde{g}^{ab}(\tilde{q}). \end{cases}$$

$$\Gamma_{00}^\gamma = g^{\gamma\delta} \Gamma_{00,\delta} = \begin{cases} \Gamma_{00}^0 = g^{0\delta} \Gamma_{00,\delta} = g^{00} \Gamma_{00,0} = \frac{1}{2} \alpha^{-1} \alpha' = \frac{1}{2} (\log \alpha)'. \\ \Gamma_{00}^c = g^{c\delta} \Gamma_{00,\delta} = g^{cd} \Gamma_{00,d} = 0. \end{cases}$$

$$\Gamma_{a0}^\gamma = g^{\gamma\delta} \Gamma_{a0,\delta} = \begin{cases} \Gamma_{a0}^0 = g^{0\delta} \Gamma_{a0,\delta} = g^{00} \Gamma_{a0,0} = 0. \\ \Gamma_{a0}^c = g^{c\delta} \Gamma_{a0,\delta} = g^{cd} \Gamma_{a0,d} = \frac{1}{2} \beta^{-1} \tilde{g}^{cd} \beta' \tilde{g}_{ad} \\ = \frac{1}{2} (\log \beta)' \delta_a^c. \end{cases}$$

$$\Gamma_{ab}^\gamma = g^{\gamma\delta} \Gamma_{ab,\delta} = \begin{cases} \Gamma_{ab}^0 = g^{0\delta} \Gamma_{ab,\delta} = g^{00} \Gamma_{ab,0} = -\frac{1}{2} \alpha^{-1} \beta' \tilde{g}_{ab}. \\ = g^{c\delta} \Gamma_{ab,\delta} = g^{cd} \Gamma_{ab,d} = \beta^{-1} \tilde{g}^{cd} \beta \tilde{\Gamma}_{ab,d} = \tilde{\Gamma}_{ab}^c. \end{cases}$$

Quadro riassuntivo:

$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} \frac{\alpha'}{\alpha}, \quad \Gamma_{a0}^0 = 0, \quad \Gamma_{00}^c = 0$		
$\Gamma_{a0}^c = \frac{1}{2} \frac{\beta'}{\beta} \delta_a^c,$	$\Gamma_{ab}^0 = -\frac{1}{2} \frac{\beta'}{\alpha} \tilde{g}_{ab},$	$\Gamma_{ab}^c = \tilde{\Gamma}_{ab}^c(\tilde{q})$

Questi simboli coincidono con quelli della connessione cosmica relativistica (2.9)

$$\begin{cases} \Gamma_{00}^0 = 0, & \Gamma_{a0}^0 = 0, & \Gamma_{00}^c = 0, \\ \Gamma_{a0}^c = \frac{a'}{a} \delta_a^c, & \Gamma_{ab}^0 = \frac{\kappa^2}{c^2} a a' \tilde{g}_{ab}, & \Gamma_{ab}^c = \tilde{\Gamma}_{ab}^c(\tilde{q}), \end{cases}$$

se e solo se

$$[*] \quad \begin{cases} \alpha = \text{costante} \\ \frac{1}{2}(\log \beta)' = (\log a)' \\ -\frac{1}{2}\alpha^{-1}\beta' = \frac{\kappa^2}{c^2}aa' \end{cases}$$

Segue

$$\begin{aligned} [*] &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \text{costante} \\ a^{-2}\beta = \text{costante} = \gamma \\ \beta' = -2\alpha \frac{\kappa^2}{c^2}aa' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \text{costante} \\ \beta = \gamma a^2 \\ \beta' = -2\alpha \frac{\kappa^2}{c^2}aa' \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \text{costante} \\ \beta' = 2\gamma aa' \\ \beta' = -2\alpha \frac{\kappa^2}{c^2}aa' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \text{costante} \\ 2\gamma aa' = -2\alpha \frac{\kappa^2}{c^2}aa' \end{cases} \Rightarrow \\ &\quad \begin{cases} \alpha = \text{costante} \\ \gamma = -\alpha \frac{\kappa^2}{c^2} \\ \beta = \gamma a^2 = -\alpha \frac{\kappa^2}{c^2}a^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Il confronto con le (2.18) dimostra le (2.16). ■

Teorema 2.4.2 – Nella metrica (2.17) (i) le storie del fluido cosmico sono geodetiche del genere tempo ortogonali alle sezioni spaziali S_t e (ii) le storie dei fotoni sono geodetiche nulle, cioè del genere luce.

Dimostrazione. (i) Per il primo requisito di una connessione cosmica le storie del fluido cosmico sono geodetiche della connessione relativistica, quindi della metrica cosmica. Poiché in coordinate comobili $g_{0a} = 0$, queste storie sono ortogonali alle sezioni spaziali quindi sono del genere tempo. (ii) Per ogni storia parametrizzata da q^0 abbiamo

$$(2.19) \quad \begin{aligned} g_{\alpha\beta} \frac{dq^\alpha}{dq^0} \frac{dq^\alpha}{dq^0} &= -1 + \frac{\kappa^2}{c^2} a^2 \tilde{g}_{ab} \frac{dq^a}{dq^0} \frac{dq^b}{dq^0} \\ &= -1 + \frac{\kappa^2}{c^2} a^2 \tilde{g}_{ab} \frac{dq^a}{d\tilde{s}} \frac{dq^b}{d\tilde{s}} \left(\frac{d\tilde{s}}{dq^0} \right)^2 = -1 + \frac{\kappa^2}{c^2} a^2 \left(\frac{d\tilde{s}}{dq^0} \right)^2 \end{aligned}$$

essendo $\tilde{g}_{ab} \frac{dq^a}{d\tilde{s}} \frac{dq^b}{d\tilde{s}} = 1$. L'espressione

$$\frac{d\tilde{s}}{dq^0} = \frac{c}{\kappa a}$$

della velocità peculiare di un fotone implica l'annullarsi dell'ultimo termine in (2.19). Ciò prova che la curva è del genere luce. È una geodetica perché, per postulato, un fotone è una particella libera. ■

2.5 Tensori di Ricci e di Einstein

Le componenti del tensore di Ricci della connessione cosmica relativistica sono

$$(2.20) \quad \begin{aligned} R_{00} &= -3a^{-1}a'', & R_{a0} &= 0 \\ R_{ab} &= \tilde{R}_{ab} + \frac{\kappa^2}{c^2} (2a'^2 + aa'') \tilde{g}_{ab} \\ &= \left(\frac{\kappa^2}{c^2} (2a'^2 + aa'') + 2\tilde{K} \right) \tilde{g}_{ab} \end{aligned}$$

Queste espressioni seguono dalle (1.61) ponendo

$$H(q^0) = \frac{a'}{a}, \quad F = \frac{\kappa^2}{c^2} a a', \quad F' = \frac{\kappa^2}{c^2} (a'^2 + a a'').$$

Possiamo calcolare le componenti miste e contravarianti del tensore di Ricci alzando gli indici delle componenti covarianti (2.20) per mezzo delle componenti contravarianti del tensore metrico (2.17):

$$(2.21) \quad g^{\alpha\beta} : \begin{cases} g^{00} = -1, \\ g^{0a} = 0, \\ g^{ab} = \frac{c^2}{\kappa^2} \frac{1}{a^2} \tilde{g}^{ab}. \end{cases}$$

Le espressioni risultanti sono

$$(2.22) \quad \begin{aligned} R_0^0 &= 3 \frac{a''}{a}, & R_a^0 &= 0, & R_0^b &= 0, \\ R_a^b &= \frac{1}{a^2} \left[\frac{c^2}{\kappa^2} \tilde{R}_a^b + (2a'^2 + aa'') \delta_a^b \right] \\ &= \frac{1}{a^2} \left[2a'^2 + aa'' + 2 \frac{c^2}{\kappa^2} \tilde{K} \right] \delta_a^b \end{aligned}$$

$$(2.23) \quad \begin{aligned} R^{00} &= -3 \frac{a''}{a}, & R^{a0} &= 0, \\ R^{ab} &= \frac{c^2}{\kappa^2} \frac{1}{a^4} \left[\frac{c^2}{\kappa^2} \tilde{R}^{ab} + (2a'^2 + aa'') \tilde{g}^{ab} \right] \\ &= \frac{c^2}{\kappa^2} \frac{1}{a^4} \left[2a'^2 + aa'' + 2 \frac{c^2}{\kappa^2} \tilde{K} \right] \tilde{g}^{ab}. \end{aligned}$$

$$(2.24) \quad \boxed{\begin{aligned} R &\stackrel{\text{def}}{=} R^\alpha_\alpha = \frac{3}{a^2} \left[\frac{c^2}{\kappa^2} \tilde{R} + 2(a'^2 + a a'') \right] \\ &= \frac{6}{a^2} \left(a'^2 + a a'' + \frac{c^2}{\kappa^2} \tilde{K} \right) \end{aligned}}$$

Lungo ogni curva parametrizzata dal tempo cosmico t tutte le componenti tensoriali devono essere espresse come funzioni di t . Tenendo conto che

$$a' = \frac{\dot{a}}{\kappa}, \quad a'' = \frac{\ddot{a}}{\kappa^2},$$

risulta:

$$(2.25) \quad \boxed{\begin{aligned} R^0_0 &= \frac{3}{\kappa^2} \frac{\ddot{a}}{a}, \quad R^0_a = 0, \quad R^b_0 = 0, \\ R^b_a &= \frac{1}{\kappa^2 a^2} \left[c^2 \tilde{R}^b_a + (2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) \delta^b_a \right] \\ &= \frac{1}{\kappa^2 a^2} \left[2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2c^2 \tilde{K} \right] \delta^b_a \end{aligned}}$$

$$(2.26) \quad \boxed{\begin{aligned} R^{00} &= -\frac{3}{\kappa^2} \frac{\ddot{a}}{a}, \quad R^{a0} = 0, \\ R^{ab} &= \frac{c^2}{\kappa^4} \frac{1}{a^4} \left[c^2 \tilde{R}^{ab} + (2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) \tilde{g}^{ab} \right] \\ &= \frac{c^2}{\kappa^4} \frac{1}{a^4} \left[2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2c^2 \tilde{K} \right] \tilde{g}^{ab}. \end{aligned}}$$

$$(2.27) \quad \boxed{R = \frac{3}{\kappa^2 a^2} \left[c^2 \tilde{R} + 2(\dot{a}^2 + a\ddot{a}) \right] = \frac{6}{\kappa^2 a^2} \left(\dot{a}^2 + a\ddot{a} + c^2 \tilde{K} \right)}$$

Per le componenti contravarianti del tensore di Einstein

$$G^{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g^{\alpha\beta}$$

risulta:

$$(2.28) \quad \boxed{\begin{aligned} G^{00} &= \frac{3}{a^2} \left(a'^2 + \frac{c^2}{\kappa^2} \tilde{K} \right), \quad G^{a0} = 0, \\ G^{ab} &= -\frac{c^2}{\kappa^2 a^4} \left(a'^2 + 2a a'' + \frac{c^2}{\kappa^2} \tilde{K} \right) \tilde{g}^{ab} \end{aligned}}$$

$$(2.29) \quad \begin{aligned} G^{00} &= \frac{3}{\kappa^2 a^2} (\dot{a}^2 + c^2 \tilde{K}), & G^{a0} &= 0, \\ G^{ab} &= -\frac{c^2}{\kappa^4 a^4} (\dot{a}^2 + 2a\ddot{a} + c^2 \tilde{K}) \tilde{g}^{ab} \end{aligned}$$

La costante ausiliaria κ , che ha la dimensione di una velocità, è stata introdotta per definire una coordinata $q^0 = \kappa t$ con dimensione lunghezza da sostituire al tempo cosmico. Il suo valore numerico è indeterminato. Fin qui questa costante si è rivelata un utile strumento, specialmente nel controllo dell'omogeneità dimensionale di molte equazioni. Sulla soglia della dinamica relativistica è del tutto naturale porre questa costante uguale alla velocità della luce c :

$$\kappa = c \quad q^0 = ct$$

La metrica cosmica assume allora l'espressione

$$(2.30) \quad g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta = -c^2 dt^2 + a^2 \tilde{g}_{ab} dq^a dq^b$$

2.6 Particelle sub-luminali

Una **particella sub-luminale** è una particella vagante la cui storia $q^\alpha(t)$ è del genere tempo nella metrica (2.30). Ogni curva del genere tempo ammette un parametro τ , detto **tempo proprio**, tale che

$$(2.31) \quad g_{\alpha\beta} \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau} = -c^2$$

Il vettore tetra-dimensionale

$$(2.32) \quad V(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{dq^\alpha}{d\tau} \right]$$

è detto **velocità propria** o **velocità assoluta** della particella.

Teorema 2.6.1 – *Le particelle sub-luminali hanno velocità propria minore della costante universale c*

Dimostrazione. Richiamiamo la definizione di velocità peculiare (2.5)

$$v_{\text{pec}}(t) = a \sqrt{\tilde{g}_{ab} \frac{dq^a}{dt} \frac{dq^b}{dt}}.$$

Dalla (2.31) segue che

$$(2.33) \quad \begin{cases} -c^2 = g_{\alpha\beta} \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\alpha}{d\tau} = g_{\alpha\beta} \frac{dq^\alpha}{dt} \frac{dq^\alpha}{dt} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \\ = \left[-\left(\frac{dq^0}{dt}\right)^2 + a^2 \tilde{g}_{ab} \frac{dq^a}{dt} \frac{dq^b}{dt} \right] \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = c^2 \left(-1 + \frac{v_{\text{pec}}^2}{c^2} \right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2. \end{cases}$$

$$\implies 1 = \left(1 - \frac{v_{\text{pec}}^2}{c^2}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2.$$

Questo risultato mostra che $\frac{v_{\text{pec}}^2}{c^2} < 1$, $v_{\text{pec}} < c$. ■

Nota 2.6.1 – L'equazione (2.33) è equivalente a

$$(2.34) \quad \boxed{\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v_{\text{pec}}^2}{c^2}}}$$

Questa equazione è simile alla ben nota formula che in relatività speciale lega il tempo proprio e il tempo relativo lungo la storia di una particella massiva. •

Nota 2.6.2 – Le galassie, come particelle del fluido cosmico, hanno velocità peculiare nulla quindi sono particelle sub-luminali con $\tau = t$. Conseguentemente la loro velocità assoluta è

$$(2.35) \quad V^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dq^\alpha}{d\tau} = \frac{dq^\alpha}{dt} = c \frac{dq^\alpha}{dq^0} \quad \begin{cases} V^0 = c, \\ V^a = 0. \end{cases}$$

Applicando la (2.14) si vede che la divergenza di questo campo vettoriale è data da

$$(2.36) \quad \boxed{\nabla_\alpha V^\alpha = 3cH}$$

Capitolo 3

Dinamica cosmica relativistica

3.1 Primo postulato dinamico: le equazioni di Einstein

Dopo aver attraversato il postulato-ponte relativistico il nostro intento è formulare le leggi fisiche che governano l'evoluzione del fattore di scala $a(t)$. Sappiamo che lo spazio-tempo cosmico è dotato della metrica (2.30)

$$(3.1) \quad g_{00} = -1, \quad g_{a0} = 0, \quad g_{ab} = a^2(t) \tilde{g}_{ab}(\tilde{q})$$

$$g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta = -c^2 dt^2 + a^2(t) \tilde{g}_{ab} dq^a dq^b$$

con componenti contravarianti

$$(3.2) \quad g^{00} = -1, \quad g^{a0} = 0, \quad g^{ab} = a^{-2}(t) \tilde{g}^{ab}(\tilde{q})$$

Nessuna particolare ipotesi è fatta per ora sul tempo di riferimento t_{\ddagger} .

Primo postulato dinamico. *La metrica dello spazio-tempo è determinata dalle equazioni di campo di Einstein*

$$(3.3) \quad G^{\alpha\beta} + \Lambda g^{\alpha\beta} = \chi T^{\alpha\beta}$$

dove $\Lambda > 0$ è la *costante cosmologica* e la costante χ è definita da

$$(3.4) \quad \chi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{8\pi G_N}{c^4}$$

essendo G_N la *costante gravitazionale newtoniana*.

In ottemperanza al principio di isotropia le componenti del tensore $T^{\alpha\beta}$ devono essere del tipo (Teorema 1.11.2)

$$(3.5) \quad T^{\alpha\beta} : \begin{cases} T^{00} = \phi(t) = \text{funzione di } t \text{ solamente} \\ T^{a0} = 0 \\ T^{ab} = \psi(t) \tilde{g}^{ab} = \text{una funzione di } t \text{ per } \tilde{g}^{ab} \end{cases}$$

Le derivate rispetto a t delle funzioni caratteristiche ϕ and ψ di $T^{\alpha\beta}$ saranno denotate con $\dot{\phi}$ e $\dot{\psi}$.

Per rendere applicabile questo primo postulato occorre tradurre le equazioni di Einstein in equazioni differenziali nel fattore di scala $a(t)$.

Teorema 3.1.1 – (i) *Le quattro equazioni di conservazione $\nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta} = 0$ sono equivalenti alla sola equazione*

$$(3.6) \quad a \dot{\phi} + 3 \dot{a} (\phi + a^2 \psi) = 0$$

che a sua volta è equivalente a

$$(3.7) \quad (\phi a^3) = -3 a^4 \dot{a} \psi$$

(ii) *Le dieci equazioni di Einstein (3.3) sono equivalenti alle due equazioni differenziali*

$$(3.8) \quad \frac{\dot{a}^2}{c^2} = \frac{1}{3} a^2 (\Lambda + \chi \phi) - \tilde{K}$$

$$(3.9) \quad 2 \frac{\ddot{a}}{c^2} = a \left[\frac{2}{3} \Lambda - \chi (\psi a^2 + \frac{1}{3} \phi) \right]$$

(iii) *L'equazione (3.9) è una conseguenza della (3.8) e della legge di conservazione (3.6).*

Dimostrazione. (i) L'equazione (3.6) è la traduzione della (2.15), punto (iii) del Teorema 2.3.6, nel passaggio dal parametro q^0 al parametro t con $\kappa = c$.

(ii) Combinando fra loro le equazioni (2.29), (3.2) e (3.5), con $\kappa = c$, le equazioni di Einstein (3.3) si traducono nel sistema di due equazioni

$$\begin{cases} \frac{3}{c^2 a^2} (\dot{a}^2 + c^2 \tilde{K}) - \Lambda = \chi \phi, \\ -\frac{1}{c^2 a^4} (\dot{a}^2 + 2 a \ddot{a} + c^2 \tilde{K}) + \frac{\Lambda}{a^2} = \chi \psi, \end{cases}$$

che riscriviamo nella forma

$$\begin{cases} \dot{a}^2 = c^2 \left[\frac{1}{3} a^2 (\Lambda + \chi \phi) - \tilde{K} \right], \\ 2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + c^2 \tilde{K} = c^2 a^2 (\Lambda - \chi \psi a^2). \end{cases}$$

Sostituiamo la prima equazione nella seconda:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{a}^2 = c^2 \left[\frac{1}{3} a^2 (\Lambda + \chi \phi) - \tilde{K} \right] \\ 2a\ddot{a} + c^2 \left[\frac{1}{3} a^2 (\Lambda + \chi \phi) - \tilde{K} \right] + c^2 \tilde{K} = c^2 a^2 (\Lambda - \chi \psi a^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{a}^2 = c^2 \left[\frac{1}{3} a^2 (\Lambda + \chi \phi) - \tilde{K} \right] \\ 2a\ddot{a} + \frac{1}{3} c^2 a^2 (\Lambda + \chi \phi) = c^2 a^2 (\Lambda - \chi \psi a^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{a}^2 = c^2 \left[\frac{1}{3} a^2 (\Lambda + \chi \phi) - \tilde{K} \right] \\ \ddot{a} = \frac{1}{2} c^2 a \left[\frac{2}{3} \Lambda - \chi (\psi a^2 + \frac{1}{3} \phi) \right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3.8) \\ (3.9) \end{cases}$$

(iii) Con la derivazione della (3.8) si trae

$$\begin{aligned} \frac{2\dot{a}\ddot{a}}{c^2} &= \frac{2}{3} a\dot{a}(\Lambda + \chi \phi) + \frac{1}{3} a^2 \chi \dot{\phi} \implies \frac{2\dot{a}}{c^2} = \frac{2}{3} a(\Lambda + \chi \phi) + \frac{1}{3} a^2 \chi \frac{\dot{\phi}}{\dot{a}}. \\ (3.6) \implies \frac{1}{3} \frac{a}{\dot{a}} \dot{\phi} &= -(\phi + a^2 \psi) \implies \frac{2\dot{a}}{c^2} = \frac{2}{3} a(\Lambda + \chi \phi) - a\chi(\phi + a^2 \psi) \\ \implies (3.9). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Questo teorema stabilisce le equazioni dinamiche relativistiche di un Universo isotropo valide per qualsunque tensore energia-impulso (isotropo) del fluido cosmico.

3.2 Secondo postulato dinamico: fluido cosmico perfetto

Questo postulato serve a specificare le funzioni caratteristiche ϕ e ψ del tensore energetico.

Secondo postulato dinamico. *Il fluido cosmico è un **fluido perfetto** con tensore energia-impulso*

$$(3.10) \quad T^{\alpha\beta} = c^{-2} (\varepsilon + p) V^\alpha V^\beta + p g^{\alpha\beta}$$

dove V^α è la **velocità assoluta** del fluido soddisfacente all'equazione di normalizzazione

$$g_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta = -c^2,$$

e dove $\varepsilon(t)$ è la **densità di energia** e $p(t)$ è la **pressione cinetica**.

Le dimensioni degli elementi coinvolti nelle equazioni di Einstein sono riportati in questa tabella (si vedano anche le tabelle del paragrafo 1.9),

Oggetto	Dim	Note
Λ	L^{-2}	[a]
$\chi T^{\alpha\beta}$	L^{-2}	[a]
$T^{\alpha\beta}$	$ML^{-1}T^{-2}$	[b]
χ	$M^{-1}L^{-1}T^2$	[c]
G_N	ML^3T^{-2}	[d]
p	$ML^{-1}T^{-2}$	(1.35)
ε	$ML^{-1}T^{-2}$	(1.35)

[a] In accordo con le convenzioni stabilite le coordinate q^α sono L-dimensionali, quindi le componenti $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ del tensore metrico sono adimensionali e quindi $\text{Dim}(R^{\alpha\beta}) = \text{Dim}(R) = L^{-2}$. Pertanto dalle equazioni di Einstein segue che $\text{Dim}(\Lambda) = \text{Dim}(\chi T^{\alpha\beta}) = L^{-2}$.

[b] Le equazioni (3.15) mostrano che $\text{Dim}(T^{00}) = \text{Dim}(\varepsilon)$ e $\text{Dim}(T^{ab}) = \text{Dim}(p)$. Dalla tabella 1.35 segue che

$$\text{Dim}(\varepsilon) = \text{Dim}(p) = ML^{-1}T^{-2}.$$

[c] $\text{Dim}(\chi) = \text{Dim}(\chi T^{\alpha\beta}) / \text{Dim}(T^{\alpha\beta}) = L^{-2} / (ML^{-1}T^{-2})$.

[d] $\text{Dim}(\chi) = L^{-4}T^4 \cdot \text{Dim}(G_N) \implies$
 $\text{Dim}(G_N) = \text{Dim}(\chi) L^4 T^{-4} = M^{-1}L^{-1}T^2 L^4 T^{-4} = M^{-1}L^3 T^{-2}$.

Teorema 3.2.1 – Con un tensore di energia del tipo (3.10) le equazioni dinamiche (3.8), (3.9) e l'equazione di conservazione (3.6) diventano rispettivamente

$$(3.12) \quad \boxed{\frac{\dot{a}^2}{c^2} = \frac{1}{3} a^2 (\Lambda + \chi \varepsilon) - \tilde{K}}$$

$$(3.13) \quad \boxed{\frac{\ddot{a}}{c^2} = \frac{1}{2} a \left[\frac{2}{3} \Lambda - \chi \left(p + \frac{1}{3} \varepsilon \right) \right]}$$

$$(3.14) \quad \boxed{a \dot{\varepsilon} + 3(\varepsilon + p) \dot{a} = 0} \iff \boxed{(\varepsilon a^3)^{\cdot} = -3a^2 \dot{a} p}$$

Dimostrazione. la velocità assoluta del fluido cosmico è data dalla (2.35). Quindi dalla definizione (3.10) segue

$$(3.15) \quad \boxed{T^{00} = \varepsilon, \quad T^{a0} = 0, \quad T^{ab} = p g^{ab} = p a^{-2} \tilde{g}^{ab}}$$

Il confronto con le (3.5) mostra che le funzioni caratteristiche sono

$$(3.16) \quad \phi = \varepsilon(t), \quad \psi = a^{-2}(t) p(t).$$

Applichiamo quindi il Teorema 3.1.1. ■

Nota 3.2.1 – Le equazioni (3.12)-(3.13) sono in letteratura riferite o attribuite a Friedmann e Lemaître. Il paragrafo 3.4 è dedicato ad una discussione dettagliata su questo argomento. •

3.3 Terzo postulato dinamico: equazioni di stato

Le tre equazioni dinamiche (3.12), (3.13) e (3.14) sono equivalenti a due equazioni indipendenti coinvolgenti tre funzioni incognite: $a(t)$, $\varepsilon(t)$ e $p(t)$. Quindi, per rendere autoconsistente il modello sono necessarie ulteriori equazioni rappresentanti le caratteristiche fisiche del fluido cosmico.

Terzo postulato dinamico. (i) *Tutte le componenti del fluido cosmico hanno una loro propria densità ε_i che, con la loro somma, contribuiscono a formare una densità di energia totale $\varepsilon(t)$*

$$(3.17) \quad \boxed{\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i}$$

(ii) *Ogni componente ε_i genera una pressione p_i ad essa proporzionale secondo una equazione di stato*

$$(3.18) \quad \boxed{p_i = w_i \varepsilon_i}$$

dove la costante adimensionale w_i è chiamata parametro di stato della componente i .

Continua nella pagina seguente

(iii) La **pressione interna totale** è la somma di tutte le pressioni generate dalle componenti

$$(3.19) \quad p = \sum_i p_i$$

(iv) Ogni coppia (ε_i, p_i) soddisfa all'equazione di conservazione (3.14)

$$(\varepsilon_i a^3)^\cdot + 3 a^2 \dot{a} p_i = 0$$

Tutte queste equazioni sono supportate da argomentazioni comunemente accettate e riportate nei testi di astrofisica.

Nota 3.3.1 – Si ricordi che p e ε hanno la stessa dimensione: $\text{Dim}(\varepsilon) = \text{Dim}(p) = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$. Quindi le costanti w_i sono adimensionali. •

Teorema 3.3.1 – Ogni componente ε_i evolve nel tempo secondo la legge

$$(3.20) \quad \varepsilon_i(t) = \frac{\varepsilon_i(t_\#)}{a^{3(1+w_i)}(t, t_\#)}$$

$$\begin{aligned} \text{Dimostrazione. } (\varepsilon_i a^3)^\cdot + 3 a^2 \dot{a} p_i = 0 &\iff (\varepsilon_i a^2 a)^\cdot + 3 a^2 \dot{a} w_i \varepsilon_i = 0 \\ &\iff (\varepsilon_i a^2)^\cdot a + \varepsilon_i a^2 \dot{a} + 3 a^2 \dot{a} w_i \varepsilon_i = 0 \iff (\varepsilon_i a^2)^\cdot a + \varepsilon_i a^2 \dot{a} (1 + 3 w_i) = 0 \\ &\iff \frac{(\varepsilon_i a^2)^\cdot}{\varepsilon_i a^2} + (1 + 3 w_i) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \\ &\iff \log(\varepsilon_i a^2) + \log a^{1+3 w_i} = \log k \quad (k = \text{costante}) \\ &\iff \varepsilon_i a^{3(1+w_i)} = k \iff \varepsilon_i(t) = \frac{k}{a^{3(1+w_i)}(t, t_\#)}. \end{aligned}$$

Valutazione in $t = t_\#$: $k = \varepsilon(t_\#)$. ■

Nota 3.3.2 – È un utile esercizio verificare che l'equazione (3.20) non dipende dalla scelta del tempo di riferimento:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(t) = \frac{\varepsilon_i(t_\#)}{a(t, t_\#)}, t = t_b &\implies \varepsilon_i(t_b) = \frac{\varepsilon_i(t_\#)}{a(t_b, t_\#)} [\dagger] \\ \implies \varepsilon_i(t) = \frac{\varepsilon_i(t_\#)}{a(t, t_\#)} &= \frac{\varepsilon_i(t_\#)}{a(t, t_b) a(t_b, t_\#)} = [\dagger] \frac{\varepsilon_i(t_b)}{a(t, t_b)}. \quad \bullet \end{aligned}$$

3.4 Sulle equazioni di Friedmann e di Lemaître

Le equazioni di Friedman e Lemaître sono le più citate equazioni nei testi di cosmologia, dove però appaiono scritte in varie forme, che non solo differiscono per le notazioni ma che talvolta non risultano equivalenti fra loro.

Per evitare confusioni, per quel che riguarda le **equazioni di Friedmann** ci si dovrebbe riferire alle equazioni dinamiche che appaiono nel lavoro originale [8] *Über die Krümmung des Raumes* di A. Friedmann (1922). Sono scritte esattamente così:

$$(3.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} (4) \quad \frac{R'^2}{R^2} + \frac{2RR''}{R^2} + \frac{c^2}{R^2} - \lambda = 0 \\ (5) \quad \frac{3R'^2}{R^2} + \frac{3c^2}{R^2} - \lambda = \varkappa c^2 \rho \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} R' = \frac{dR}{dx_4}, \\ R'' = \frac{d^2R}{dx_4^2}. \end{array} \right.$$

dove ρ è dichiarata essere una densità di massa e \varkappa *eine Konstante*. La coordinata x_4 è tempo-dimensionale e la segnatura della metrica è $(---+)$. Queste equazioni provengono dalle equazioni di campo di Einstein¹

$$(A) \quad R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \bar{R} + \lambda g_{ik} = -\varkappa T_{ik}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{R} = g^{ik} R_{ik} \\ T_{ik} = 0, \quad i, k \neq 4 \\ T_{44} = c^2 \rho g_{44} \end{array} \right.$$

con $i = k = 1, 2, 3$ e con $i = k = 4$, rispettivamente. Guardando alle componenti del tensore di energia si osserva che

- (i) *Friedman tiene conto della costante cosmologica,*
- (ii) *Friedman considera il modello 'polvere' per il fluido galattico (la pressione cinetica p non è presente).*
- (iii) *Friedman considera positiva la curvatura spaziale.*

Nel nostro approccio abbiamo visto che le equazioni di Einstein conseguenti al tensore di energia (3.15) si riducono alle equazioni differenziali (3.12)-(3.13),

$$(3.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{a}^2}{c^2} = \frac{1}{3} a^2 (\Lambda + \varkappa \varepsilon) - K_{\sharp}, \\ \frac{\ddot{a}}{c^2} = \frac{1}{2} a \left[\frac{2}{3} \Lambda - \varkappa \left(p + \frac{1}{3} \varepsilon \right) \right]. \end{array} \right.$$

Confrontiamo queste equazioni con le equazioni di Friedman (3.21). Per far questo le riscriviamo nella forma

$$(3.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} [4] \quad 2RR'' + R'^2 + c^2 - \lambda R^2 = 0, \\ [5] \quad R'^2 + c^2 - \frac{1}{3} (\lambda + \varkappa c^2 \rho) R^2 = 0, \end{array} \right.$$

¹ Il confronto con le nostre equazioni di Einstein $R^{\alpha\beta} + (\Lambda - \frac{1}{2}R) g^{\alpha\beta} = \varkappa T^{\alpha\beta}$ mostra una differenza di segno nel secondo membro. Ciò è dovuto alla diversa segnatura della metrica.

Sottraiamo membro a membro [4] – [5]:

$$2RR'' - \lambda R^2 + \frac{1}{3} (\lambda + \varkappa c^2 \rho) R^2 = 0.$$

Poiché $R \neq 0$, si trae $2R'' - \frac{2}{3} \lambda R + \frac{1}{3} \varkappa c^2 \rho R = 0$, cioè

$$(3.24) \quad R'' = \frac{1}{6} R (2\lambda - \varkappa c^2 \rho).$$

Se in (3.24) si pone

$$(3.25) \quad \begin{cases} dx_4 = dt \\ R = a \end{cases} \quad \begin{cases} R' = \dot{a} \\ R'' = \ddot{a} \end{cases}$$

si ricava l'equazione $\ddot{a} = \frac{1}{6} a (2\lambda - \varkappa c^2 \rho)$ che coincide con la seconda equazione (3.22) con $p = 0$,

$$\frac{\ddot{a}}{c^2} = \frac{1}{6} a (2\Lambda - \chi \varepsilon)$$

purché sia $2\lambda - \varkappa c^2 \rho = c^2 (2\Lambda - \chi \varepsilon)$, cioè

$$(3.26) \quad \lambda = c^2 \Lambda, \quad \varkappa \rho = \chi \varepsilon.$$

A sua volta, con le sostituzioni (3.25), la seconda equazione [5] in (3.23) diventa

$$\dot{a}^2 = \frac{1}{3} (\lambda + \varkappa c^2 \rho) a^2 - c^2.$$

Stante la (3.26), $\dot{a}^2 = \frac{1}{3} c^2 a^2 (\Lambda + \chi \varepsilon) - c^2$, questa equazione coincide con la nostra prima equazione (3.22)

$$\frac{\dot{a}^2}{c^2} = \frac{1}{3} a^2 (\Lambda + \chi \varepsilon) - K_{\sharp}$$

purché sia $K_{\sharp} = 1$. Questo prova l'item (iii).

Per quel che riguarda le **equazioni di Lemaître** il riferimento principale è l'articolo [10] *Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques* (1927), dove le equazioni di campo gravitazionali sono presentate (senza dimostrazione) nella forma

$$(3.27) \quad \boxed{\begin{cases} (2) & 3 \frac{R'^2}{R^2} + \frac{3}{R^2} = \lambda + \varkappa \rho \\ (3) & 2 \frac{R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2} + \frac{1}{R^2} = \lambda - \varkappa \rho \end{cases}} \quad ', = \frac{d}{dt},$$

dove λ è la costante cosmologica, \varkappa è la 'costante di Einstein', ρ è la densità della 'energia totale' e dove R è *le rayon de l'espace*.

Viene poi introdotta una terza equazione,

$$(3.28) \quad (4) \quad \frac{d\rho}{dt} + 3 \frac{R'}{R} (\rho + p) = 0$$

dove p è la densità dell'energia radiante. Questa equazione è dichiarata (senza dimostrazione) essere equivalente alle quattro equazioni di conservazione del tensore energia momento. Essa è in pieno accordo con la legge di conservazione (3.14) $a\dot{\epsilon} + 3(\epsilon + p)\dot{a} = 0$ ponendo $\rho = \epsilon$ e $R = a$. Quindi il *rayon de l'espace* R di Lemaître è in realtà il fattore di scala a , che è una grandezza adimensionale. Ne consegue che i primi membri delle equazioni di Lemaître (2) e (3) sono incongruenti dal punto di vista dimensionale, per cui diventa difficile esaminare la loro connessione con le nostre equazioni dinamiche (3.12)-(3.13). In effetti, molte delle equazioni scritte da Lemaître soffrono di questa incongruenza, specialmente dovuta all'assenza della velocità della luce, probabilmente posta uguale a 1. Un esempio è dato dall'equazione di un raggio luminoso

$$(20) \quad \sigma_2 - \sigma_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{R}$$

dove il primo membro ha la dimensione di una lunghezza perché è inteso essere la differenza di due posizioni nello spazio, mentre il secondo membro è un tempo (se R è adimensionale). Questa equazione è l'archetipo della nostra equazione (5.2), paragrafo 5.2,

$$d_{AB}(t_{\#}) = c \int_{t_{eA}}^{t_{rB}} \frac{dt}{a(t, t_{\#})}$$

che fornisce la distanza $d_{AB}(t_{\#})$ di due corpi cosmici A e B nello spazio di riferimento $S_{t_{\#}}$, essendo t_{eA} il tempo di emissione da A di un raggio luminoso e t_{rB} il tempo di ricezione da parte di B .

3.5 Quarto postulato dinamico: materia-radiazione

Dal terzo postulato e dal Teorema 3.3.1 si può iniziare un percorso verso la costruzione di **modelli dell'Universo a molte componenti**, peraltro tentato da qualche autore, ma senza chiari risultati. Con un quarto postulato restringiamo il nostro interesse ad un più semplice **modello a due componenti: materia e radiazione**.

Quarto postulato dinamico. (i) *Nell'Universo ci sono due densità di energia fondamentali:*

$$(3.29) \quad \boxed{\varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_r}$$

con due distinte proprietà caratteristiche:

(ii) *la densità di materia ε_m non genera pressione,*

$$(3.30) \quad \boxed{p_m(t) = 0 \quad (w_m = 0)}$$

(iii) *la densità di radiazione $\varepsilon_r(t)$ genera pressione,*

$$(3.31) \quad \boxed{p_r(t) = \frac{1}{3} \varepsilon_r(t) \quad (w_r = \frac{1}{3})}$$

(iv) *La densità di materia è a sua volta la somma*

$$(3.32) \quad \boxed{\varepsilon_m = \varepsilon_b + \varepsilon_c}$$

di una densità di energia barionica ε_b e di una densità di energia dovuta alla materia oscura fredda ε_c .

(v) *Esiste una data t_{eq} di pareggiamento materia-radiazione dove le due densità ε_m e ε_r hanno ugual valore*

$$(3.33) \quad \boxed{\varepsilon_m(t_{\text{eq}}) = \varepsilon_r(t_{\text{eq}})}$$

*Chiamiamo **modello materia-radiazione (modello MR)** il modello cosmologico fondato su questo postulato dinamico. **L'esistenza di un tempo t_{eq} di uguaglianza materia-radiazione giocherà un ruolo cruciale.***

Nota 3.5.1 – Oltre alle energie di massa e radiazione i cosmologi considerano la costante cosmologica Λ come rappresentativa di un terzo tipo di energia, l'**energia oscura**, che genera una pressione negativa all'interno del fluido cosmico. Nel nostro approccio non adottiamo questa interpretazione perché, in ottemperanza ai nostri postulati, Λ è una **costante universale** mentre le densità delle energie di materia e di radiazione dipendono dal tempo. •

In virtù della (3.20) le densità ε_m e ε_r evolvono nel tempo secondo le leggi

$$(3.34) \quad \boxed{\varepsilon_m(t) = \frac{\varepsilon_{m\#}}{a^3(t, t_{\#})}}$$

$$(3.35) \quad \boxed{\varepsilon_r(t) = \frac{\varepsilon_{r\#}}{a^4(t, t_{\#})}}$$

Di conseguenza, l'uguaglianza tra densità di materia e densità di radiazione (4.25) risulta equivalente a

$$(3.36) \quad \boxed{\varepsilon_{r\#} = a(t_{\text{eq}}, t_{\#}) \varepsilon_{m\#}}$$

In virtù delle equazioni (3.12), (3.29), (3.34) e (3.35) il fattore di scala $a(t, t_{\#})$ riferito ad un tempo generico $t_{\#}$ risulta governato dall'equazione dinamica

$$(3.37) \quad \boxed{\frac{\dot{a}^2(t, t_{\#})}{c^2} = \frac{1}{3} a^2(t, t_{\#}) \left[\Lambda + \frac{\chi \varepsilon_{m\#}}{a^3(t, t_{\#})} + \frac{\chi \varepsilon_{r\#}}{a^4(t, t_{\#})} \right] - K_{\#}}$$

Questa equazione può essere riscritta nella forma

$$(3.38) \quad \boxed{\frac{H(t)}{c^2} = \frac{1}{3} \left[\Lambda + \frac{\chi \varepsilon_{m\#}}{a^3(t, t_{\#})} + \frac{\chi \varepsilon_{r\#}}{a^4(t, t_{\#})} \right] - \frac{K_{\#}}{a^2(t, t_{\#})}}$$

Per $t = t_{\#}$ otteniamo la curvatura spaziale $K_{\#} = K(t_{\#})$ al tempo di riferimento espressa in termini delle densità valutate in $t_{\#}$:

$$(3.39) \quad \boxed{K_{\#} = \frac{1}{3} \left[\Lambda + \chi (\varepsilon_{m\#} + \varepsilon_{r\#}) \right] - \frac{H_{\#}^2}{c^2}}$$

3.6 Equazioni dinamiche del modello MR

Fin qui il fattore di scala è stato riferito ad un tempo generico $t_{\#}$. Tuttavia, dobbiamo tener conto che le stime delle varie entità cosmologiche possono essere dedotte da osservazioni e misure effettuate nell'epoca attuale solamente, e che è da queste stime nel 'presente' che noi dobbiamo dedurre l'evoluzione dell'Universo nel 'passato' e nel 'futuro'.

Per questo motivo d'ora in avanti considereremo il **tempo presente** t_0 come tempo di riferimento.

Gli astronomi sono in grado di misurare i seguenti **parametri cosmologici**:

$$(3.40) \quad \text{energia oscura, } \Omega_\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{3} \frac{c^2}{H_0^2} \Lambda \iff \Lambda = \frac{3H_0^2}{c^2} \Omega_\Lambda,$$

$$(3.41) \quad \text{materia, } \Omega_m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{3} \frac{c^2}{H_0^2} \chi \varepsilon_{m0} \iff \chi \varepsilon_{m0} = \frac{3H_0^2}{c^2} \Omega_m,$$

$$(3.42) \quad \text{radiazione, } \Omega_r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{3} \frac{c^2}{H_0^2} \chi \varepsilon_{r0} \iff \chi \varepsilon_{r0} = \frac{3H_0^2}{c^2} \Omega_r,$$

$$(3.43) \quad \text{curvatura, } \Omega_K \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_\Lambda - \Omega_m - 1.$$

Questi parametri sono tutti *adimensionali*.² Dalla (3.37) e dalla (3.39) segue che

Teorema 3.6.1 – *Nel modello MR l'evoluzione del fattore di scala $a(t, t_0)$ con tempo di riferimento t_0 è governata dall'equazione*

$$(3.44) \quad \boxed{\dot{a}^2 = H_0^2 \left[\Omega_\Lambda a^2 + \Omega_m a^{-1} + \Omega_r a^{-2} \right] - c^2 K_0}$$

dove H_0 e K_0 sono i valori attuali del fattore di Hubble e della curvatura spaziale, tra loro legate dall'equazione

$$(3.45) \quad \boxed{K_0 = \frac{H_0^2}{c^2} (\Omega_\Lambda + \Omega_m + \Omega_r - 1)}$$

Nota 3.6.1 – In virtù della (3.45) l'equazione dinamica (3.44) assume la forma alternativa

$$(3.46) \quad \boxed{\dot{a}^2 = H_0^2 \left[1 + \Omega_\Lambda (a^2 - 1) + \Omega_m (a^{-1} - 1) + \Omega_r (a^{-2} - 1) \right]}$$

Questa forma ha il grande vantaggio di non coinvolgere direttamente la curvatura spaziale K_0 che, secondo le attuali misurazioni, risulta talmente 'piccola' da essere addirittura ritenuta nulla (vedi paragrafo 3.8). •

3.7 Relazione tra le densità di materia e radiazione

L'esistenza di un tempo t_{eq} in cui le densità di materia e radiazione hanno ugual valore, 4° postulato dinamico, punto (v), gioca un ruolo cruciale nell'analisi teorica e numerica del modello MR.

² In [4], p.37, Ω_K è definito col segno opposto.

Teorema 3.7.1 – I valori dei parametri cosmologici Ω_r e Ω_m sono legati dall'equazione

$$(3.47) \quad \boxed{\Omega_r = a_{\text{eq}} \Omega_m = \frac{\Omega_m}{1 + z_{\text{eq}}}}$$

dove

$$(3.48) \quad \boxed{a_{\text{eq}} \stackrel{\text{def}}{=} a(t_{\text{eq}}, t_0) = \frac{1}{1 + z_{\text{eq}}}}$$

è il fattore di scala al tempo t_{eq} e z_{eq} il corrispondente redshift.

Dimostrazione. Come si vedrà nel paragrafo 6.1, il redshift z è legato al tempo t (interpretato come tempo di emissione) dall'equazione (6.7)

$$(3.49) \quad \frac{1}{a(t, t_0)} = 1 + z.$$

In virtù delle (3.41) e (3.42),

$$\Omega_m = \frac{1}{3} \frac{c^2}{H_0^2} \chi \varepsilon_{m0}, \quad \Omega_r = \frac{1}{3} \frac{c^2}{H_0^2} \chi \varepsilon_{r0},$$

segue che

$$\frac{\Omega_r}{\Omega_m} = \frac{\varepsilon_r(t_0)}{\varepsilon_m(t_0)} = a_{\text{eq}}. \quad \blacksquare$$

Una rimarchevole conseguenza dell'equazione (3.47) è che

Teorema 3.7.2 – Nel modello *MR* l'evoluzione del fattore di scala con tempo di riferimento t_0 è governata dall'equazione dinamica

$$(3.50) \quad \boxed{\dot{a}^2 = H_0^2 \left[1 + \Omega_\Lambda (a^2 - 1) + \Omega_m \left(a^{-1} - 1 + \frac{a^{-2} - 1}{1 + z_{\text{eq}}} \right) \right]}$$

dove intervengono solo i **quattro dati primari**:

$$(3.51) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_0 \quad \text{valore attuale fattore di Hubble,} \\ \Omega_\Lambda \quad \text{parametro di energia oscura,} \\ \Omega_m \quad \text{parametro di energia di materia,} \\ z_{\text{eq}} \quad \text{redshift corrispondente al tempo } t_{\text{eq}}. \end{array} \right.$$

Infatti, grazie alla (3.47) l'equazione dinamica (3.46) si trasforma nella (3.50).

Come si è detto nella Prefazione, verso la fine degli anni '90 venne trovato un accordo chiamato **concordance cosmology** con il quale veniva fondato il **Λ CDM – Lambda Cold Dark Matter model**, brevemente chiamato **modello standard**, le cui equazioni dinamiche

$$(3.52) \quad \dot{a}^2 = H_0^2 \left[\Omega_\Lambda a^{2-3(1+w)} + (\Omega_b + \Omega_c) a^{-1} + \Omega_r a^{-2} + \Omega_K \right]$$

coinvolgono cinque costanti:

$$\left\{ \begin{array}{l} w \quad \text{parametro dell'equazione di stato dell'energia oscura,} \\ \Omega_b \quad \text{parametro di densità barionica,} \\ \Omega_c \quad \text{parametro di materia oscura (fredda),} \\ \Omega_r \quad \text{parametro di densità di radiazione,} \\ \Omega_K \quad \text{parametro di curvatura.} \end{array} \right.$$

Ponendo

$$(3.53) \quad \left\{ \begin{array}{l} w = -1 \\ \Omega_b + \Omega_c = \Omega_m \\ H_0^2 \Omega_K = -c^2 K_0 \end{array} \right.$$

troviamo l'equazione (3.44), e ricadiamo nel modello MR. Tuttavia,

Il modello MR non può essere considerato come caso speciale del modello standard per le seguenti ragioni:

1. Il modello MR è basato su postulati chiaramente espressi in termini matematici.
2. Il modello MR richiede la conoscenza di soli quattro dati primari (3.51).
3. Nel modello MR la curvatura spaziale è positiva (Teorema 3.8.1, paragrafo 4.2).
4. Le stime di altre rilevanti entità cosmologiche che sono deducibili dai quattro dati primari sono in ottimo accordo con quelle ottenute dai dati osservazionali più recenti.
5. La curva del fattore di scala $a(t)$, di cui si riesce a dare una semplice espressione analitico-numerica (paragrafi 4.7 e 4.9), collima ottimamente con il profilo esposto da Riess nella sua Nobel lecture [18].

3.8 Il problema della curvatura spaziale

Secondo i dati osservazionali più recenti il parametro di curvatura (3.43) Ω_K risulta avere un valore talmente piccolo che si è portati a concludere che *l'Univer-*

so (spaziale) è piatto. Una tale conclusione, tuttavia, può essere erronea. Sappiamo infatti dalla matematica più elementare che in una equazione dinamica porre uguale a zero un piccolo parametro può cambiare completamente la tipologia delle soluzioni.

Del resto, un esempio illuminante di questo fraintendimento è dato dallo storico dibattito sulla costante cosmologica Λ . Poiché il suo valore è in effetti molto piccolo, per anni e anni si è ritenuto di poterlo trascurare e quindi di ometterlo dalle equazioni di Einstein.³ Solo recentemente si è finalmente capito che, anche se di valore molto piccolo, Λ causa in tempi lunghi un'accelerazione della crescita del fattore di scala. Nel paragrafo 4.15 di questo capitolo si esaminano le rilevanti diversità comportamentali tra i modelli con $\Lambda \neq 0$ e quelli con $\Lambda = 0$.

In ogni caso, una prima risposta al problema della curvatura nel modello MR è data dal seguente teorema:

Teorema 3.8.1 – *Nel modello MR la curvatura spaziale non può essere nulla.*

Dimostrazione. Prima parte. I parametri cosmologici definiti nella (3.41) e nella (3.42) s'intendono misurati all'epoca presente. Sono definiti in maniera simile quando misurati in una data generica t , vale a dire

$$\Omega_m(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{3} \frac{c^2}{H^2(t)} \chi \varepsilon_m(t), \quad \Omega_r(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{3} \frac{c^2}{H^2(t)} \chi \varepsilon_r(t).$$

D'altra parte, scegliendo t_0 come tempo di riferimento, le equazioni (3.34) e (3.35) diventano

$$\varepsilon_m(t) = \frac{\varepsilon_m(t_0)}{a^3(t)}, \quad \varepsilon_r(t) = \frac{\varepsilon_r(t_0)}{a^4(t)},$$

per cui si ha

$$\Omega_m(t) = \frac{1}{3} \frac{c^2}{H^2(t)} \chi \frac{\varepsilon_m(t_0)}{a^3(t)}, \quad \Omega_r(t) = \frac{1}{3} \frac{c^2}{H^2(t)} \chi \frac{\varepsilon_r(t_0)}{a^4(t)}.$$

Siccome, vedi ancora la (3.41) e la (3.42),

$$\chi \varepsilon_{m0} = \frac{3H_0^2}{c^2} \Omega_m, \quad \chi \varepsilon_{r0} = \frac{3H_0^2}{c^2} \Omega_r,$$

segue

$$\Omega_m(t) = \frac{H_0^2}{H^2(t)} \frac{1}{a^3(t)} \Omega_m, \quad \Omega_r(t) = \frac{H_0^2}{H^2(t)} \frac{1}{a^4(t)} \Omega_r,$$

e di qui l'uguaglianza

$$(3.54) \quad \Omega_m(t) + \Omega_r(t) = \frac{H_0^2}{H^2(t)} \left(\frac{\Omega_m(t_0)}{a^3(t, t_0)} + \frac{\Omega_r(t_0)}{a^4(t, t_0)} \right).$$

³ Una tale omissione è comunque un'operazione incompatibile con gli stessi principi della relatività generale che implicano l'esistenza di questa costante.

Seconda parte. Sia per ipotesi $K_0 = 0$. Allora, per la (3.45) abbiamo

$$\Omega_\Lambda + \Omega_m + \Omega_r = 1.$$

In questa equazione i parametri cosmologici Ω_m e Ω_r sono riferiti all'epoca presente t_0 , quindi si dovrebbe scrivere

$$(3.55) \quad \Omega_\Lambda + \Omega_m(t_0) + \Omega_r(t_0) = 1.$$

Non si scrive $\Omega_\Lambda(t_0)$ perché Λ è, per postulato, una *costante universale* indipendente da t . Va anche osservato che *questa equazione deve essere indipendente dal fattore di scala cioè dal tipo di evoluzione dell'Universo*. Inoltre, per il teorema della permanenza del segno della curvatura (paragrafo 1.5) questa è nulla in ogni tempo. Quindi la (3.55) è valida in ogni tempo. Segue che la somma

$$\Omega_m(t) + \Omega_r(t) = 1 - \Omega_\Lambda$$

non dipende dal tempo, qualunque sia l'evoluzione dell'Universo. Questo però è in contrasto con la conclusione della prima parte della dimostrazione, cioè con l'equazione (3.54) che mostra la dipendenza dal tempo di questa somma. L'ipotesi $K_0 = 0$ porta dunque ad un assurdo. ■

Nota 3.8.1 – La dimostrazione di questo teorema non richiede la conoscenza delle stime numeriche dei parametri cosmologici Ω . •

3.9 Equazione di Weierstrass

Un'**equazione di Weierstrass** è un'equazione differenziale del primo ordine del tipo⁴

$$(3.56) \quad \boxed{\dot{a}^2 = W(a)}$$

La funzione $W(a)$ è chiamata **funzione di Weierstrass**.

L'equazione dinamica del modello MR è un'equazione di Weierstrass. La funzione W assume le tre diverse forme (3.44), (3.46) e (3.50):

$$(3.57) \quad \boxed{\begin{aligned} W(a) &= H_0^2 \left[\Omega_\Lambda a^2 + \Omega_m a^{-1} + \Omega_r a^{-2} \right] - c^2 K_0 \\ W(a) &= H_0^2 \left[1 + \Omega_\Lambda (a^2 - 1) + \Omega_m (a^{-1} - 1) + \Omega_r (a^{-2} - 1) \right] \\ W(a) &= H_0^2 \left[1 + \Omega_\Lambda (a^2 - 1) + \Omega_m \left(a^{-1} - 1 + \frac{a^{-2} - 1}{1 + z_{\text{eq}}} \right) \right] \end{aligned}}$$

⁴ Si veda [11] e anche *Weierstrass collected works*, V.II.

La peculiarità di una equazione di W è che, anche se non siamo capaci di risolverla, possiamo dedurre le principali proprietà delle soluzioni dall'analisi della funzione $W(a)$ ovvero del suo grafico nel piano $x = a$, $y = \dot{a}^2$. Per far questo dobbiamo interpretare una soluzione $a(t)$ come moto di un punto sull'asse a . Poiché il primo membro dell'equazione (3.56) non è mai negativo, questo moto può aver luogo solo negli intervalli dell'asse a dove $W(a)$ non è negativa. Questi intervalli sono delimitati dagli **zeri** di $W(a)$, soluzioni dell'equazione $W(a) = 0$, cioè dai punti dove il suo grafico tocca o attraversa l'asse a . Si noti che uno zero a_* di $W(a)$ è un **punto di arresto** perché $W(a_*) = 0$ equivale a $\dot{a} = 0$ per $a = a_*$. La ricerca degli eventuali zeri ha quindi carattere prioritario.

Uno zero dove $W'(a_*) \neq 0$ si dice **zero semplice**.⁵ Uno zero dove invece è $W'(a_*) = 0$ si dice **zero multiplo**. Questi due tipi di zeri hanno proprietà del tutto diverse.⁶

1 Uno zero semplice a_* è un **punto di inversione** nel senso che *se il punto virtuale si muove verso uno zero semplice a_* allora lo raggiunge in un tempo finito, lì si arresta per poi ripartire in direzione opposta* (Figura 3.1).

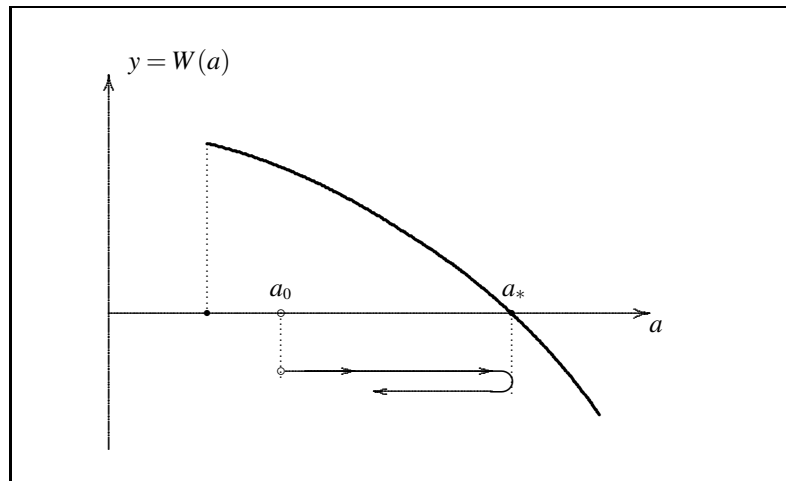


Figura 3.1: Zero semplice a_* come punto di inversione.

Il punto mobile raggiunge a_* e quindi torna indietro.

2 Uno zero multiplo è una **meta asintotica** nel senso che *se il punto virtuale si muove verso uno zero multiplo a_* , allora non si arresta mai né lo raggiunge mai* (Figura 3.2).

⁵ L'apice ' denota la derivata rispetto ad a .

⁶ Per maggiori dettagli si rimanda al paragrafo 3.12.

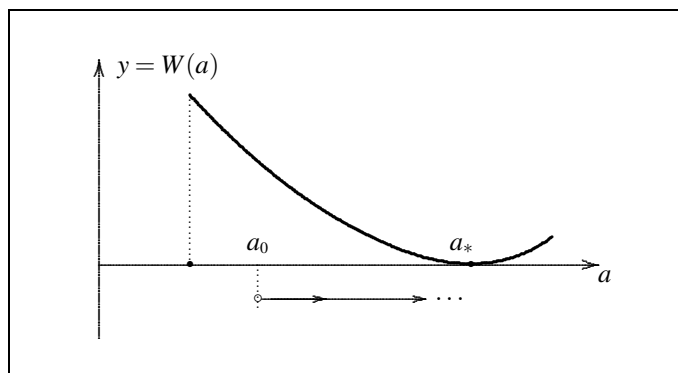


Figura 3.2: Zero multiplo come meta asintotica.

Il punto mobile non si arresta mai e non raggiunge mai a_* .

3 Si supponga che:

- (i) $W(a)$ sia positivo in un intervallo chiuso $[a_1, a_2]$;
- (3.58) (ii) il punto mobile si trovi nella posizione a_1 per $t = t_1$;
- (iii) $\dot{a}(t_1) > 0$, il punto si stia muovendo verso a_2 .

Allora la velocità $\dot{a}(t)$ resta positiva per $t > t_1$ e l'equazione di W. diventa equivalente a

$$dt = \frac{da}{\sqrt{W(a)}}.$$

Di conseguenza, la posizione a_2 viene raggiunta al tempo

$$(3.59) \quad t_2 = t_1 + \int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{W(x)}},$$

e l'integrale

$$(3.60) \quad \boxed{t_2 - t_1 = \int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{W(x)}}}$$

fornisce il tempo impiegato nel viaggio da a_1 ad a_2 .

3.10 Profili dell'Universo

Per **profilo dell'Universo** intendiamo il grafico del fattore di scala $a(t)$ sul piano coordinato (t, a) . Per i profili valgono le seguenti proprietà.

(i) Valendo la condizione di normalizzazione $a(t_{\#}, t_{\#}) = 1$, un profilo di $a(t, t_{\#})$ con tempo di riferimento $t_{\#}$ passa per il punto $(t_{\#}, 1)$.

(ii) Due profili che differiscono per una traslazione lungo l'asse t sono di fatto equivalenti.

(iii) Com'è esplicitamente stabilito dal Teorema 3.6.1, i profili corrispondenti alle funzioni $W(a)$ (3.57) hanno t_0 come tempo di riferimento, quindi passano per il punto $(t_0, 1)$.

(iv) Se un profilo parte dall'origine $t = 0$ con $a = 0$ allora, ponendo $t_1 = 0$ e $a_1 = 0$ nella (3.60), l'integrale

$$(3.61) \quad t(a) = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{W(x)}}$$

fornisce il tempo trascorso nella transizione dallo stato iniziale dell'Universo allo stato dove il fattore di scala ha un valore assegnato a . Di conseguenza, se t_0 (oggi) è il tempo di riferimento, la funzione $t(a)$ inversa della (3.61) fornisce il profilo della soluzione $a(t, t_0)$ dell'equazione di Weierstrass, cosicché ponendo $a = 1$ nell'integrale (3.61) si ottiene l'**età dell'Universo**:

$$(3.62) \quad t_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{W(x)}}$$

(v) Un profilo dell'Universo può passare per dei punti (t_*, a_*) di particolare interesse e importanza che chiamiamo **eventi cruciali**. Se si pone $a = a_*$ nell'integrale (3.61)

$$(3.63) \quad t_* = \int_0^{a_*} \frac{dx}{\sqrt{W(x)}}$$

si ottiene la data t_* dell'evento cruciale. Nel modello MR il profilo dell'Universo ha quattro eventi cruciali:

(3.64)

a_*	evento	t_*
1	stato odierno	t_0
a_{eq}	uguali densità di materia e radiazione	t_{eq}
a_q	accelerazione nulla del fattore di scala	t_q
a_{re}	reionizzazione	t_{re}

3.11 Profili qualitativi del modello MR

Le proprietà analitiche fondamentali della funzione di Weierstrass (3.44) sono:

$$\lim_{a \rightarrow 0} W(a) = +\infty, \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} W(a) = +\infty.$$

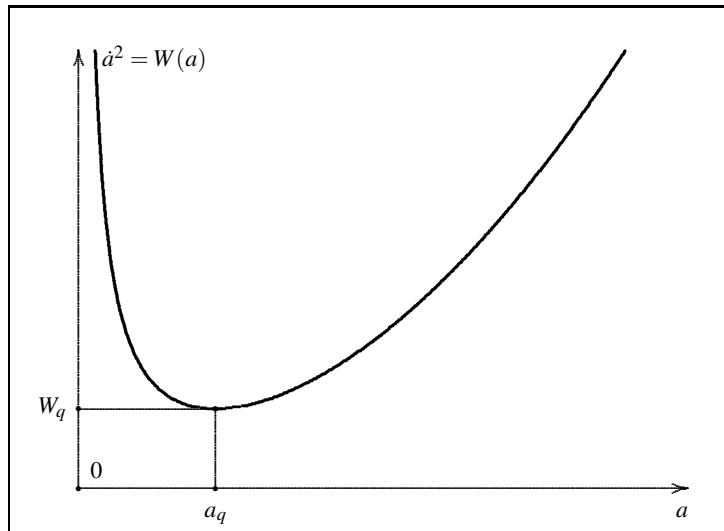


Figura 3.3: Grafico sommario della funzione di Weierstrass (3.44).

(3.65)
$$W'(a) = H_0^2 \left[2\Omega_\Lambda a - \Omega_m a^{-2} - 2\Omega_r a^{-3} \right],$$

(3.66)
$$W''(a) = H_0^2 \left[2\Omega_\Lambda + 2\Omega_m a^{-3} + 6\Omega_r a^{-4} \right].$$

La derivata seconda è ovunque positiva quindi $W(a)$ è una funzione convessa. Poiché la funzione $W(a)$ tende a $+\infty$ per $a \rightarrow 0$ e per $a \rightarrow +\infty$, essa ha un unico punto di minimo $a_q \neq 0$, radice dell'equazione $W'(a) = 0$ di quarto grado in a

$$(3.67) \quad \boxed{\Omega_\Lambda a^4 - \frac{1}{2}\Omega_m a - \Omega_r = 0}$$

dedotta dalla (3.65). Anche se non conosciamo i valori di a_q e di $W_q = W(a_q)$ possiamo comunque tracciare un grafico qualitativo sommario di $W(a)$ (Figura 3.3).

Derivando l'equazione $\dot{a}^2 = W(a)$ si trova l'equazione $2\dot{a}\ddot{a} = W'(a)\dot{a}$ la quale a sua volta, per $\dot{a} \neq 0$, fornisce l'equazione

$$(3.68) \quad 2\ddot{a} = W'(a).$$

Quest'ultima mostra che l'accelerazione \ddot{a} del fattore di scala si annulla in corrispondenza ad una radice di $W'(a)$. Per vari motivi i cosmologi hanno introdotto il **parametro di decelerazione** q definito da

$$(3.69) \quad q \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}$$

che si annulla quando $\ddot{a} = 0$. Questo giustifica la notazione a_q per la radice di $W'(a)$.

Nello studiare il grafico di $W(a)$ dobbiamo considerare due casi: $W_q > 0$ e $W_q < 0$.⁷ Il caso $W_q > 0$ è illustrato nella Figura 3.4 (parte superiore).

Siccome $W(a)$ è ovunque positiva, non ci sono zeri, nessun punto d'arresto. Di conseguenza $a(t)$ è sempre crescente (espansione) o sempre decrescente (contrazione). Consideriamo il primo caso solamente. Il punto di minimo segna la transizione tra un'espansione rallentata ed un'espansione accelerata (parte centrale della figura). Il profilo qualitativo è mostrato in basso dove in a_q si ha un **punto di flesso**, corrispondente ad un tempo t_q . Si noti che, in virtù della (3.57), $W_q > 0$ è soddisfatta per $K_0 \leq 0$.

⁷ Il caso $W_q = 0$ non è realistico perché corrisponderebbe ad una relazione predeterminata tra i parametri cosmologici espressa dall'equazione (3.67).

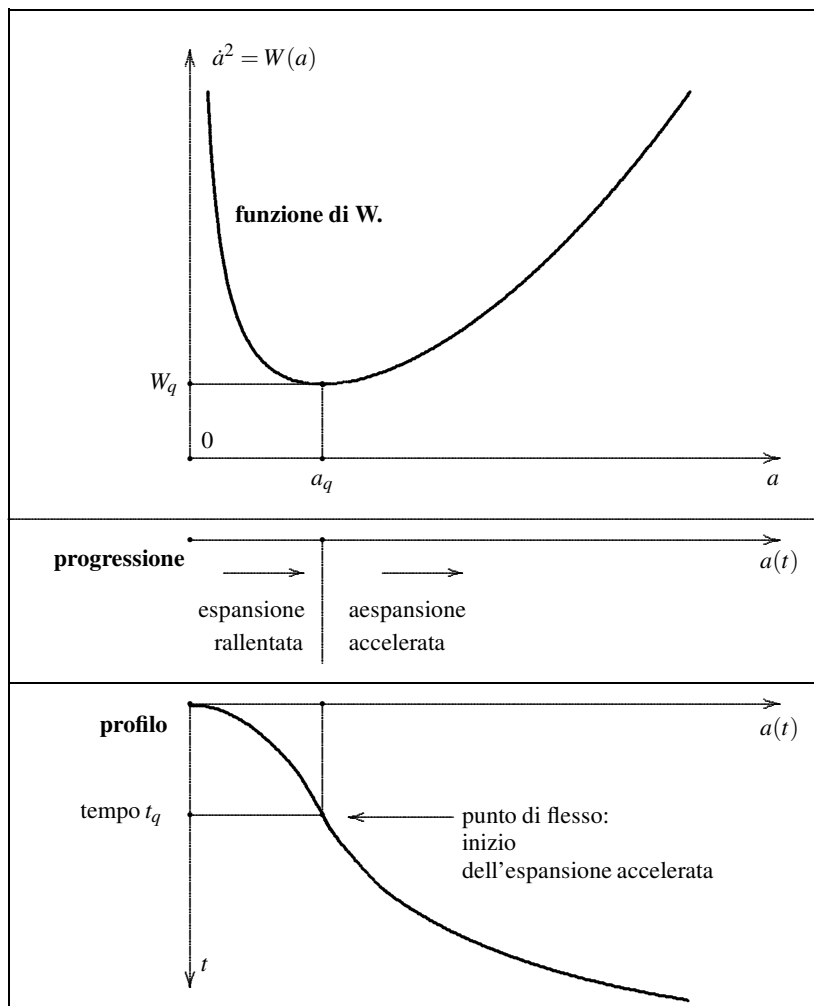


Figura 3.4: Profilo qualitativo dell'Universo nel caso $W_q > 0$.

Il caso $W_q < 0$ è illustrato nella Figura 3.5. Ci sono due zeri semplici, quindi di inversione, tra i quali $W(a)$ è negativa. Di conseguenza, abbiamo due possibili profili separati, esterni agli zeri, ognuno dei quali con due diversi orientamenti. A sinistra abbiamo un profilo **pseudo-cicloidale** con un big-bang e un big-crunch. A destra abbiamo un profilo, percorribile nei due versi, con $a(t)$ illimitato.

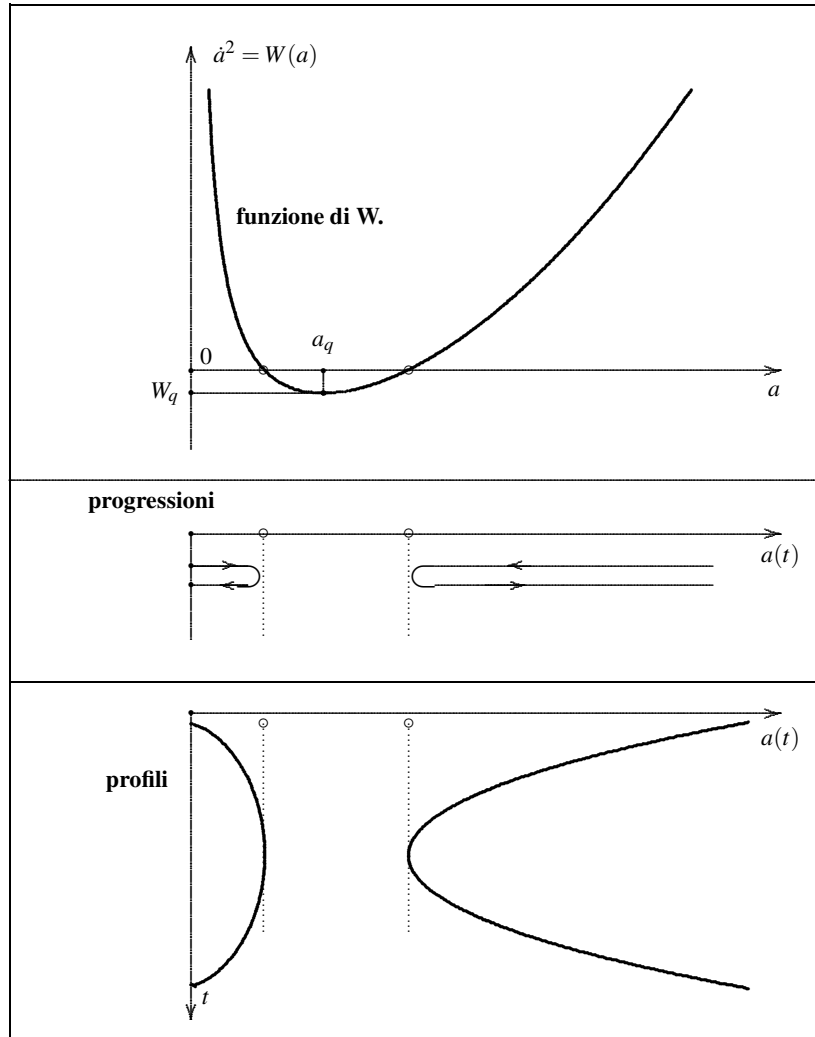


Figura 3.5: Profilo qualitativo dell'Universo nel caso $W_q < 0$.

3.12 Complementi sull'equazione di Weierstrass

1 Uno zero semplice a_* è un punto di inversione.

Dimostrazione. Poniamoci nel caso della Figura 3.1: $a_0 < a_*$. Il tempo impiegato nel percorso dalla posizione di partenza a_0 a quella di arrivo a_* è dato dall'integrale improprio

$$(3.70) \quad t_* - t_0 = \int_{a_0}^{a_*} \frac{da}{\sqrt{W(a)}} = \lim_{a \rightarrow a_*} \int_{a_0}^a \frac{da}{\sqrt{W(a)}}.$$

Poiché la funzione integranda è positiva per $a < a_*$, l'integrale da a_0 ad a è una funzione crescente di a . Si presentano quindi due possibilità: (i) il limite (3.70) è finito oppure (ii) è $+\infty$. Consideriamo lo sviluppo di Taylor di W nell'intorno sinistro dello zero a_*

$$W(a) = (a - a_*)W'(a_*) + \frac{1}{2}(a - a_*)^2 W''(a_*) + \dots$$

Per uno zero semplice è $W'(a_*) \neq 0$. Nel nostro caso $W'(a_*) < 0$, per cui possiamo scrivere

$$(3.71) \quad \begin{aligned} W(a) &= (a - a_*)W'(a_*) \left[1 + \frac{1}{2}(a - a_*) \frac{W''(a_*)}{W'(a_*)} + \dots \right] \\ &= f(a)g(a) \end{aligned}$$

dove, a sinistra di a_* , $f(a) \stackrel{\text{def}}{=} (a - a_*)W'(a_*)$ è una funzione positiva, mentre

$$g(a) \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{1}{2}(a - a_*) \frac{W''(a_*)}{W'(a_*)} + \dots$$

è limitata e positiva perché $\lim_{a \rightarrow a_*} g(a) = 1$. Applichiamo ora uno dei teoremi fondamentali riguardanti gli integrali impropri: (i) *L'integrale improprio*

$$(3.72) \quad \int_{x_0}^{x_*} \frac{dx}{(x_* - x)^p}, \quad p > 0,$$

converge se $p < 1$ e diverge se $p \geq 1$.⁸ (ii) *Lo stesso vale per l'integrale*

$$(3.73) \quad \int_{x_0}^{x_*} \frac{h(x)}{(x_* - x)^p} dx, \quad p > 0,$$

⁸ *Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} I(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{x_0}^x \frac{dz}{(a_* - z)^p} = \\ &\begin{cases} p = 1 : & - \left[\log(a_* - z) \right]_{x_0}^x = \log(x_* - x_0) - \log(x_* - x). \\ p \neq 1 : & - \frac{1}{1-p} \left[(x_* - z)^{1-p} \right]_{x_0}^x = \frac{1}{1-p} \left[(x_* - x_0)^{1-p} - (x_* - x)^{1-p} \right]. \end{cases} \end{aligned}$$

dove $h(x)$ è una funzione integrabile tale che $\lim_{x \rightarrow x_*} h(x) \neq 0$.

L'integrale (3.70) rientra in questo teorema per $p = \frac{1}{2}$ e

$$h(a) = \sqrt{|W'(a_*)|g(a)}.$$

Quindi è convergente. La derivata dell'equazione di Weierstrass (3.56) produce l'equazione $2\dot{a}\ddot{a} = W'(a)\dot{a}$. Per $\dot{a} \neq 0$ quest'equazione è equivalente a

$$(3.74) \quad 2\ddot{a} = W'(a).$$

Tuttavia, per continuità, quest'equazione è anche valida al limite $\dot{a} \rightarrow 0$, cosicché la (3.74) vale per ogni \dot{a} . Poiché $W'(a_*) \neq 0$, la (3.74) implica $\ddot{a} \neq 0$. Di conseguenza, quando il punto mobile raggiunge a_* se ne allontana subito perché in a_* la sua accelerazione non è nulla. Ma non può andare oltre a_* dove W diventa negativa. Così è costretto a tornare indietro. ■

2 Uno zero multiplo è una **meta asintotica**.

Dimostrazione. Poniamoci nel caso della Figura 3.2: il punto si muove verso lo zero a_* a partire da $a_0 < a_*$. Non si può fermare prima di a_* perché $W > 0$ in tutto l'intervallo $a_0 \leq a < a_*$. Il tempo d'arrivo in a_* è definito come nella (3.70). Ma ora è $W'(a_*) = 0$ e lo sviluppo di Taylor nell'intorno di a_* diventa

$$W(a) = \frac{1}{2}(a - a_*)^2 W''(a_*) + \frac{1}{6}(a - a_*)^3 W'''(a_*) + \dots$$

Tuttavia non possiamo escludere che sia $W''(a_*) = 0$, $W'''(a_*) = 0$, ecc. Quindi, se $q \geq 2$ è l'ordine della prima derivata non nulla in a_* , possiamo scrivere

$$W(a) = \frac{1}{q!}(a - a_*)^q W^{(q)}(a_*) + \frac{1}{(q+1)!}(a - a_*)^{q+1} W^{(q+1)}(a_*) + \dots$$

Con un ragionamento simile a quello svolto nella dimostrazione precedente relativa ad uno zero semplice, si giunge ad applicare il teorema sugli integrali propri enunciato sopra con $p = \frac{1}{2}q \geq 1$. In questo caso l'integrale (3.70) è divergente. ■

Altri casi.

$$\left\{ \begin{array}{l} p = 1 : \quad \lim_{x \rightarrow x_*} I(x) = +\infty. \\ p < 1 : \quad \lim_{x \rightarrow x_*} I(x) = \frac{1}{1-p} (a_* - a_0)^{1-p}. \\ p > 1 : \quad \lim_{x \rightarrow x_*} I(x) = \frac{1}{1-p} \left[(x_* - x_0)^{1-p} - \lim_{x \rightarrow x_*} (x_* - x)^{1-p} \right] = -\infty. \end{array} \right.$$

(ii) è un corollario di (i). ■

3 Funzione di Weierstrass illimitata.

Sia $W(a) > 0$ in un intervallo $a_0 \leq a < a_*$ tale che $\lim_{a \rightarrow a_*} W(a) = +\infty$. Se $\dot{a}(t_0) > 0$ allora il punto mobile raggiunge a_* in un tempo finito t_* determinato dall'integrale ordinario

$$t_* - t_0 = \int_{a_0}^{a_*} \frac{da}{\sqrt{W(a)}}.$$

Abbiamo infatti $\lim_{a \rightarrow a_*} 1/\sqrt{W(a)} = 0$ e la funzione integranda è prolungabile per continuità ad a_* dove assume il valore 0 (Figura 3.6).

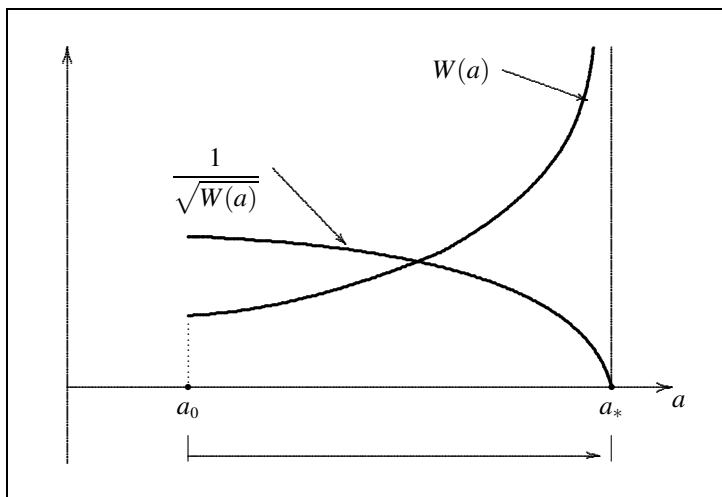


Figura 3.6: Asintoto verticale in a_* .

4 Funzione di Weierstrass positiva in un intervallo illimitato

$$a_0 \leq a < +\infty.$$

Se il punto si muove verso $+\infty$ allora può 'raggiungere' $+\infty$ in un tempo finito t_∞ purché l'integrale improprio

$$(3.75) \quad t_\infty - t_0 = \int_{a_0}^{+\infty} \frac{da}{\sqrt{W(a)}} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{a_0}^a \frac{dz}{\sqrt{W(z)}}$$

sia convergente. È chiaro che questo accade se $W(a)$ ha una crescita sufficientemente elevata (Figura 3.7).

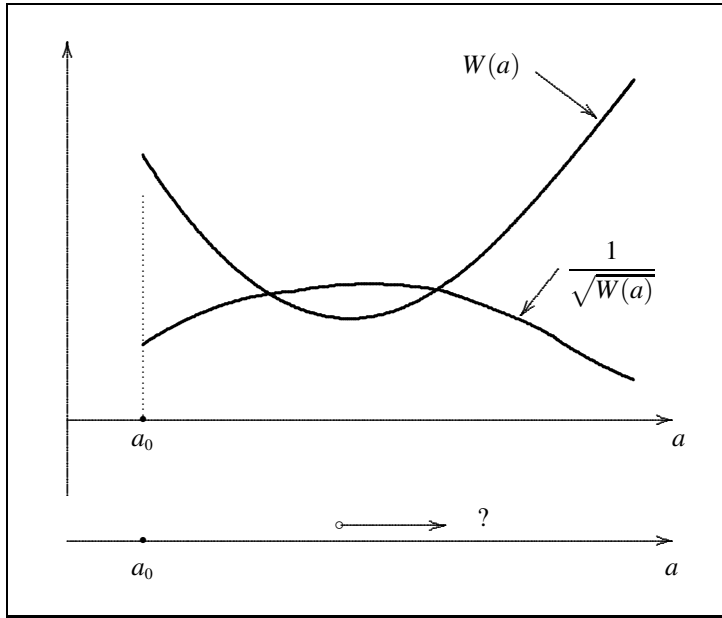


Figura 3.7: Funzione di W . definita in un intervallo illimitato $[a_0, +\infty)$.

5 Un'equazione di Weierstrass (3.56) è integrabile per separazione di variabili, essendo equivalente alle due equazioni

$$(3.76) \quad \frac{da}{\sqrt{W(a)}} = \pm dt.$$

Se $I(a)$ è un qualunque integrale del primo membro allora

$$I(a) = \pm t + \text{costante arbitraria.}$$

Così, se $a = I^{-1}(y)$ è la funzione inversa di $y = I(a)$, in un intervallo dove $I(a)$ è crescente le funzioni

$$a_{\pm}(t) = I^{-1}(\pm t + \text{costante})$$

sono due soluzioni dell'equazione. D'altra parte possiamo prendere come costante arbitraria un prefissato valore t_* del tempo, di modo da poter scrivere le due soluzioni nella forma

$$a_{\pm}(t) = \pm I^{-1}(t - t_*).$$

Ne consegue che $a_+(t)$ è una funzione crescente di $t - t_*$ mentre $a_-(t)$ è decrescente. Queste soluzioni, che chiamiamo **duali**, sono ottenute una dall'altra con una inversione del tempo t ed eventualmente traslate lungo l'asse t stante la differenza $t - t_*$.

Si propongono qui, senza commenti, alcuni esempi di come dal grafico della funzione $W(a)$ si possano dedurre le proprietà qualitative salienti delle soluzioni dell'equazione $\dot{a}^2 = W(a)$. Le figure che seguono mostrano:

- (i) nella parte superiore, i grafici delle $W(a)$ nel piano (a, \dot{a}^2) ;
- (ii) nella parte centrale, il tipo di progressione del punto mobile sull'asse a ;
- (iii) nella parte inferiore, i profili delle soluzioni nel piano (t, a) .

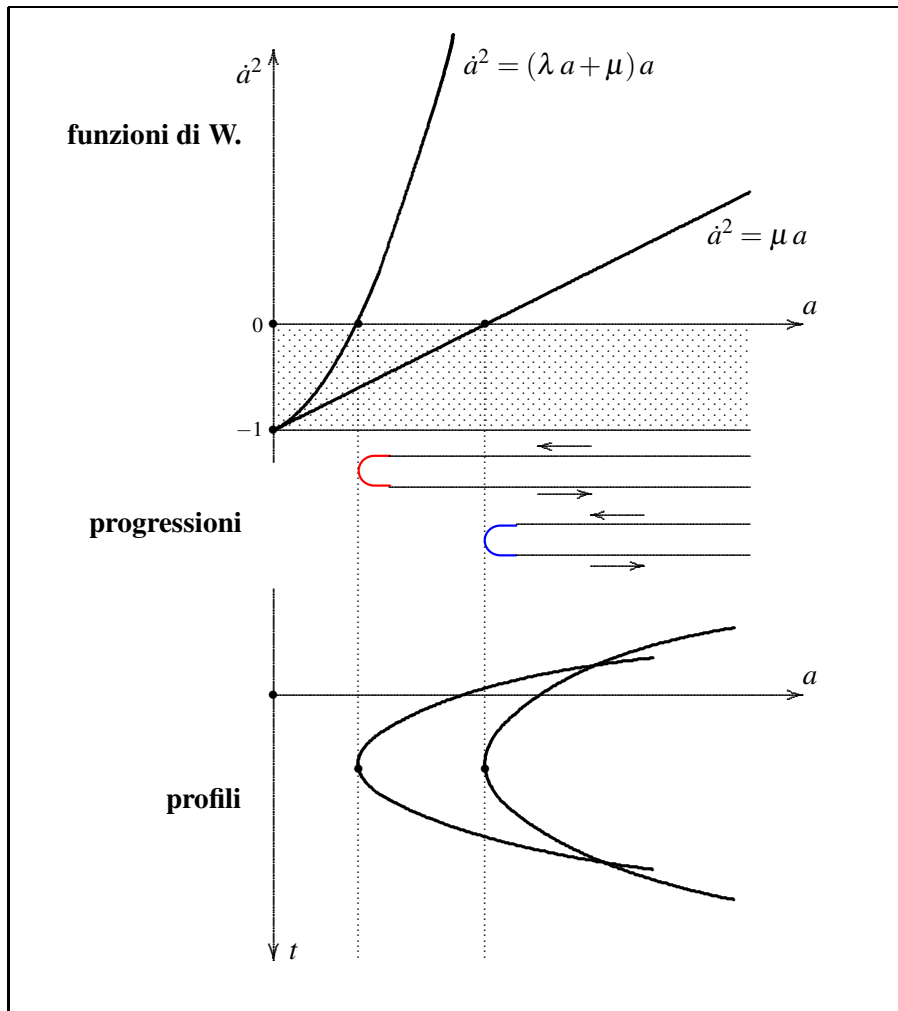


Figura 3.8: Funzioni di W. lineare e quadratica con una radice semplice.

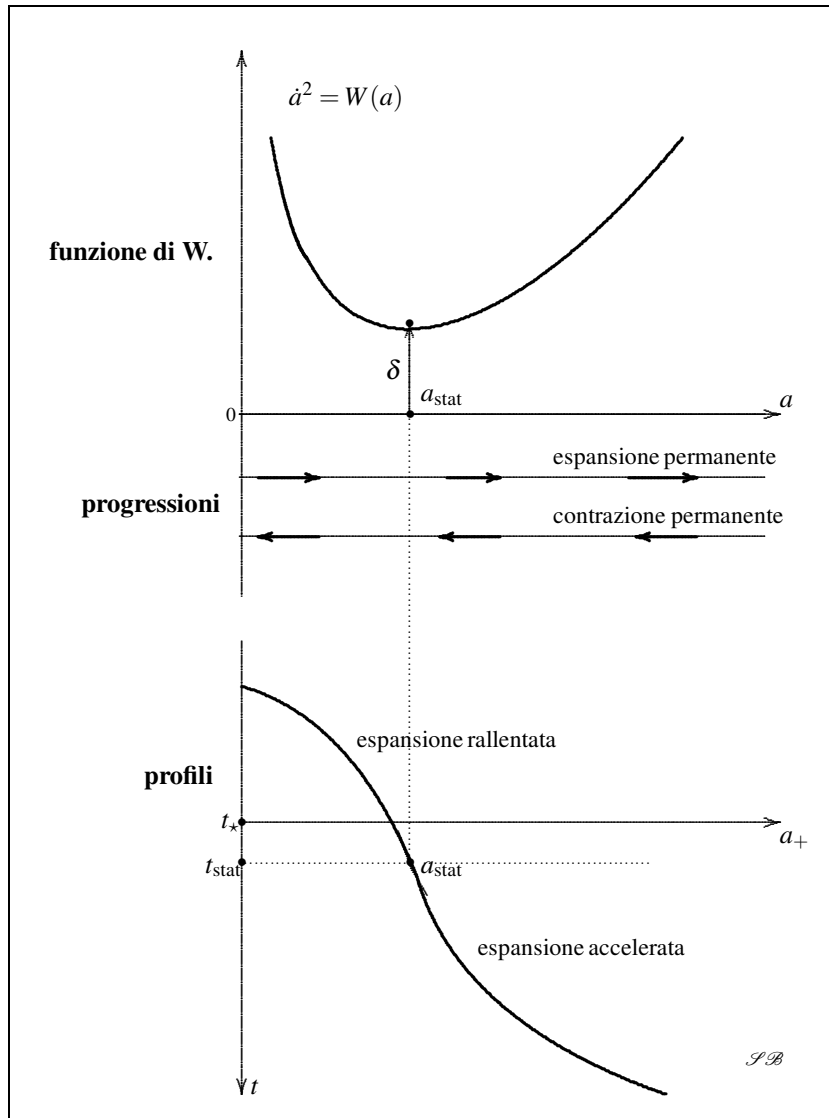


Figura 3.9: Funzione di W. convessa, illimitata in $a = 0$, con un minimo positivo.

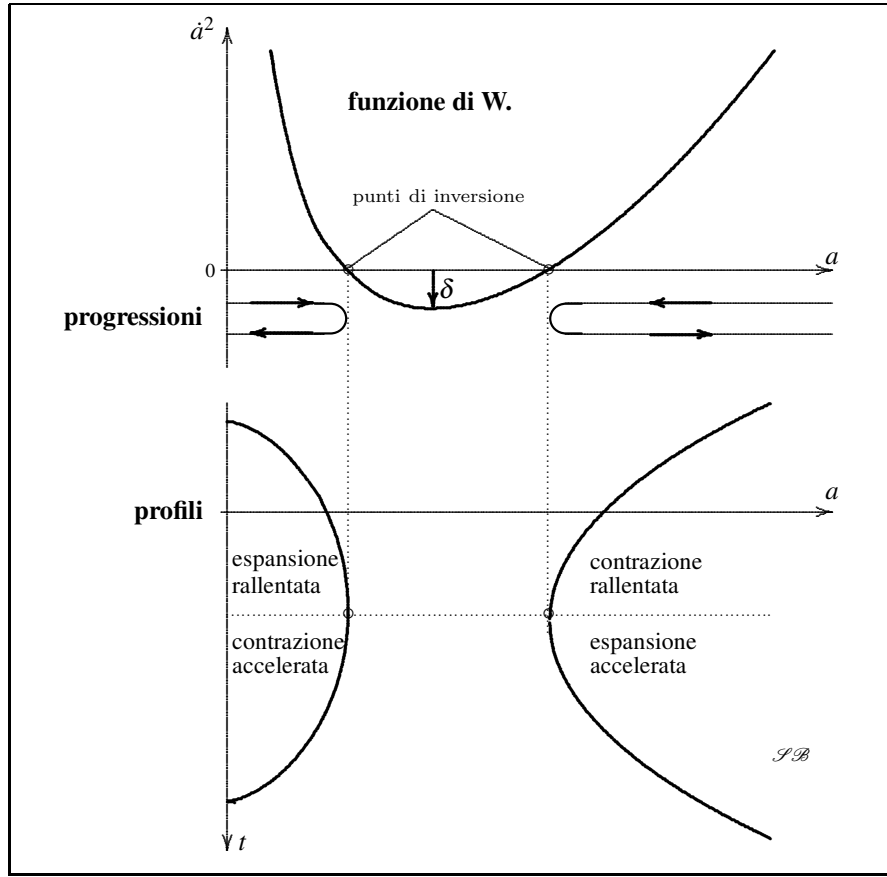


Figura 3.10: Funzione di W. convessa, illimitata in $a = 0$, con un minimo negativo.

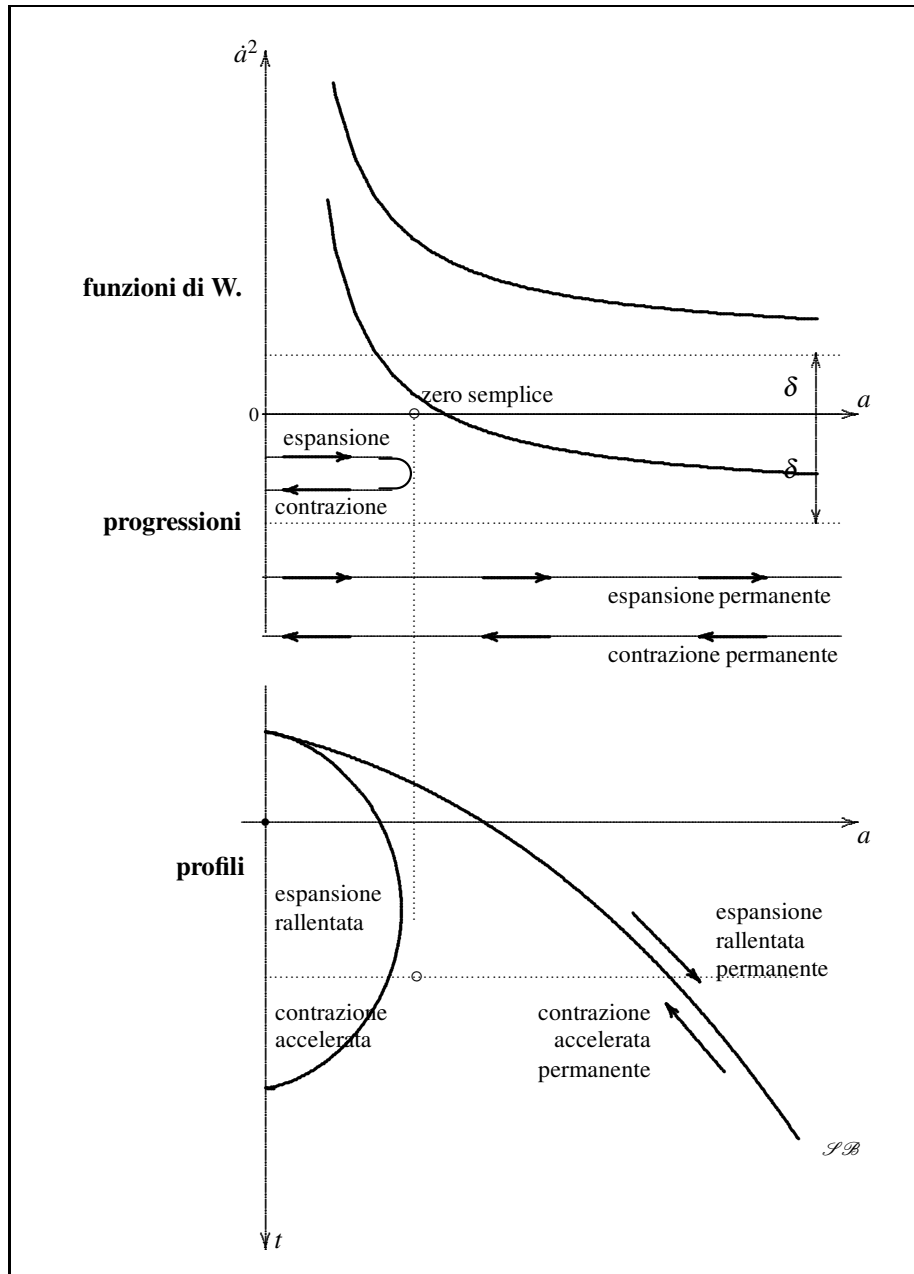


Figura 3.11: Funzioni di W. decrescenti con limite δ at $+\infty$. Per $\delta > 0$ nessuna radice, per $\delta < 0$ una radice semplice.

Capitolo 4

Cosmologia numerica

4.1 Raccolta dei dati cosmologici

Per rendere operativo il modello MR servono le stime numeriche dei quattro dati primari (3.51). Un gran numero di *data reports* sono stati pubblicati negli anni recenti. Si è prestata particolare attenzione ai rapporti del progetto Planck pubblicati su *Astronomy & Astrophysics*. La tabella 4.1 riporta alcune stime fornite dai rapporti più recenti [1], [2], [3].

Tabella 4.1: Da A&A Planck reports (2016).

	[1] T.21 prima colonna	[1] T.21 seconda colonna	[2] T.8
H_0	67.31 ± 0.96	67.27 ± 0.66	67.74 ± 0.46
Ω_Λ	0.685 ± 0.013	0.6844 ± 0.0091	0.6911 ± 0.0062
Ω_m	0.315 ± 0.013	0.3156 ± 0.0091	0.3089 ± 0.0062
z_{eq}	3393 ± 49	3395 ± 33	3371 ± 23
t_0	13.813 ± 0.038	13.813 ± 0.026	13.799 ± 0.021
z_{re}	$9.9^{+1.8}_{-1.6}$	$10.0^{+1.7}_{-1.5}$	$8.8^{+1.2}_{-1.1}$

	[3] T.8
H_0	66.93 ± 0.62
Ω_Λ	mancante
Ω_m	0.3202 ± 0.0087
z_{eq}	mancante
t_0	13.826 ± 0.025
z_{re}	8.24 ± 0.88

L'analisi e il confronto di tutti i rapporti citati porta a ritenere sufficientemente affidabili¹ i valori medi dei **dati primari** della terza colonna [2] T.8 della Tabella 4.1. La stessa colonna contiene anche le stime di due **dati addizionali**: l'**età dell'Universo** t_0 il **redshift di reionizzazione** z_{re} , che richiameremo più avanti.

Ulteriori stime dei dati primari sono state tratte dal rapporto 2010 del progetto Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) [19]:

Tabella 4.2: Da WMAP 7th year (2010).

H_0	$70.01 \pm 1.3 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
Ω_Λ	0.721 ± 0.015
Ω_{tot}	1.0052 ± 0.0064
t_0	13.75 ± 0.11

Si è infine tenuto conto della più recente e affidabile stima del fattore di Hubble ottenuta in concomitanza con il rilevamento di onde gravitazionali nell'agosto del 2017 [12]:

$$(4.1) \quad H_0 = 70.0_{-8.0}^{+12.0} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

Questa stima è in pieno accordo con quella della Tabella 4.2.

Il valore di H_0 influenza fortemente il calcolo di molte grandezze cosmologiche, come per esempio l'età t_0 dell'Universo. È quindi opportuno tener conto sia della stima (4.1), denotata con \hat{H}_0 , sia della stima riportata nella terza colonna [2] T.8 della Tabella 4.1 (Planck), denotata con \bar{H}_0 .

¹ Questa analisi ha richiesto un lungo lavoro, i cui dettagli sono qui omessi. Saranno i risultati numerici che si otterranno nel seguito a validare le scelte fatte.

Riassumendo, baseremo l'analisi numerica del modello MR sui seguenti valori dei dati primari:

Tabella 4.3: Dati primari nel modello MR

\hat{H}_0	$70.0 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$	Ligo [12]
\bar{H}_0	$67.74 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$	Planck [2]
Ω_Λ	0.6911	Planck [2]
Ω_m	0.3089	Planck [2]
z_{eq}	3371	Planck [2]

Per quel che riguarda i margini di incertezza dei parametri cosmologici Ω_Λ e Ω_m nella Tabella 4.1 osserviamo che

$$\begin{aligned}
 \Omega_\Lambda &= \begin{bmatrix} 0.6911 + 0.0062 \\ 0.6911 \\ 0.6911 - 0.0062 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6973 \\ 0.6911 \\ 0.6849 \end{bmatrix} \\
 \Omega_m &= \begin{bmatrix} 0.3089 + 0.0062 \\ 0.3089 \\ 0.3089 - 0.0062 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3151 \\ 0.3089 \\ 0.3027 \end{bmatrix} \\
 (4.2) \quad \Omega_\Lambda + \Omega_m &= \begin{bmatrix} 0.6973 \\ 0.6911 \\ 0.6849 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3151 \\ 0.3089 \\ 0.3027 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0124 \\ 1 \\ 0.9876 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

4.2 Nel modello MR la curvatura spaziale è positiva

Al paragrafo 3.8 è stato dimostrato che, indipendentemente dalle stime numeriche dei parametri cosmologici, nel modello MR la curvatura spaziale non può essere zero. Possedendo ora queste stime possiamo dimostrare che

Teorema 4.2.1 – *Nel modello MR la curvatura spaziale è positiva.*

Dimostrazione. Per i valori medi dei parametri cosmologici Ω_Λ e Ω_m sussiste l'uguaglianza

$$(4.3) \quad \Omega_\Lambda + \Omega_m = 1.$$

In virtù delle (3.40) e (3.41) questa si traduce in

$$\frac{1}{3} \frac{c^2}{H_0^2} \Lambda + \frac{1}{3} \frac{c^2}{H_0^2} \chi \varepsilon_{m0} = 1$$

ovvero in

$$(4.4) \quad \frac{c^2}{H_0^2} \left[\Lambda + \chi \varepsilon_{m0} \right] = 3.$$

Una relazione numerica così precisa tra le costanti universali Λ , c , χ , e le quantità misurate nell'epoca presente, H_0 e ε_{m0} , pare non avere senso. Tuttavia, una ragionevole interpretazione di questo problema² è la seguente: *la somma $\Omega_\Lambda + \Omega_m$ è uguale ad un numero diverso da 1 ma contenuto nell'intervallo di incertezza (4.2)*

$$0.9876 < \Omega_\Lambda + \Omega_m < 1.0124.$$

Alla luce di questi fatti, va osservato che se nella (3.45) si pone $\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1$ si trova

$$(4.5) \quad \boxed{K_0 = \frac{H_0^2}{c^2} \Omega_r}$$

Pertanto, avvicinandosi il numero $\Omega_\Lambda + \Omega_m$ a 1 il valore della curvatura si avvicina sempre di più a quello, positivo, dato dalla (4.5). ■

In effetti, come c'è da attendersi, la curvatura si rivelerà essere estremamente piccola (paragrafo 4.5).

4.3 Modello Universo chiuso

Riprendiamo qui il discorso appena accennato al paragrafo 1.5 sulla topologia delle sezioni spaziali. La più semplice topologia che può assumere una varietà tridimensionale a curvatura costante positiva è quella della sfera \mathbb{S}_3 .

² Si tratta di uno dei cosiddetti **problemi di coincidenza** che si presentano in cosmologia.

Obbedendo al nostro **principio di semplicità** assumiamo³ che ogni sezione spaziale S_t sia diffeomorfa ad una sfera \mathbb{S}_3 di raggio $r(t)$ di equazione

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = r^2(t)$$

immersa nello spazio euclideo tetra-dimensionale \mathbb{R}^4 con coordinate ortonormali (x_1, x_2, x_3, x_4) , e centrata nell'origine. Un modello cosmologico di questo tipo è detto **modello Universo chiuso**. Si dimostra⁴ che la curvatura di ogni S_t è

$$(4.6) \quad K(t) = \frac{1}{r^2(t)}.$$

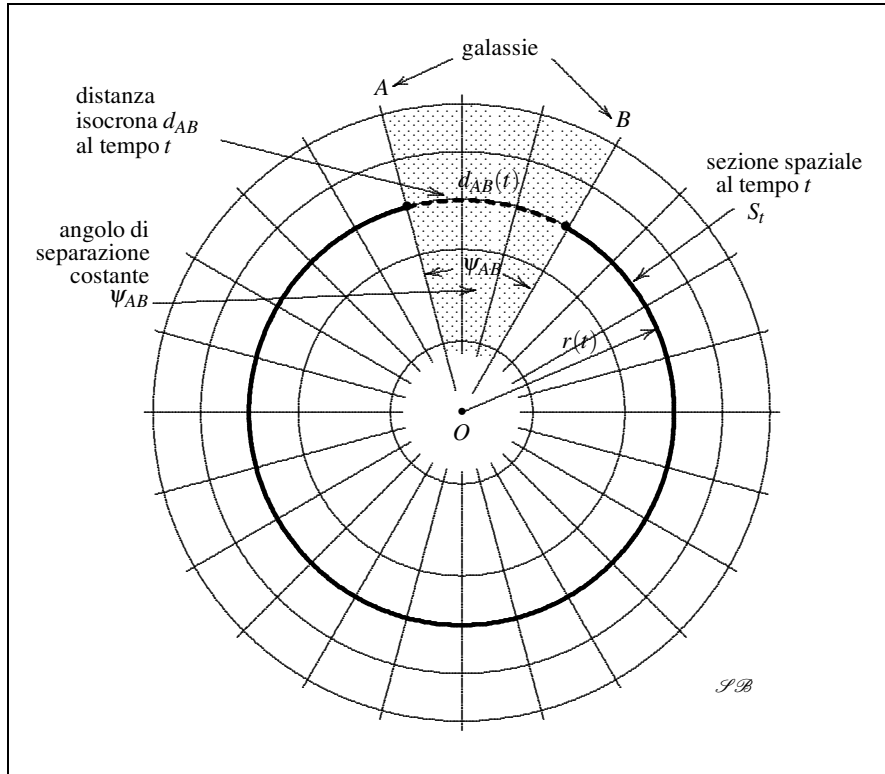


Figura 4.1: Rappresentazione radiale al tempo t di un Universo chiuso.

³ Possiamo intendere questa assunzione come un ultimo Postulato.

⁴ Paragrafo 4.13.

Il raggio dell'ipersfera $\mathbb{S}_3 = S_t$ si contrae e si espande nel tempo mentre il centro O rimane fisso. In questo modo otteniamo una **rappresentazione radiale** dell'evoluzione dell'Universo di cui la Figura 4.1 fornisce una visione bidimensionale. Ogni galassia A è un punto che si muove lungo una retta uscente dall'origine. In ogni istante t due galassie A e B stanno sull'ipersfera di raggio $r(t)$ e sono separate da un arco di cerchio massimo (arco geodetico) di lunghezza uguale alla distanza isocrona $d_{AB}(t)$.

Le rette che congiungono A e B al centro formano un angolo ψ_{AB} tale che

$$(4.7) \quad d_{AB}(t) = \psi_{AB} r(t)$$

Lo chiamiamo **angolo di separazione** delle due galassie. Quest'angolo rimane costante nel tempo. La distanza massima fra due galassie è πr , la metà della lunghezza $2\pi r$ di un cerchio massimo. Segue che la massima separazione angolare è $\psi_{\max} = \pi$.

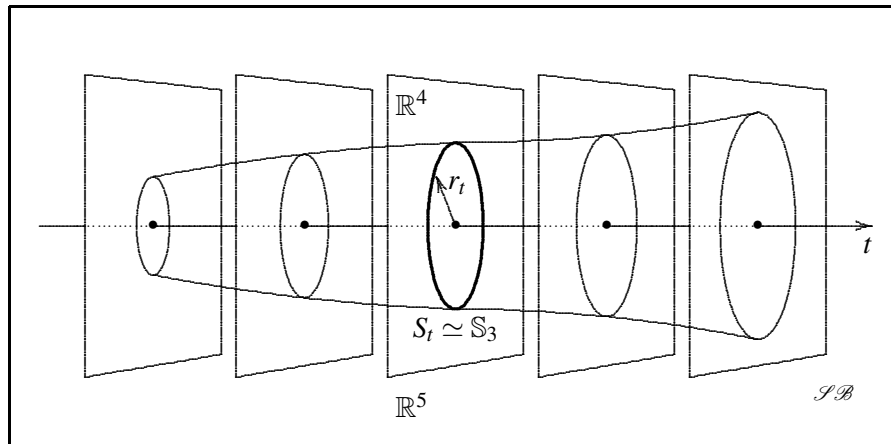


Figura 4.2: Spazio-tempo affine penta-dimensionale di un Universo chiuso.

La Figura 4.1 rappresenta un'istantanea al tempo t di un Universo chiuso. La Figura 4.2 mostra il filmato formato dalla sequenza di queste istantanee. Questo filmato è immerso nello spazio affine \mathbb{R}^5 . I singoli 'frame' sono spazi affini \mathbb{R}^4 . I cerchi sono le ipersfere di raggio $r(t)$ rappresentanti le sezioni spaziali.

4.4 Sulle unità di misura del fattore di Hubble

La dimensione di H_0 è T^{-1} . Gli astronomi misurano H_0 in unità $km s^{-1} Mpc^{-1}$. Tuttavia, per i nostri scopi è più conveniente usare come unità temporale il *Gyr* (Giga-year, miliardo di anni) e quindi, per omogeneità, usare come unità di lunghezza il *Glyr* (Giga-lightyear, miliardo di anni luce). Malgrado queste unità siano giudicate addirittura ‘deprecabili’ da qualche ‘addetto ai lavori’,⁵ sono invece più percepibili ai non addetti ai lavori e facilitano inoltre considerevolmente il trattamento numerico dei modelli cosmologici in generale. Per esempio, con questa scelta l’applicazione della formula (4.5) per il calcolo dell’odierna curvatura spaziale non richiede l’intervento del valore numerico della velocità della luce c , che con questa convenzione risulta uguale a 1.

La transizione fra i $km s^{-1} Mpc^{-1}$ ed i Gyr^{-1} si ottiene applicando successivamente due regole di conversione.

(i) Conversione da *megaparsecs* a *kilometri*:⁶

$$(4.8) \quad \boxed{1 Mpc = 3.0856776 \cdot 10^{19} km} \quad \boxed{\frac{km}{Mpc} = \frac{1}{3.0856776} \cdot 10^{-19}}$$

(ii) Conversione da *secondi* a *anni*:

$$(4.9) \quad \boxed{1 s = 3.1709791983765 \cdot 10^{-8} yr}$$

$$\boxed{\frac{yr}{s} = \frac{1}{3.1709791983765} \cdot 10^8}$$

Combinando (i) e (ii) si trova

$$1 km s^{-1} Mpc^{-1} = \frac{10^{-19}}{3.0856776} s^{-1} = \frac{10^{-11}}{3.0856776 * 3.17097919...} yr^{-1}$$

$$= \frac{10^{-2}}{3.0856776 * 3.17097919...} Gyr^{-1} \implies$$

$$(4.10) \quad \boxed{1 km s^{-1} Mpc^{-1} \simeq 0.0010220121532... Gyr^{-1}}$$

Per le due stime di H_0 della tabella 4.3 risulta quindi:

$$(4.11) \quad \boxed{\hat{H}_0 = 70.00 km s^{-1} Mpc^{-1} \simeq 0.0715408 Gyr^{-1}}$$

$$(4.12) \quad \boxed{\bar{H}_0 = 67.74 km s^{-1} Mpc^{-1} \simeq 0.0692311 Gyr^{-1}}$$

⁵ Vedi [17], tabella 2.1.

⁶ Da [6].

4.5 Stime della curvatura spaziale

Applichiamo la formula (4.5) con $\Omega_r = 0.3089$ (tabella 4.3) e le due stime (4.11) e (4.12) di H_0 . Risulta:

$$(4.13) \quad \hat{H}_0 \mapsto K_0 = \frac{\hat{H}_0^2}{c^2} \Omega_r = 0.46885499... * 10^{-6} \text{ Glyr}^{-2}$$

$$(4.14) \quad \bar{H}_0 \mapsto K_0 = \frac{\bar{H}_0^2}{c^2} \Omega_r = 0.43906907... * 10^{-6} \text{ Glyr}^{-2}$$

Segue che nei due casi il raggio di curvatura $r_0 = \frac{1}{\sqrt{K_0}}$ è

$$(4.15) \quad \hat{H}_0 \mapsto r_0 = 1460.4299... \text{ Glyr}$$

$$(4.16) \quad \bar{H}_0 \mapsto r_0 = 1509.1540... \text{ Glyr}$$

Le lunghezze delle geodetiche spaziali (Nota 4.13.2) sono

$$(4.17) \quad \hat{H}_0 \mapsto \ell_{\max} = 2\pi r_0 = 9176.1519... \text{ Glyr}$$

$$(4.18) \quad \bar{H}_0 \mapsto \ell_{\max} = 9482.2946... \text{ Glyr}$$

4.6 Le funzioni di Weierstrass del modello MR

Ponendo $\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1$ nella terza espressione (3.57) la funzione di Weierstrass diventa

$$(4.19) \quad W(a) = H_0^2 \left[a^2 + \Omega_m \left(a^{-1} - a^2 + \frac{a^{-2} - 1}{1 + z_{\text{eq}}} \right) \right]$$

Per quanto si è detto al paragrafo 4.2, l'uguaglianza $\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1$ è solo 'approssimativa'. Tuttavia, questa approssimazione è conciliabile con la tolleranza delle stime riportate nelle tabelle del paragrafo 4.1.⁷

Tenuto conto delle stime della tabella 4.3 e delle conversioni (4.11) e (4.12) abbiamo due espressioni numeriche della $W(a)$ in unità Gyr^{-2} , i cui grafici sono tracciati nella Figura 4.3.

⁷ Questa 'conciliabilità' sarà comprovata dai risultati numerici ottenuti nel seguito.

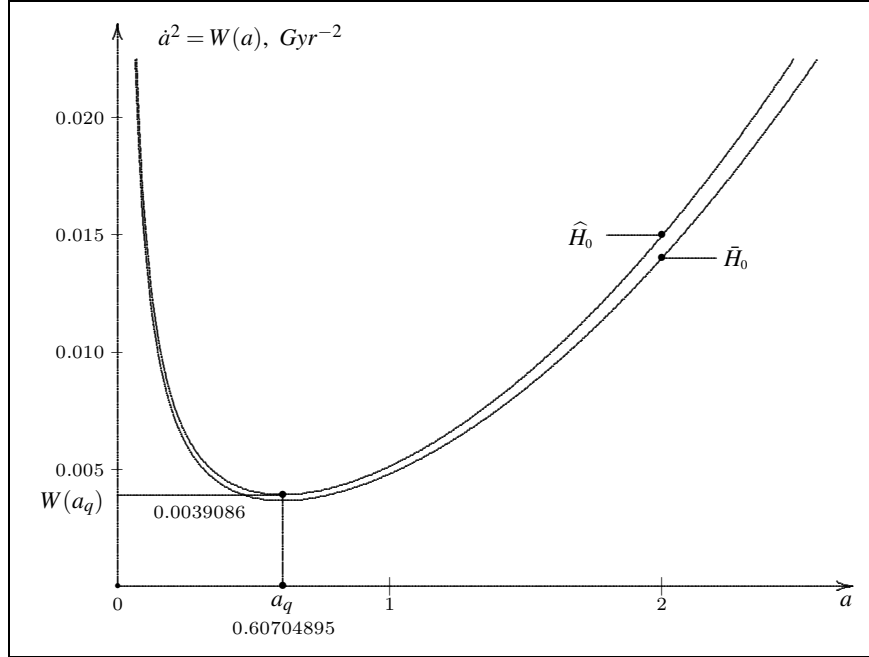


Figura 4.3: Grafici delle funzioni di Weierstrass.

$$(4.20) \quad \hat{H}_0 \mapsto W(a) = (0.0715408)^2 \left[a^2 + 0.3089 * \left(\frac{1}{a} - a^2 + \frac{a^{-2} - 1}{3372} \right) \right]$$

$$(4.21) \quad \tilde{H}_0 \mapsto W(a) = (0.0692311)^2 \left[a^2 + 0.3089 * \left(\frac{1}{a} - a^2 + \frac{a^{-2} - 1}{3372} \right) \right]$$

4.7 Profilo numerico puntuale dell'Universo MR

Siamo a questo punto in grado di determinare numericamente i due profili dell'Universo corrispondenti alle due funzioni di Weierstrass (4.20) e (4.21). Occorre innanzitutto risalire a quanto detto al paragrafo 3.11 sulla descrizione dei profili dell'Universo nell'ambito del modello MR, ottenibili in virtù dei vantaggi offerti da un'equazione di Weierstrass. Va quindi osservato che i grafici $W(a)$ della Figura 4.3 sono del tutto simili a quello tracciato nella Figura 3.4 del suddetto paragrafo. Alla funzione $W(a)$ di questa figura corrisponde un profilo $a(t)$ che parte dall'origine del piano (t, a) , cioè soddisfacente alla condizione iniziale $a(0) = 0$.

Questo risultato, ottenuto a livello qualitativo, è della massima importanza a livello numerico perché ci autorizza ad applicare quanto detto al punto (iv) del paragrafo 3.10, cioè ad utilizzare l'integrale (3.61) per il calcolo di un profilo soddisfacente alla

suddetta condizione iniziale. Infatti, calcolando l'integrale (3.61)

$$t(a) = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{W(x)}}$$

per una sequenza di valori di a sufficientemente ravvicinati si ottiene una rappresentazione numerica **puntuale** della funzione $t(a)$, la cui inversa $a(t)$ fornisce una rappresentazione numerica puntuale del profilo dell'Universo MR. È chiaro che, più la sequenza degli a è fitta, più i punti componenti i grafici di $t(a)$ e di $a(t)$ tendono ad essere indistinguibili. Ma il vero grande pregio di questo metodo è che quel piccolo ma inevitabile errore del calcolo di un $t(a)$ non si ripercuote sul calcolo del $t(a)$ successivo, come invece accade negli ordinati metodi d'integrazione passo-passo.

I profili ottenuti con questo metodo, corrispondenti ai due valori \hat{H}_0 e \bar{H}_0 della 'costante' di Hubble sono tracciati nella Figura 4.4. Come già osservato al punto (iv) del paragrafo 3.11, in entrambi i casi il tempo di riferimento del fattore di scala è il tempo presente t_0 .

Questi profili sono in perfetto accordo con la Figura 4.5 tratta dalla Nobel Lecture di A.G. Riess e convenientemente rielaborata.⁸ L'involuppo delle sezioni spaziali (curva rossa) ha lo stesso andamento del fattore di scala.

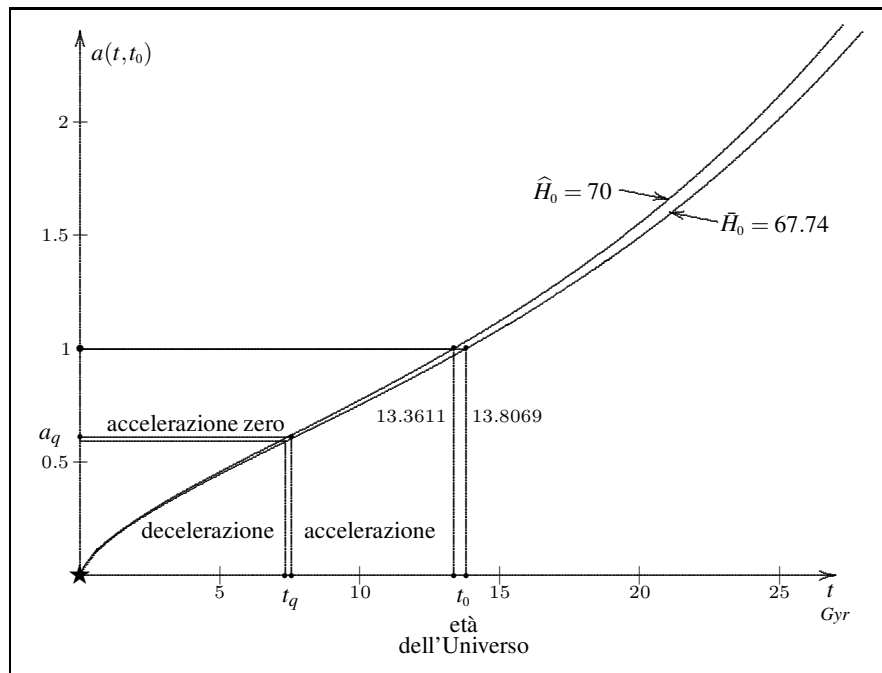


Figura 4.4: Profili numerici puntuali del fattore di scala nel modello MR.

⁸ Premio Nobel per la Fisica 2011, insieme a Saul Perlmutter e Brian P. Schmidt 'for the discovery of the accelerating expansion of the Universe through observations of distant supernovae'.

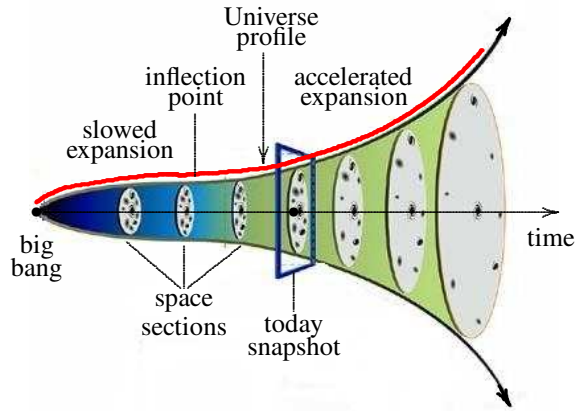


Figura 4.5: Profilo di Riess.

4.8 Età dell'Universo e altre datazioni cruciali

Con $a = 1$ l'integrale (3.61) fornisce l'**età dell'Universo**:

$$t_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{W(x)}}.$$

Si ottengono le due stime

$$(4.22) \quad \begin{array}{l} \widehat{H}_0 \mapsto t_0 \simeq 13.36116 \text{ Gyr} \\ \bar{H}_0 \mapsto t_0 \simeq 13.80692 \text{ Gyr} \end{array}$$

Oltre a t_0 , nel modello MR si riscontrano altri tre tempi cruciali elencati nella tabella 3.64:

a_*	evento	t_*
a_{eq}	uguale densità di materia e radiazione	t_{eq}
a_q	accelerazione zero del fattore di scala	t_q
a_{re}	reionizzazione	t_{re}

Noti i valori dei fattori di scala cruciali a_* , le varie datazioni si calcolano con l'integrale (3.63)

$$(4.23) \quad t_* = \int_0^{a_*} \frac{dx}{\sqrt{W(x)}}$$

1. Datazione di t_{eq} . Richiamando la stima di $z_{\text{eq}} = 3371$ della tabella 4.3 e la definizione (3.48) di a_{eq} risulta

$$(4.24) \quad a_{\text{eq}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1+z_{\text{eq}}} = 0.2965599... * 10^{-3}$$

L'integrale (4.23) fornisce le due stime

$$(4.25) \quad \hat{H}_0 \mapsto t_{\text{eq}} \simeq 50,1595 \text{ yr}, \quad \bar{H}_0 \mapsto t_{\text{eq}} \simeq 51,8330 \text{ yr}$$

2. Datazione di t_q . Il fattore di scala a_q , valore minimo della funzione $W(a)$, è la radice positiva dell'equazione (3.67)

$$\Omega_\Lambda a_q^4 - \frac{1}{2} \Omega_m a_q - \Omega_r = 0$$

che ora può essere riscritta

$$\Omega_\Lambda a_q^4 - \Omega_m \left(\frac{1}{2} a_q + a_{\text{eq}} \right) = 0.$$

Le stime risultanti sono

$$(4.26) \quad a_q \simeq 0.60704$$

$$(4.27) \quad \hat{H}_0 \mapsto t_q \simeq 7.37949 \text{ Gyr}, \quad \bar{H}_0 \mapsto t_q \simeq 7.62569 \text{ Gyr}$$

3. Datazione di t_{re} (inizio dell'emissione di luce). Dalla stima $z_{\text{re}} = 8.8$ del redshift di reionizzazione nella terza colonna [2] T.8 della Tabella 4.1 deriviamo il corrispondente valore del fattore di scala

$$(4.28) \quad a_{\text{re}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1+z_{\text{re}}} \simeq 0.10204$$

da cui seguono le datazioni

$$(4.29) \quad \hat{H}_0 \mapsto t_{\text{re}} \simeq 0.54409 \text{ Gyr}, \quad \bar{H}_0 \mapsto t_{\text{re}} \simeq 0.56224 \text{ Gyr}$$

Dalla (4.28) si trae il valore della densità di radiazione Ω_r mediante la (3.47):

$$(4.30) \quad \Omega_r = a_{\text{eq}} \Omega_m = 0.91607354... * 10^{-4}$$

Si noti il suo piccolo valore nei confronti di Ω_m , a conferma del fatto ben noto che nell'epoca presente predomina la materia.

Nota 4.8.1 – Il decremento di H_0 nel passaggio da \widehat{H}_0 a \bar{H}_0 ha l'effetto di aumentare tutte le datazioni, in particolare l'età dell'Universo (4.22). Si osservi che il valore $t_0 = 13.8069 \text{ Gyr}$ corrispondente a $\bar{H}_0 = 67.74 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ è in pieno accordo con il valore $t_0 = 13.799 \pm 0.021 \text{ Gyr}$ nella tabella 4.1 (terza colonna).

Questo responso supporta la validità del modello MR e della scelta fatta dei dati primari.

L'incremento delle datazioni $t(a_*)$ ha l'effetto di spostare in avanti (verso il futuro) il profilo dell'Universo, come mostrato nella Figura 4.4. •

Nota 4.8.2 – Secondo il modello ΛCDM^9 l'età dell'Universo è calcolata in 13.73 ± 0.12 miliardi di anni, con (i) una costante di Hubble $H_0 = 70.1 \pm 1.3 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, (ii) il 4.6% di materia barionica ordinaria; (iii) il 23 % di materia oscura di natura ignota; (iv) il 72 % di energia oscura che favorisce l'accelerazione dell'espansione; (v) meno dell'1% di neutrini. •

4.9 Profilo analitico del modello MR

Col metodo d'integrazione proprio dell'equazione di Weierstrass abbiamo costruito il profilo numerico dell'Universo MR e ottenuto altri dati significativi. Ma ciò di cui abbiamo davvero bisogno per proseguire la nostra analisi è la conoscenza di un **profilo analitico**, cioè del fattore di scala $a(t)$ espresso mediante funzioni note.

La ricerca di una soluzione esatta $a(t, t_0)$ dell'equazione di Weierstrass (3.57) non è solo un problema arduo ma anche inutile perché porterebbe a funzioni trascendenti non elementari trattabili attraverso rappresentazioni approssimate. Tanto vale, quindi, ricercare soluzioni non esatte coinvolgenti funzioni elementari ma capaci di rappresentare quelle esatte con sufficiente precisione. Quest'idea si può realizzare considerando funzioni del tipo¹⁰

$$(4.31) \quad a(t, t_0) = \alpha \sqrt[3]{\cosh(\beta t) - 1} = \alpha \sqrt[3]{\frac{1}{2} \frac{(e^{\beta t} - 1)^2}{e^{\beta t}}}$$

dove α e β sono delle costanti positive.¹¹

Teorema 4.9.1 – *Noti H_0 e t_0 , le costanti α e β sono univocamente determinate imponendo le due condizioni*

⁹ Si vedano i dati forniti dal *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe project* (WMAP) [19].

¹⁰ Le due espressioni di questo profilo sono equivalenti perché

$$\cosh(x) - 1 = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2) = \frac{1}{2}e^{-x}[e^{2x} + 1 - 2e^x] = \frac{1}{2} \frac{(e^x - 1)^2}{e^x}.$$

¹¹ Si noti che α è adimensionale e $\text{Dim}(\beta) = \text{T}^{-1}$.

(i) condizione di normalizzazione $a(t_0, t_0) = 1$,

(ii) $H(t_0) = H_0$.

Dimostrazione. Prima parte. Il fattore di Hubble del profilo (4.31) è

$$(4.32) \quad H(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{3} \beta \frac{e^{\beta t} + 1}{e^{\beta t} - 1}$$

Infatti, posto per semplicità $X \stackrel{\text{def}}{=} e^{\beta t}$, si ha successivamente:

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{d \log a}{dt} = \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \log \frac{(e^{\beta t} - 1)^2}{e^{\beta t}} = \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \log \frac{(X - 1)^2}{X} \\ &= \frac{1}{3} \frac{d}{dt} [2 \log(X - 1) - \log X] = \frac{1}{3} \left(2 \frac{\dot{X}}{X - 1} - \frac{\dot{X}}{X} \right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{2X - X + 1}{(X - 1)X} \dot{X} = \frac{1}{3} \frac{X + 1}{X - 1} \frac{\dot{X}}{X} = \frac{1}{3} \frac{X + 1}{X - 1} \beta \implies (4.32). \end{aligned}$$

Seconda parte. Imponendo la condizione (ii) $H(t_0) = H_0$ si trova

$$(4.33) \quad \beta \frac{e^{\beta t_0} + 1}{e^{\beta t_0} - 1} = 3H_0$$

Questa equazione si può risolvere rispetto a β perché la funzione $H(t)$ (4.32) è crescente.

Terza parte. Imponendo la condizione (i) alla (4.31) si trova

$$(4.34) \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{\cosh(\beta t_0) - 1}} = \alpha = \sqrt[3]{\frac{2e^{\beta t_0}}{(e^{\beta t_0} - 1)^2}}$$

Pertanto, conoscendo β , α è univocamente determinato. ■

Nota 4.9.1 – Di qui in poi porteremo avanti l'analisi numerica con la stima (4.11) \hat{H}_0 del fattore di Hubble,

$$(4.35) \quad H_0 = \hat{H}_0 = 70.00 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \simeq 0.0715408 \text{ Gyr}^{-1}$$

e conseguentemente con la prima stima (4.22) di t_0 :

$$(4.36) \quad t_0 \simeq 13.3611603 \text{ Gyr} \quad \bullet$$

Teorema 4.9.2 – Dai dati (4.35) e (4.36) seguono per le costanti α e β i valori

$$(4.37) \quad \boxed{\alpha \simeq 0.607247} \quad \boxed{\beta \simeq 0.178366 \text{ Gyr}^{-1}}$$

Dimostrazione. Si calcola β risolvendo l'equazione (4.33). Quindi si calcola α applicando la (4.34). ■

Otteniamo quindi due espressioni numeriche equivalenti del profilo (4.31):

$$(4.38) \quad \boxed{a(t, t_0) = 0.607247 * \sqrt[3]{\cosh(0.178366 * t) - 1}}$$

$$(4.39) \quad \boxed{a(t, t_0) = 0.607247 * \sqrt[3]{\frac{1}{2} * \frac{[\exp(0.178366 * t) - 1]^2}{\exp(0.178366 * t)}}$$

Questo profilo analitico è tracciato nella Figura 4.6 insieme al profilo puntuale della Figura 4.4: *sono praticamente indistinguibili.*

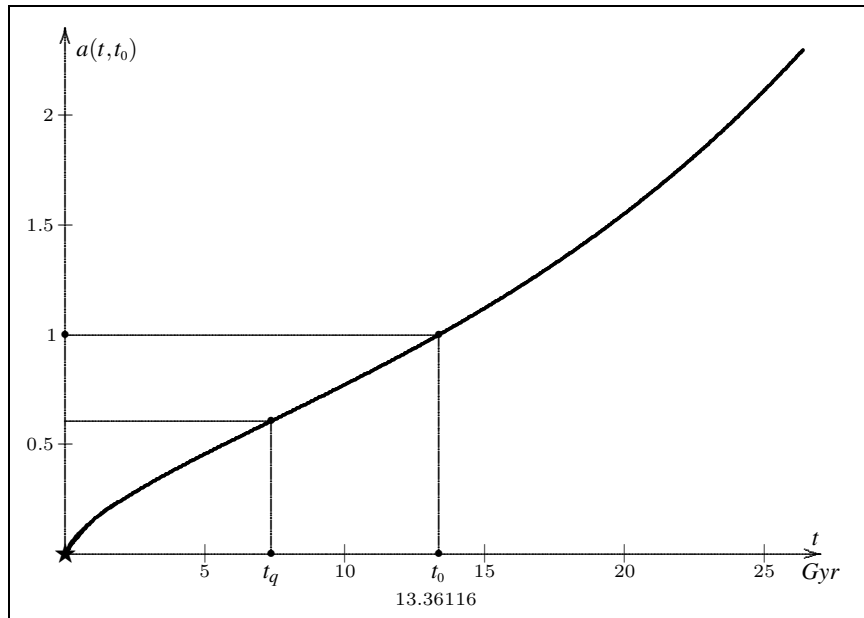


Figura 4.6: Profilo analitico dell'Universo nel modello MR.

La funzione (4.38) non è una soluzione esatta dell'equazione dinamica (4.19) ma ne è una fedele rappresentante che useremo nel proseguimento della nostra analisi.

4.10 Variazione del tempo di riferimento

Se vogliamo un profilo con un tempo di riferimento $t_{\#}$ diverso da quello odierno t_0 possiamo applicare le regole (1.24),

$$a(t, t_{\#}) = a(t, t_0) a(t_0, t_{\#}) = \frac{a(t, t_0)}{a(t_{\#}, t_0)},$$

di modo che dalla (4.31) ricaviamo

$$(4.40) \quad a(t, t_{\#}) = \left[\frac{\cosh(\beta t) - 1}{\cosh(\beta t_{\#}) - 1} \right]^{\frac{1}{3}}$$

Nella Figura 4.7 possiamo vedere, per esempio, i due profili relativi a $t_{\#} = 11$ e $t_{\#} = 17$. Si osservi che il tempo di accelerazione nulla t_q è invariante.

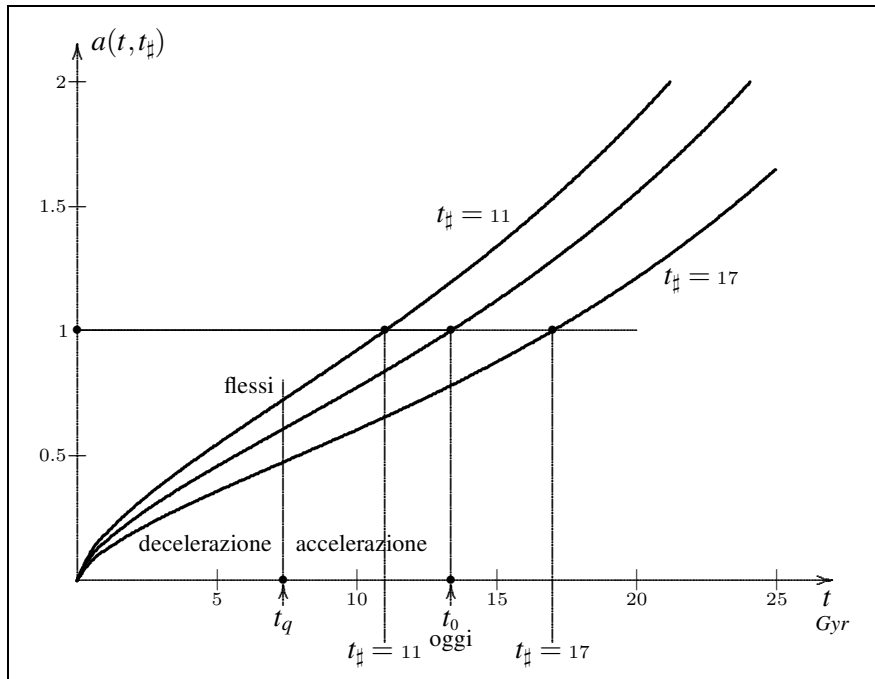


Figura 4.7: Profili con tempi di riferimento $t_{\#}$ diversi da t_0 .

4.11 Evoluzione nel tempo del fattore di Hubble

La funzione $H(t)$ (4.32) ammette la rappresentazione analitica equivalente

$$(4.41) \quad H(t) = \frac{1}{3}\beta \frac{\sinh(\beta t)}{\cosh(\beta t) - 1}$$

dove, si noti, la costante α non interviene. Inoltre:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} H(t) = \frac{1}{3}\beta \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cosh(\beta t)}{\sinh(\beta t)} = +\infty. \\ H_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) = \frac{1}{3}\beta \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\cosh(\beta t)}{\sinh(\beta t)} = \frac{1}{3}\beta = \underline{0.0594556}. \end{cases}$$

L'espressione numerica di $H(t)$ (4.32) è

$$(4.42) \quad H(t) = 0.0594556 * \frac{e^{0.178366*t} + 1}{e^{0.178366*t} - 1}$$

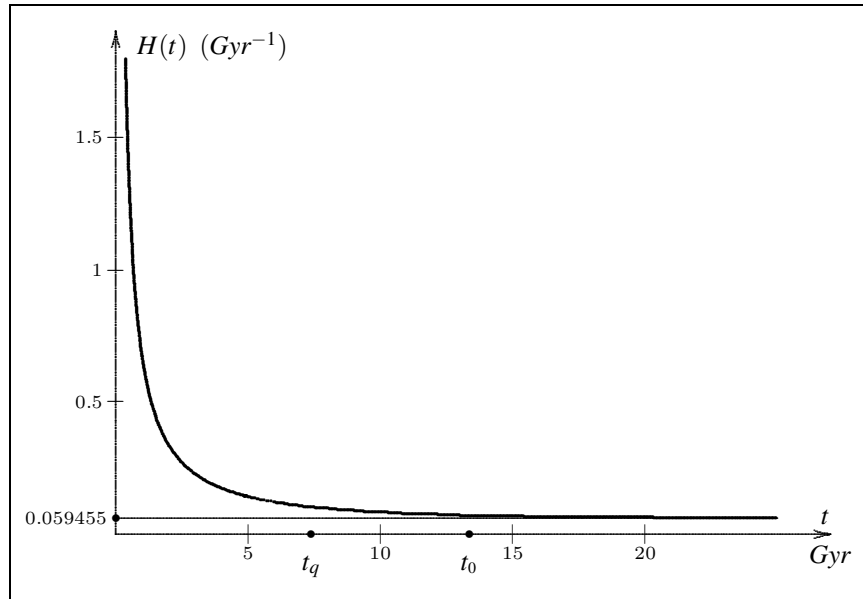


Figura 4.8: Evoluzione del fattore di Hubble $H(t)$.

Nota 4.11.1 – Un'applicazione degna di nota. L'equazione (4.32) è risolvibile rispetto a $X = e^{\beta t}$:

$$H = \frac{1}{3}\beta \frac{X+1}{X-1} \implies 3H(X-1) = \beta(X+1) \implies (3H-\beta)X = \beta + 3H$$

$$\implies X = \frac{3H+\beta}{3H-\beta}.$$

Essendo $X = e^{\beta t}$, segue

$$(4.43) \quad \boxed{t = \frac{1}{\beta} \log \frac{3H(t) + \beta}{3H(t) - \beta}}$$

La valutazione per $t = t_0$ fornisce l'età dell'Universo

$$(4.44) \quad \boxed{t_0 = \frac{1}{\beta} \log \frac{3H_0 + \beta}{3H_0 - \beta}}$$

in termini delle costanti H_0 e β . Inserendo i dati (4.11) $H_0 = \hat{H}_0 = 0.07154 \text{ Gyr}^{-1}$ e (4.37) $\beta = 0.178366 \text{ Gyr}^{-1}$ ne risulta la stima

$$(4.45) \quad t_0 \simeq 13.3611602 \text{ Gyr}.$$

Il confronto con il valore trovato in precedenza $t_0 \simeq 13.3611603 \text{ Gyr}$ con l'integrale

$$t_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{W(x)}}$$

prova ancora una volta che

$$(4.46) \quad \boxed{t_0 = 13.36116 \text{ Gyr}}$$

è un risultato affidabile nell'ambito del modello MR. •

4.12 Sulla velocità di recessione delle galassie

Combinando la legge di Hubble $\dot{d}_{AB}(t) = H(t)d_{AB}(t)$ per un tempo generico t (paragrafo 1.8) con l'equazione $d_{AB}(t) = a(t, t_0)d_{AB}(t_0)$ otteniamo la velocità di recessione di due galassie

$$(4.47) \quad \boxed{\dot{d}_{AB}(t) = \dot{a}(t, t_0)d_{AB}(t_0)}$$

in termini della loro distanza all'epoca attuale $d_{AB}(t_0)$ e del tasso di crescita del fattore di scala. Nel modello MR questa velocità è data da

$$(4.48) \quad \dot{a}(t, t_0) = \frac{1}{3} \alpha \beta \frac{\sinh(\beta t)}{[\cosh(\beta t) - 1]^{\frac{2}{3}}}$$

Il suo grafico è tracciato nella Figura 4.9.

Nota la distanza attuale $d_{AB}(t_0)$ di due galassie, la velocità di recessione $\dot{d}_{AB}(t)$, che è illimitata nell'intorno di $t = 0$, decresce rapidamente fino ad un minimo di 0.06253447 al tempo $t_q \simeq 7.37949$, dopo il quale comincia a crescere lentamente. Il tempo di minimo t_q non dipende dalla distanza $d_{AB}(t_0)$ ed è determinato dall'equazione $\ddot{a}(t_q, t_0) = 0$. Quindi è il tempo d'inizio dell'espansione accelerata.

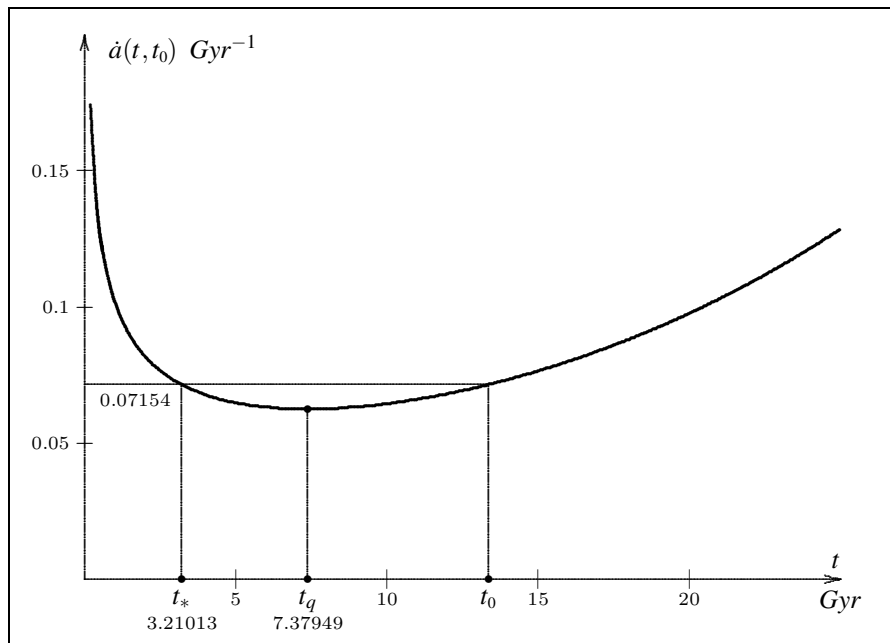


Figura 4.9: La funzione $\dot{a}(t, t_0)$.

La velocità di recessione $\dot{d}_{AB}(t)$ può essere **super-luminale**, può cioè superare la velocità c della luce:

$$(4.49) \quad \dot{d}_{AB}(t) \geq c.$$

Questa circostanza non contraddice i canoni della Relatività perché la velocità di recessione non è la velocità di una particella massiva sottoposta all'azione di una

forza ma è dovuta all'espansione dell'Universo. Nelle unità *Gyr* e *Glyr* che abbiamo fin qui adottato per i tempi e le lunghezze, il valore numerico della velocità della luce è $c = 1$. Quindi, in virtù della (4.47), la **condizione super-luminale** (4.49) è espressa dalla disuguaglianza

$$(4.50) \quad d_{AB}(t_0) \geq \frac{c}{\dot{a}(t, t_0)}, \quad c = 1$$

Di conseguenza,

Teorema 4.12.1 – Due galassie con distanza odierna $d_{AB}(t_0)$ hanno una velocità di recessione super-luminale nell'intervallo temporale dove vale la disuguaglianza (4.50).

La disuguaglianza (4.50) mostra che la funzione

$$(4.51) \quad L(t, t_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{\dot{a}(t, t_0)}, \quad c = 1$$

gioca il ruolo di **confine trans-luminale** marcante la transizione da stati sub-luminali a stati super-luminali e viceversa. Il significato operativo del Teorema 4.12.1 è illustrato nella Figura 4.10.

Nota 4.12.1 – Il confine trans-luminale tocca il suo massimo valore

$$(4.52) \quad L_{\max} \simeq 15.991 \text{ Glyr}$$

al tempo t_q . •

Nota 4.12.2 – Come interpretare la Figura 4.10. Nota la distanza $d_{AB}(t_0)$ di due galassie, si tracci una retta orizzontale corrispondente a questo valore. Se $d_{AB}(t_0) < L_{\max}$ allora questa retta interseca $L(t, t_0)$ in due punti distinti corrispondenti a due tempi $t_1 < t_2$. Di conseguenza la velocità di recessione è sub-luminale nell'intervallo temporale (t_1, t_2) e super-luminale al di fuori di questo. Se invece è $d_{AB}(t_0) > L_{\max}$, allora la velocità di recessione è sempre super-luminale. (iii) In ogni caso, **a ridosso del big-bang la velocità di recessione di ogni coppia di galassie è superluminale.** •

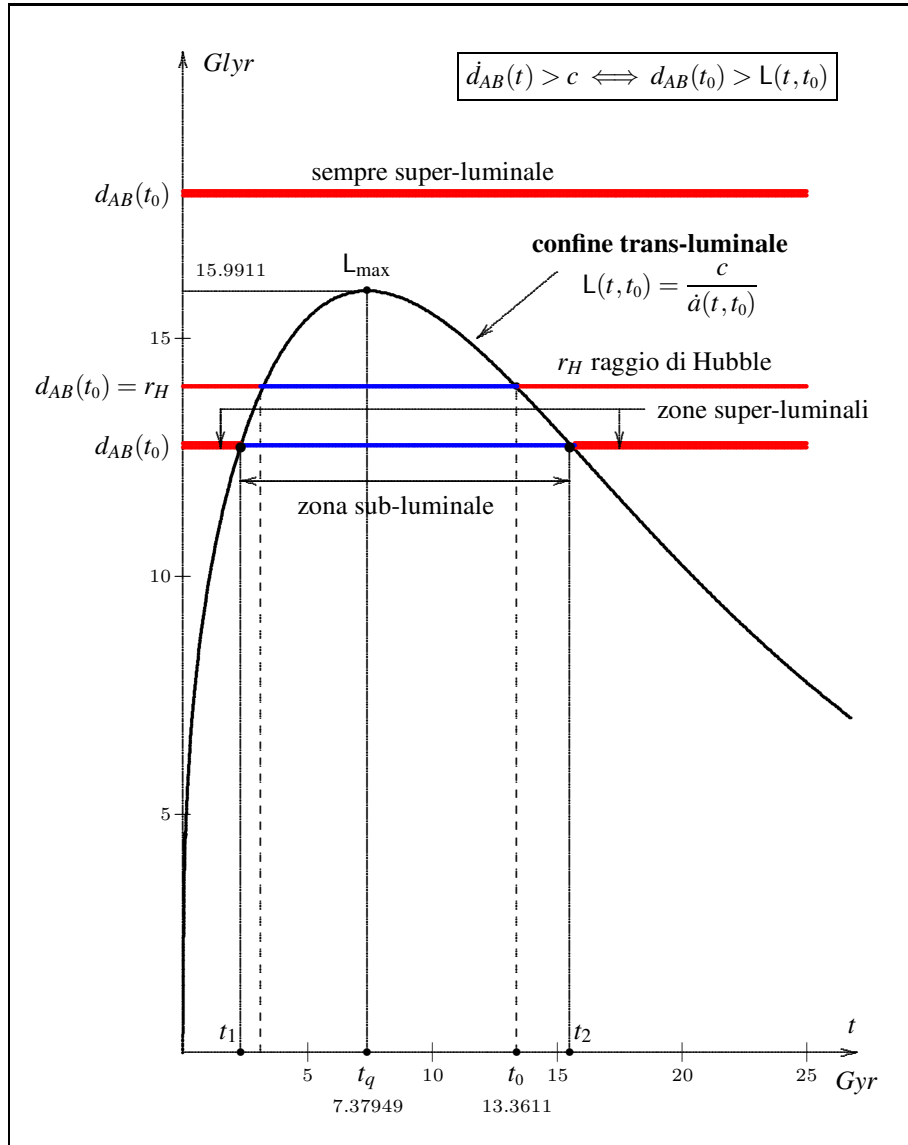


Figura 4.10: Confine trans-luminale $L(t, t_0)$ e velocità di recessione.

Nota 4.12.3 – Introdotta il **raggio di Hubble**

$$(4.53) \quad r_H \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{H_0},$$

il cui valore è

$$(4.54) \quad r_H = \frac{c}{\hat{H}_0} \simeq 13.978 \text{ Glyr},$$

dalla (4.51) si trae

$$(4.55) \quad \boxed{L(t_0, t_0) = \frac{c}{\dot{a}(t_0, t_0)} = \frac{c}{H_0} = r_H}$$

Seguendo le linee tratteggiate della figura si vede bene che *se la distanza odierna $d_{AB}(t_0)$ di due galassie è uguale al raggio di Hubble r_H allora la loro velocità di recessione inizia oggi, cioè al tempo t_0 , ad essere super-luminale e lo rimarrà per sempre.* •

4.13 Proiezione stereografica delle iper-sfere

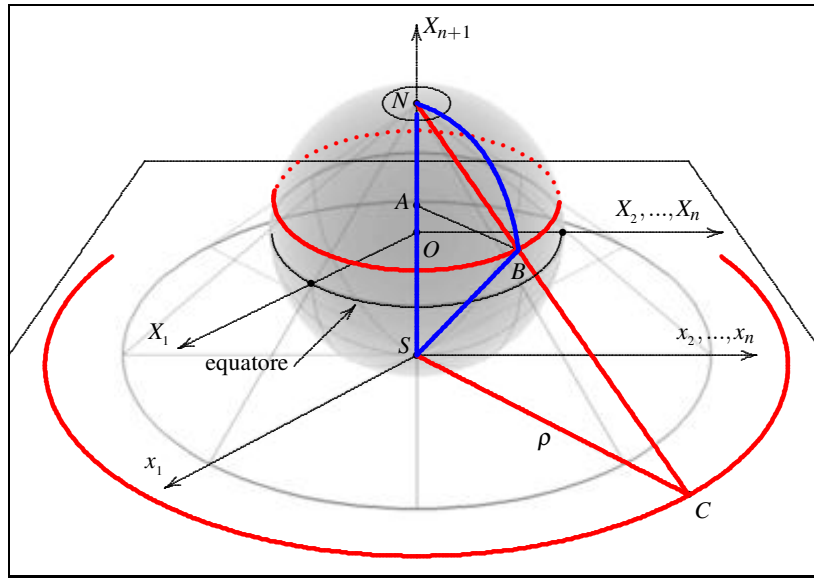


Figura 4.11: Proiezione stereografica di $\mathbb{S}_n: N \rightarrow B \rightarrow C$.

L'equazione

$$(4.56) \quad X_1^2 + \dots + X_{n+1}^2 = r^2.$$

definisce una iper-sfera $\mathbb{S}_n \subset \mathbb{R}^{n+1} = (X_1, X_2, \dots, X_{n+1})$ di raggio r e centro l'origine $O = (0, \dots, 0)$. La Figura 4.11 rappresenta la proiezione stereografica dal polo Nord $N = (0, 0, \dots, r)$ sul piano cartesiano $\mathbb{R}^n = (x_i) = (x_1, \dots, x_n)$ tangente al polo Sud $S = (0, \dots, -r)$. Un generico punto $B = [X_i(B), X_{n+1}(B)]$ di \mathbb{S}_n viene proiettato nel punto $C = [x_i(C)]$ del piano.

Teorema 4.13.1 – La proiezione stereografica $\mathbb{S}_n \mapsto \mathbb{R}^n$ fornisce la rappresentazione parametrica di \mathbb{S}_n

$$(4.57) \quad \boxed{\begin{aligned} X_i &= \frac{d^2}{\rho^2 + d^2} x_i, \\ X_{n+1} &= \frac{\rho^2 - d^2}{\rho^2 + d^2} r, \end{aligned} \quad d \stackrel{\text{def}}{=} 2r, \quad \rho^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

con parametri $x_i \stackrel{\text{def}}{=} x_i(C)$.

Si noti che il polo Nord N è escluso da questa rappresentazione.

Dimostrazione. Stante la similarità dei triangoli NAB e NSC abbiamo

$$(4.58) \quad \frac{BA}{CS} = \frac{NA}{NS}.$$

Siccome

$$\begin{cases} NA = r - X_{n+1}(A) = r - X_{n+1}(B), \\ NS = 2r = d \quad (\text{diametro della sfera}), \end{cases}$$

e

$$\frac{BA}{CS} = \frac{X_i(B)}{x_i(C)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

l'equazione (4.58) è equivalente a

$$(4.59) \quad \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{X_i(B)}{x_i(C)} = \frac{r - X_{n+1}(B)}{d}$$

qualunque sia l'indice i . Segue che

$$(4.60) \quad \begin{cases} X_i(B) = \alpha x_i(C). \\ r - X_{n+1}(B) = \alpha d \implies X_{n+1}(B) = r - \alpha d. \end{cases}$$

Poiché il punto B sta sulla sfera, le sue componenti soddisfano l'equazione

$$\sum_{i=1}^n X_i^2(B) + X_{n+1}^2(B) = r^2.$$

Per la (4.60) questa equazione diventa

$$(4.61) \quad \alpha^2 \sum_{i=1}^n X_i^2(C) + (r - \alpha d)^2 = r^2.$$

Poiché $X_i(C) = x_i(C)$, ponendo

$$x_i \stackrel{\text{def}}{=} x_i(C), \quad \rho^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

abbiamo la sequenza

$$(4.61) \iff \alpha^2 \rho^2 + (r - \alpha d)^2 = R^2 \iff \alpha^2 (\rho^2 + d^2) - 2\alpha r d = 0$$

$$\iff \alpha (\rho^2 + d^2) = d^2 \iff \alpha = \frac{d^2}{\rho^2 + d^2}.$$

Allora dalla (4.60) si trae

$$\begin{cases} X_i(B) = \alpha x_i = \frac{d^2}{\rho^2 + d^2} x_i. \\ X_{n+1}(B) = r - \alpha d = r - \frac{d^2}{\rho^2 + d^2} d = r \left(1 - 2 \frac{d^2}{\rho^2 + d^2} \right) = \frac{\rho^2 - d^2}{\rho^2 + d^2} r. \end{cases}$$

■

Teorema 4.13.2 – Il riferimento olonomo associato alle coordinate (x_i) è costituito dagli n vettori indipendenti tangenti a \mathbb{S}_n così definiti:

$$(4.62) \quad E_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \\ \frac{\partial X_{n+1}}{\partial x_i} \end{bmatrix} = \frac{d^2}{(\rho^2 + d^2)^2} \begin{bmatrix} (\rho^2 + d^2) \delta_{ij} - 2x_i x_j \\ 4r x_i \end{bmatrix}.$$

Dimostrazione. [A]: $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{\rho^2 + d^2} = -2(\rho^2 + d^2)^{-2} x_i.$

[B]: $\left[\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\rho^2 - d^2}{\rho^2 + d^2} = \frac{2x_i(\rho^2 + d^2) - (\rho^2 - d^2)2x_i}{(\rho^2 + d^2)^2} = \frac{4d^2}{(\rho^2 + d^2)^2} x_i. \right.$

[A] $\implies \left[\begin{aligned} \frac{\partial X_j}{\partial x_i} &= x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{d^2}{\rho^2 + d^2} + \frac{d^2}{\rho^2 + d^2} \delta_{ij} \\ &= d^2 [-2(\rho^2 + d^2)^{-2} x_i x_j + (\rho^2 + d^2)^{-1} \delta_{ij}] \\ &= d^2 (\rho^2 + d^2)^{-2} [(\rho^2 + d^2) \delta_{ij} - 2x_i x_j] \quad \text{[C]}. \end{aligned} \right.$

[B] $\implies \left[\frac{\partial X_{n+1}}{\partial x_i} = r \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\rho^2 - d^2}{\rho^2 + d^2} = 4r d^2 (\rho^2 + d^2)^{-2} x_i \quad \text{[D]}. \right.$

[C]+[D] $\implies (4.62).$ ■

Teorema 4.13.3 – La metrica euclidea canonica di \mathbb{R}^{n+1} induce una metrica riemanniana su \mathbb{S}_n le cui componenti g_{ij} nelle coordinate (x_i) sono

$$(4.63) \quad g_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} E_i \cdot E_j = \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\sum_i x_i^2}{r^2} \right)^{-2} \delta_{ij}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} g_{ij} &\stackrel{\text{def}}{=} E_i \cdot E_j = \\ &\frac{d^4}{(\rho^2 + d^2)^4} \sum_k \begin{bmatrix} (\rho^2 + d^2) \delta_{ik} - 2x_i x_k \\ 4r x_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (\rho^2 + d^2) \delta_{kj} - 2x_k x_j \\ 4r x_j \end{bmatrix} \\ &= \frac{d^4}{(\rho^2 + d^2)^4} \left((\rho^2 + d^2)^2 \delta_{ij} - 4(\rho^2 + d^2) x_i x_j + 4\rho^2 x_i x_j + 16r^2 x_i x_j \right) \\ &= \frac{d^4}{(\rho^2 + d^2)^4} \left((\rho^2 + d^2)^2 \delta_{ij} - 4d^2 x_i x_j + 16r^2 x_i x_j \right) = \frac{d^4}{(\rho^2 + d^2)^2} \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Essendo

$$\frac{d^4}{(\rho^2 + d^2)^2} = \left(1 + \frac{\rho^2}{d^2} \right)^{-2}$$

si trova la (4.63). ■

Nota 4.13.1 – Il confronto della (4.63) con la (1.18) mostra che \mathbb{S}_n è una varietà con curvatura costante $K = 1/r^2$ e che le coordinate parametriche (x_i) sono coordinate di curvatura. •

Nota 4.13.2 – Una geodetica di \mathbb{S}_3 è un cerchio massimo, vale a dire l'intersezione della sfera con un 3-piano passante per l'origine. Si dimostra che un arco geodetico di ampiezza ψ (angolo al centro della sfera) ha lunghezza uguale a ψR . Quindi la lunghezza di un cerchio massimo è $2\pi R$. •

4.14 Volume di una calotta iper-sferica

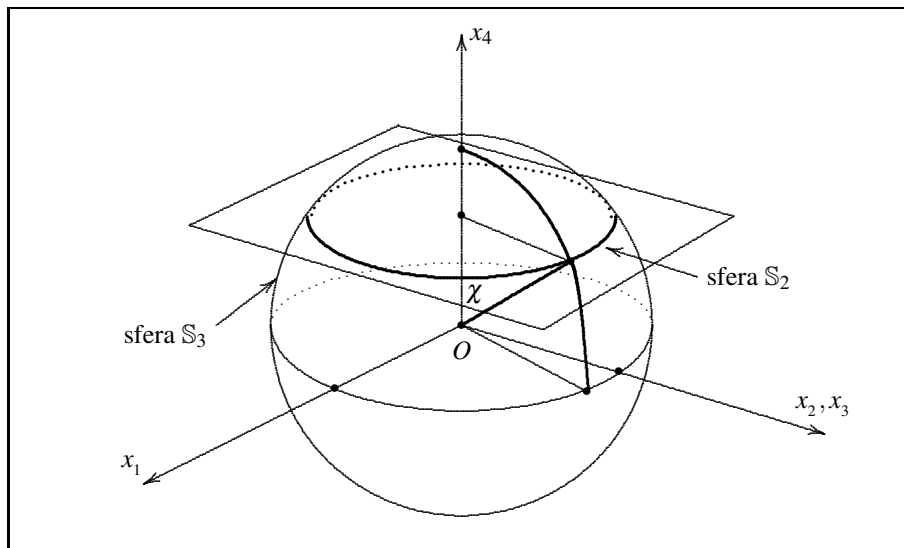


Figura 4.12: $S_2 \subset S_3 \subset \mathbb{R}^4$.

L'intersezione della iper-sfera S_3 di raggio r

$$\sum_a x_a^2 + x_4^2 = r^2, \quad a = 1, 2, 3.$$

con l'iper-piano $x_4 = r \cos \chi$, $\chi \in [0, \pi]$, è la sfera $S_2 \subset \mathbb{R}^3 = (x_a)$

$$\sum_a x_a^2 = r^2 \sin^2 \chi$$

di raggio $r \sin \chi$. L'iper-sfera S_3 ammette una rappresentazione parametrica di parametri (χ, u, v)

$$\begin{cases} x_a = r \sin \chi \xi_a(u, v), \\ x_4 = r \cos \chi, \end{cases}$$

dove $x_a = \xi_a(u, v)$ è una qualunque rappresentazione parametrica della sfera di raggio unitario $\sum_a \xi_a^2 = 1$. Poiché

$$\begin{cases} dx_a = r (\cos \chi \xi_a d\chi + \sin \chi d\xi_a), \\ dx_4 = -r \sin \chi d\chi, \end{cases}$$

il quadrato dell'elemento d'arco su \mathbb{S}_3 è

$$\begin{cases} dS^2 = \sum_a dx_a^2 + dx_4^2 \\ = r^2 \left(\cos^2 \chi d\chi^2 \sum_a \xi_a^2 + \sin^2 \chi \sum_a d\xi_a^2 \right) + r^2 \sin^2 \chi d\chi^2 \\ = r^2 \left(\cos^2 \chi d\chi^2 + \sin^2 \chi \sum_a d\xi_a^2 \right) + r^2 \sin^2 \chi d\chi^2, \end{cases}$$

$$\boxed{dS^2 = r^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\sigma^2)}$$

dove

$$d\sigma^2 = \sum_a d\xi_a^2$$

è il quadrato dell'elemento d'arco sulla sfera unitaria. Possiamo usare coordinate sferiche $(u, v) = (\theta, \phi)$ con $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi]$, per cui

$$d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$$

e il tensore metrico su \mathbb{S}_3 risulta essere

$$[g_{ab}] = r^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \chi & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2 \chi \sin^2 \theta \end{bmatrix}.$$

Di qui segue

$$g \stackrel{\text{def}}{=} \det[g_{ij}] = r^6 \sin^4 \chi \sin^2 \theta, \quad \sqrt{g} = r^3 \sin^2 \chi \sin \theta,$$

per cui l'elemento di volume è

$$dV = \sqrt{g} d\chi d\theta d\phi = r^3 \sin^2 \chi \sin \theta d\chi d\theta d\phi.$$

Essendo

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x) + \text{costante},$$

il volume della calotta sferica di raggio r e semi-ampiezza ψ è dato dall'integrale

$$V(r, \psi) = r^3 \int_0^\psi \sin^2 \chi d\chi \cdot \int_0^\pi \sin \theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\phi = r^3 \frac{1}{2} \pi (\psi - \sin \psi \cos \psi) \cdot 2 \cdot 2\pi.$$

Di conseguenza,

$$(4.64) \quad \boxed{V(r, \psi) = 2\pi r^3 (\psi - \sin \psi \cos \psi)}$$

Ponendo $\psi = \pi$ si ottiene il volume dell'intera sfera \mathbb{S}_3 :

$$(4.65) \quad \boxed{V = 2\pi^2 r^3}$$

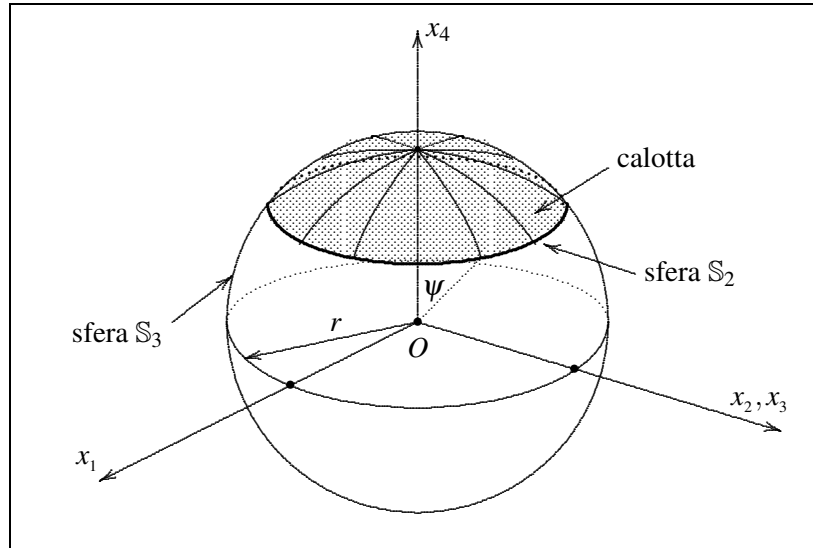


Figura 4.13: Calotta sferica di \mathbb{S}_3 .

4.15 Modelli con costante cosmologica nulla

Per $\Lambda = 0$ l'equazione di Weierstrass (3.44) diventa

$$(4.66) \quad \dot{a}^2 = H_0^2 \left[\Omega_m a^{-1} + \Omega_r a^{-2} \right] - c^2 K_0.$$

Teorema 4.15.1 – *Nei modelli $\Lambda = 0$ la curvatura spaziale non può essere nulla.*

Dimostrazione. Con $\Lambda = 0$ l'equazione (3.55) si riduce a

$$(4.67) \quad \Omega_m(t_0) + \Omega_r(t_0) = 1,$$

e con le stesse argomentazioni della dimostrazione del Teorema 3.8.1 si giunge ad un assurdo. ■

Nella Figura 4.14 sono messe a confronto le due funzioni (4.66) corrispondenti ai due segni di K_0 e la funzione di Weierstrass (4.19) del modello MR.

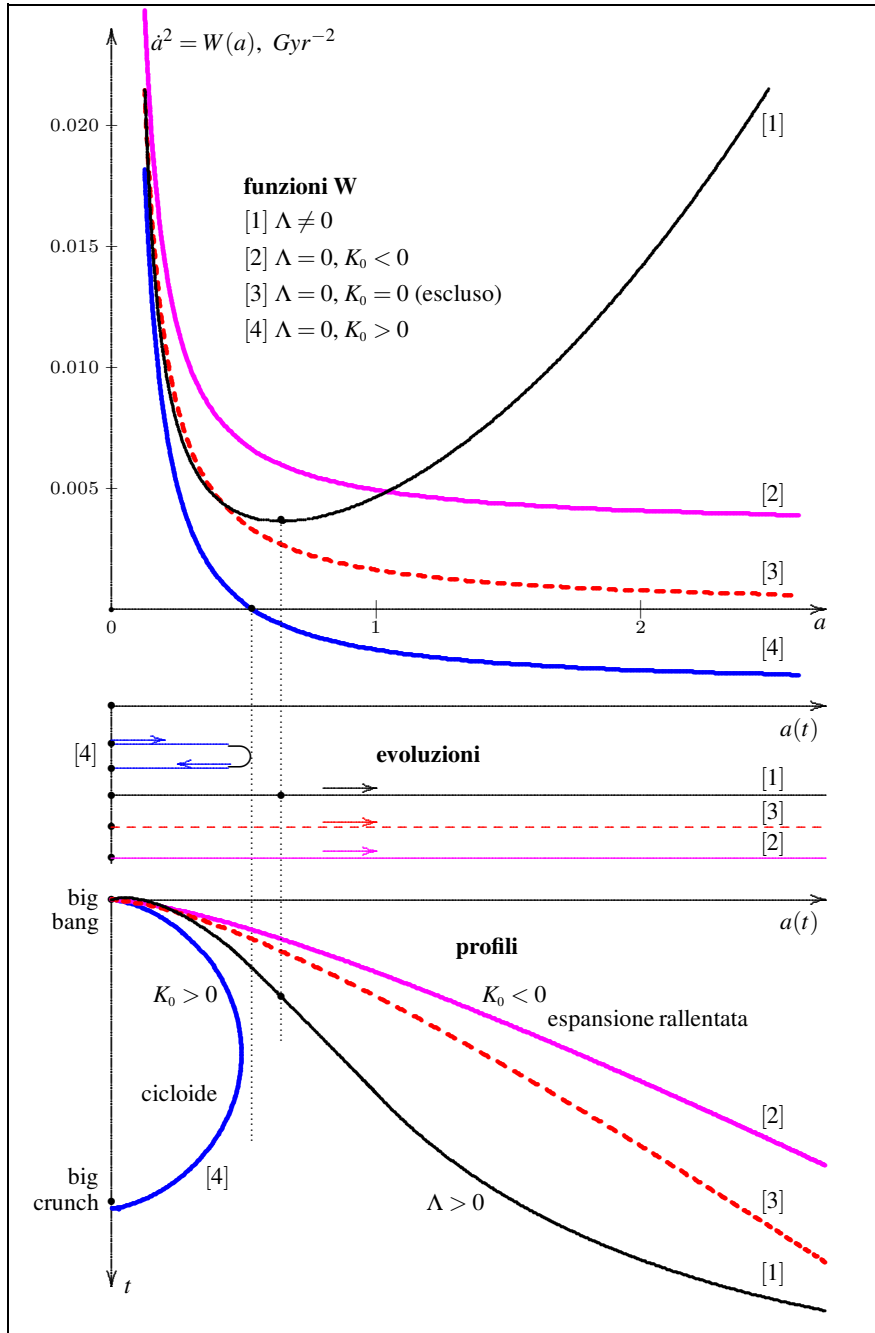


Figura 4.14: Confronto dei profili con $\Lambda = 0$ e $\Lambda \neq 0$.

Per $K_0 < 0$, è sempre $W(a) > 0$: nessun punto di arresto. L'Universo ha una espansione lentamente decelerata dall'inizio fino a $+\infty$.

Per $K_0 > 0$, $W(a)$ ha uno zero semplice. L'Universo ha un'evoluzione di tipo cicloidale con un big-bang e un big-crunch in un tempo finito.

Osserviamo che nel caso $K_0 > 0$ c'è un cambiamento discontinuo dei profili nel passaggio dal modello $\Lambda = 0$ al modello $\Lambda > 0$. *Questo fatto attribuisce al modello $\Lambda = 0$ un inaccettabile carattere di instabilità.*

Per $K_0 > 0$ il profilo dell'Universo è simile ad una cicloide. In effetti si tratta di una vera cicloide nel caso in cui si trascuri la densità di radiazione. Infatti, se si pone $\Omega_r = 0$ nell'equazione (4.66)

$$\dot{a}^2 = H_0^2 \Omega_m a^{-1} - c^2 K_0$$

si verifica che le soluzioni sono espresse dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} ct = \frac{B}{\sqrt{K_0}} (\theta - \sin \theta), \\ a = B(1 - \cos \theta), \end{cases} \quad B \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \frac{H_0^2}{c^2} \frac{\Omega_m}{K_0},$$

dove B è una costante adimensionale. Il fattore di scala può essere sostituito dal raggio $r = r_0 a$ dell'Universo:

$$(4.68) \quad \begin{cases} ct = B r_0 (\theta - \sin \theta), \\ r = B r_0 (1 - \cos \theta). \end{cases}$$

Nel piano $(x, y) = (ct, r)$ queste equazioni rappresentano la cicloide descritta da un punto V sul bordo di un cerchio di raggio $R = B r_0$ rotolante sull'asse x , come mostrato nella Figura 4.15. Il parametro θ è l'angolo di rotazione del cerchio, con $\theta = 0$ per $t = 0$.

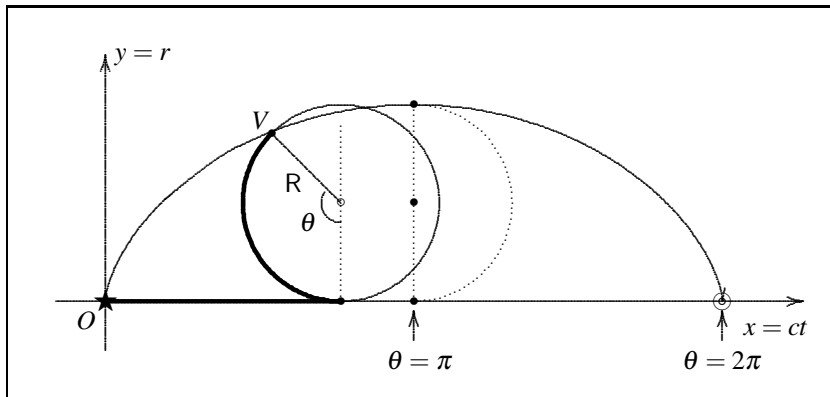


Figura 4.15: Evoluzione del raggio cosmico r per $K_0 > 0$ e $\Omega_r = 0$.

Capitolo 5

Trasmissione di segnali e visibilità

5.1 Trasmissione di fotoni

I fotoni sono delle particelle molto strane: non sono mai ferme e hanno la medesima velocità c in qualunque riferimento. Questo è in accordo con la teoria della propagazione delle onde elettromagnetiche: in virtù del Teorema 2.4.2, nello spazio-tempo le storie dei fotoni si identificano con i raggi elettromagnetici, di frequenza visibile o non visibile. Pertanto, i fotoni (in senso lato) sono il veicolo con cui si trasmettono segnali e quindi considereremo i termini **fotone** e **segnale** come sinonimi.

La visione corrente dell'Universo primordiale pone a circa 377000 anni dopo il big-bang la transizione da un cosmo opaco ad un cosmo trasparente. In quest'epoca, detta di **ricombinazione**, si formano i primi atomi neutri che raggiungono il loro stato di energia minima generando fotoni (**photon decoupling**) che ancor oggi si possono intercettare come **radiazione cosmica di fondo**. Ma in quel tempo le stelle non si sono ancora formate e non ci sono sorgenti di luce. La prime stelle e galassie si formano intorno a 400-700 milioni di anni dopo il big-bang.

Per lavorare su quest'argomento associamo ad ogni galassia A un **tempo iniziale di emissione** t_{bA} in cui A inizia ad emettere fotoni. Tutti questi tempi appartengono ad un intervallo temporale chiamato **epoca di reionizzazione** (EoR) il cui inizio è, vedi la (4.29),

(5.1)

$$t_{re} \simeq 0.54409 \text{ Gyr}$$

Nel paragrafo 1.12 abbiamo identificato lo spazio di riferimento con uno strumento chiamato **monitor cosmico** che offre una visione virtuale dell'Universo dove le galassie sono punti fissi e le particelle vaganti sono visibili come curve parametrizzate dal tempo cosmico t . In questo e nel prossimo capitolo faremo ampio uso di questo strumento.

Il postulato-ponte relativistico stabilisce che i fotoni sono caratterizzati dall'equazione (2.7)

$$\boxed{a(t, t_{\sharp}) \frac{ds_{\sharp}}{dt} = c}$$

dove ds_{\sharp} è l'elemento d'arco nello spazio di riferimento. Questa equazione implica che:

(i) Se $\lim_{t \rightarrow t_{\alpha}} a(t) = 0$ (t_{α} inizio dell'Universo) allora

$$\lim_{t \rightarrow t_{\alpha}} \frac{ds_{\sharp}}{dt} = +\infty.$$

Questo significa che¹

Teorema 5.1.1 – Se $\lim_{t \rightarrow t_{\alpha}} a(t) = 0$ allora nel monitor cosmico la velocità s_{\sharp} di un fotone tende a $+\infty$ quando t tende all'inizio dell'Universo.

Si noti che s_{\sharp} non è la velocità peculiare.

(ii) Se $\lim_{t \rightarrow t_{\omega}} a(t) = +\infty$ (t_{ω} fine dell'Universo) allora

$$\lim_{t \rightarrow t_{\omega}} \frac{ds_{\sharp}}{dt} = 0.$$

Questo significa che *nel monitor cosmico la velocità di un fotone tende a zero quando t tende alla fine dell'Universo*. In altre parole, la sua traiettoria tende ad un punto fisso, cioè ad una galassia. A sua volta, questo equivale a dire che

Teorema 5.1.2 – Se $\lim_{t \rightarrow t_{\omega}} a(t) = +\infty$ allora, nell'avvicinarsi alla fine dell'Universo, la storia di un fotone tende a toccare la storia di una galassia.

Entrambe le ipotesi di questi teoremi sono soddisfatte nel modello MR.

5.2 Relazione emissione-ricezione

In questo capitolo verranno considerati due corpi cosmici (galassie) A e B le cui storie sono geodetiche del genere tempo appartenenti alla congruenza del fluido cosmico:

(i) il corpo A è capace di emettere segnali in forma di fotoni in senso lato cioè in forma di particelle le cui storie sono geodetiche nulle dello spazio-tempo;

(ii) il corpo B è dotato di strumenti capaci di intercettare fotoni provenienti dal cosmo (supponiamo di stare in B).

¹ Si vedano anche il Teorema 2.3.5 e la Nota 2.3.2.

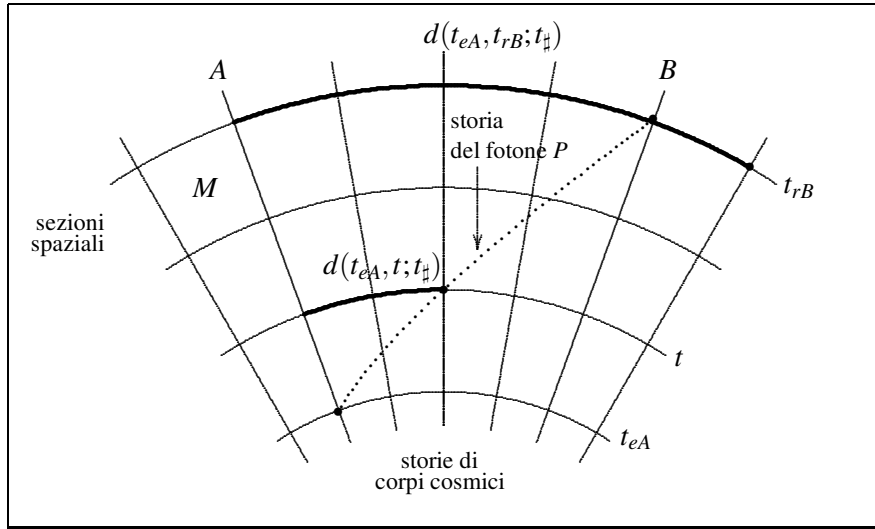


Figura 5.1: Storia di un fotone P emesso da A e captato da B .

Si supponga che un fotone P venga emesso da A ad un certo **tempo di emissione** t_{eA} e che la sua storia incroci la storia di B ad un **tempo di ricezione** t_{rB} , come illustrato nella Figura (5.1).

Teorema 5.2.1 – *Un fotone emesso da A al tempo t_{eA} raggiunge B al tempo t_{rB} se e solo se è soddisfatta l'uguaglianza*

$$(5.2) \quad c \int_{t_{eA}}^{t_{rB}} \frac{dt}{a(t, t_{\#})} = d_{AB}(t_{\#})$$

dove $d_{AB}(t_{\#})$ è la distanza di A da B misurata nello spazio di riferimento $S_{t_{\#}}$.

Chiamiamo la (5.2) **relazione di emissione-ricezione**.

Dimostrazione. La progressione di P sul monitor cosmico è illustrata nella Figura (5.2).

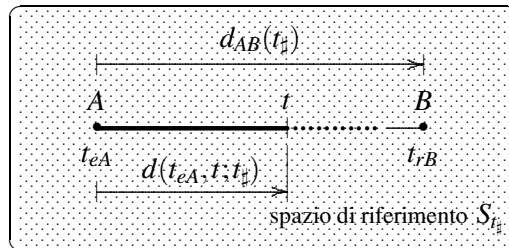


Figura 5.2: Traiettoria di un fotone osservata sul monitor cosmico.

Poiché la traccia di P è una geodetica, la traiettoria di P è rappresentata da un segmento di retta di estremi A a B . La sua lunghezza è $d_{AB}(t_{\#})$. Denotiamo con

$$d(t_{eA}, t; t_{\#})$$

la **distanza percorsa** dal punto P al tempo t . Dall'equazione (2.7) si trae che il punto P si muove con velocità

$$(5.3) \quad \frac{ds_{\#}}{dt} = \frac{c}{a(t, t_{\#})}.$$

Allora la distanza percorsa da P ad un qualunque tempo $t > t_{eA}$ è data da

$$(5.4) \quad \boxed{d(t_{eA}, t; t_{\#}) = c \int_{t_{eA}}^t \frac{dt}{a(t, t_{\#})}}$$

Per $t = t_{rB}$ risulta $d(t_{eA}, t_{rB}; t_{\#}) = d_{AB}(t_{\#})$. ■

Nota 5.2.1 – L'integrale

$$(5.5) \quad \eta(t; t_{\#}) = \int_0^t \frac{dt}{a(t, t_{\#})}$$

con $t_{\#} = t_0$ è chiamato dai cosmologi **tempo conforme**. •

La relazione emissione-ricezione (5.2) ha una notevole interpretazione geometrica illustrata nella Figura 5.3.

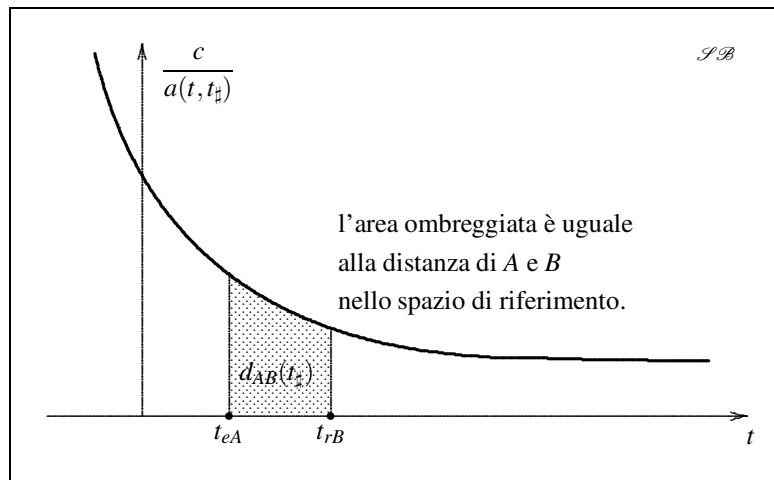


Figura 5.3: Interpretazione geometrica dell'equazione (5.2).

L'area ombreggiata delimitata dal grafico di $c/a(t, t_{\#})$ sopra l'intervallo emissione-ricezione $[t_{eA}, t_{rB}]$ è uguale all'integrale della (5.2) e quindi uguale alla distanza di riferimento $d_{AB}(t_{\#})$. Si noti che, dal punto di vista dimensionale, questa 'area' è in effetti un tempo \times velocità, ha cioè la dimensione di una lunghezza.

Teorema 5.2.2 – *La relazione emissione-ricezione (5.2) non dipende dalla scelta del tempo di riferimento $t_{\#}$.*

Dimostrazione. In virtù della (1.26), $a(t, t_{\#}) = a(t, t_b) a(t_b, t_{\#})$, abbiamo

$$d(t_{eA}, t; t_{\#}) = c \int_{t_{eA}}^t \frac{dt}{a(t, t_{\#})} = \frac{c}{a(t_b, t_{\#})} \int_{t_{eA}}^t \frac{dt}{a(t, t_b)} = a(t_{\#}, t_b) d(t_{eA}, t; t_b).$$

Valendo la relazione (1.29) $d_{AB}(t_{\#}) = a(t_{\#}, t_b) d_{AB}(t_b)$ fra le distanze, segue che

$$d(t_{eA}, t; t_b) = d_{AB}(t_b)$$

per ogni t , in particolare per $t = t_{rB}$. ■

Grazie a questa indipendenza possiamo prendere il tempo presente t_0 non solo come tempo di riferimento ma anche come tempo di ricezione t_{rB} . Allora la relazione emissione-ricezione (5.2) diventa

$$(5.6) \quad \boxed{c \int_{t_{eA}}^{t_0} \frac{dt}{a(t, t_0)} = d_{AB}(t_0)}$$

Questa formula fornisce la distanza odierna di una galassia A da B quando l'osservatore in B non solo conosce il tempo di emissione t_{eA} del fotone ma anche il profilo $a(t, t_0)$ dell'Universo. Per il modello MR il profilo è dato dalla (4.38)

$$a(t, t_0) = \alpha \sqrt[3]{\cosh(\beta t) - 1} \quad \begin{cases} \alpha \simeq 0.607247 \\ \beta \simeq 0.178366 \text{ Gyr}^{-1}. \end{cases}$$

La funzione sotto integrazione nella (5.6) è tracciata nella Figura 5.4. In accordo con l'interpretazione geometrica illustrata nella Figura 5.3, l'area ombreggiata moltiplicata per c fornisce la distanza attuale $d_{AB}(t_0)$.

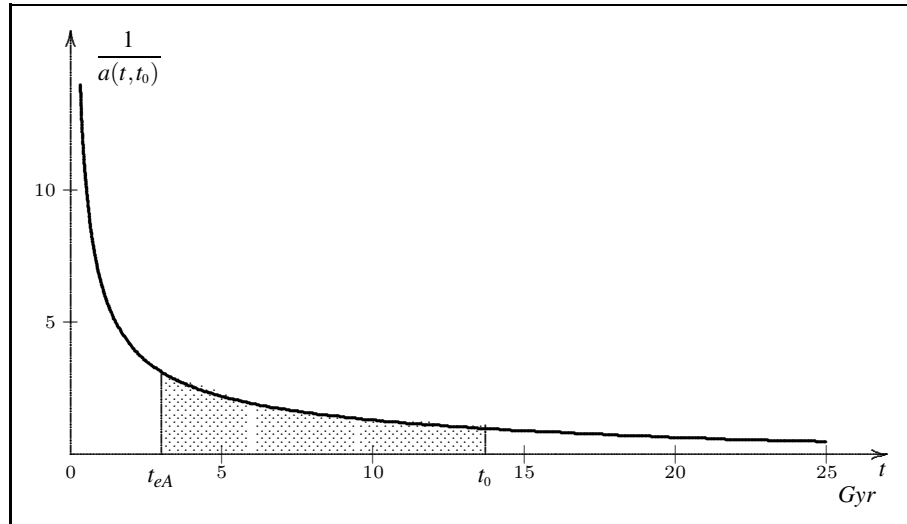


Figura 5.4: La funzione $1/a(t, t_0)$ nel modello MR.

Nota 5.2.2 – Se nell’equazione (5.6) poniamo come margine inferiore d’integrazione il tempo di reionizzazione $t_{re} = 0.54409$, cioè il tempo in cui i corpi cosmici iniziano ad emettere luce, allora *otteniamo la misura della massima distanza dei corpi celesti osservabili oggi*:

$$(5.7) \quad \boxed{\max d_{AB}(t_0) = c \int_{t_{re}}^{t_0} \frac{dt}{a(t, t_0)} \simeq 29.59185 \text{ Glyr}} \quad \bullet$$

Nota 5.2.3 – L’equazione (5.6) può essere utilizzata per risolvere il problema inverso: *conoscendo la distanza $d_{AB}(t_0)$ determinare il tempo di emissione t_{eA}* (Figura 5.5 e Tabella 5.1). •

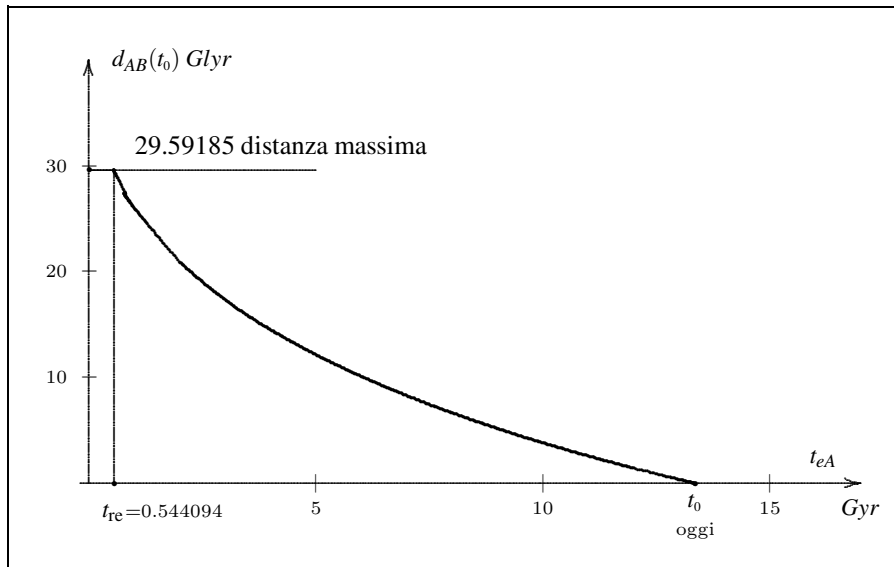


Figura 5.5: Tempo di emissione t_{eA} vs. distanza attuale $d_{AB}(t_0)$.

Tabella 5.1: $t_{eA} \mapsto d_{AB}(t_0)$.

t_{eA}	$d_{AB}(t_0)$	t_{eA}	$d_{AB}(t_0)$
t_{re}	29.59185	6	10.09304
.6	29.06055	7	8.27914
.7	28.18729	8	6.65050
.8	27.39381	9	5.17287
1	25.98672	10	3.82179
2	20.89091	11	2.57909
3	17.32891	12	1.43079
4	14.50813	13	0.36588
5	12.14273	t_0	0

5.3 Universo visibile e Universo non visibile

Diciamo che A è **visibile** da B alla data t se in tale data B intercetta fotoni provenienti da A . Assumiamo che *ogni corpo A abbia un proprio tempo di emissione iniziale t_{bA} , tempo nel quale inizia ad emettere fotoni* che chiamiamo **fotoni primordiali**.

Osserviamo la progressione di un fotone primordiale P_A nello spazio di riferimento odierno S_{t_0} .²

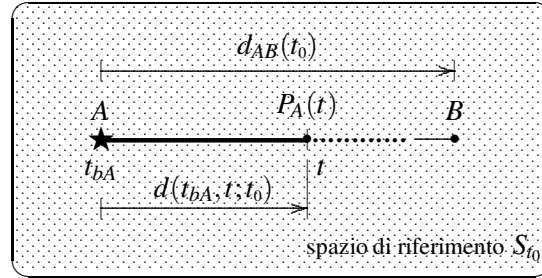


Figura 5.6: Progressione in S_{t_0} di un fotone primordiale P_A .

Si noti che:

(i) Nello spazio di riferimento A e B sono punti fissi, la cui distanza è $d_{AB}(t_0)$.

(ii) P_A viaggia su di una linea da A verso B . Questa linea è la proiezione su S_{t_0} della storia di P_A nello spazio-tempo, che è una geodetica di genere luce. La distanza misurata in S_{t_0} e percorsa in un qualunque tempo $t > t_{bA}$ è data da, si veda l'equazione (5.4),

$$(5.8) \quad d(t_{bA}, t; t_0) = c \int_{t_{bA}}^t \frac{dt}{a(t, t_0)}$$

Questa è una funzione crescente di t che chiamiamo **progressione di un fotone primordiale**.

Teorema 5.3.1 – Se la funzione $d(t_{bA}, t; t_0)$ è limitata e se

$$d_{AB}(t_0) > \lim_{t \rightarrow +\infty} d(t_{bA}, t; t_0)$$

allora P_A non raggiunge mai B .

Dimostrazione. La Figura 5.7 è auto-esplicativa. ■

² Si ponga $t_{\ddagger} = t_0$ e $t_{eA} = t_{bA}$ nella Figura 5.2.

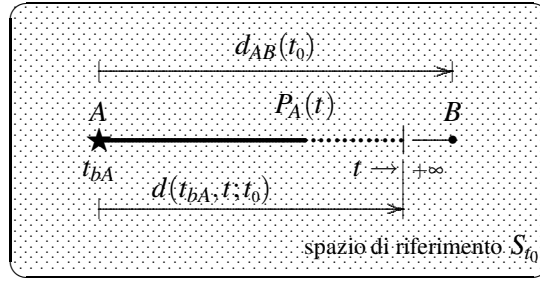


Figura 5.7: Teorema 5.3.1.

Teorema 5.3.2 – Se $d_{AB}(t_0) = d(t_{bA}, t_0; t_0)$ allora A incomincia oggi ad essere visibile da B.

Dimostrazione. La Figura 5.8 è auto-esplicativa. ■

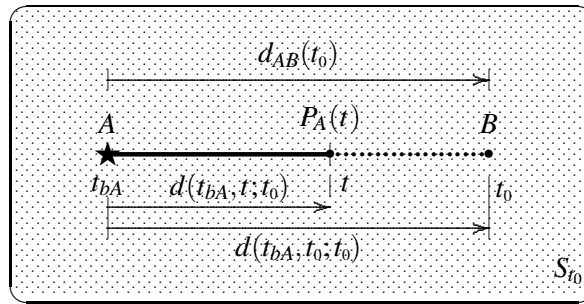


Figura 5.8: Teorema 5.3.2.

Ricordiamo che il tempo di reionizzazione t_{re} è il minimo di tutti i tempi t_{bA} di emissione dei fotoni primordiali. Pertanto la distanza

$$(5.9) \quad r_{vis}(t) \stackrel{\text{def}}{=} d(t_{re}, t; t_0) = c \int_{t_{re}}^t \frac{dt}{a(t, t_0)}$$

ottenuta dall'equazione (5.8) rimpiazzando t_{bA} con il tempo di reionizzazione t_{re} è la *massima distanza di una galassia A visibile da B al tempo t*. La chiamiamo **raggio di visibilità dell'Universo al tempo t**. L'utilizzo del termine 'raggio' sarà chiarito fra breve. Si noti che questa **relazione di visibilità** è reciproca rispetto ad A e B.

La rappresentazione numerica del raggio di visibilità nel modello MR il cui profilo è dato dalla (4.38) è³

$$(5.10) \quad r_{vis}(t) = \frac{c}{0.607247} \int_{t_{re}}^t \frac{dt}{\sqrt[3]{\cosh(0.178366 * t) - 1}}$$

³ In questa formula dobbiamo porre $c = 1$ affinché il risultato sia in unità *Glyr* (paragrafo 4.4).

Il grafico è tracciato nella Figura 5.9 dove sono evidenziati due numeri significativi:

- Il valore attuale del raggio di visibilità

$$(5.11) \quad r_{\text{vis}}(t_0) \simeq 29.59185 \text{ Glyr}$$

Questa è la distanza $d_{AB}(t_0)$ di un corpo A che inizia oggi ad essere visibile da B , ovvero *la massima distanza odierna di due galassie reciprocamente visibili a partire da oggi*. La chiamiamo **raggio di visibilità attuale**.

- Il limite

$$(5.12) \quad r_{\text{inv}} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} r_{\text{vis}}(t) \simeq 45.61382 \text{ Glyr}$$

Essendo $r_{\text{inv}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} d(t_{\text{re}}, t; t_0)$, secondo il Teorema 5.3.1 applicato al caso $t_{bA} = t_{\text{re}}$, se

$$(5.13) \quad d_{AB}(t_0) > r_{\text{inv}}$$

allora nessun fotone emesso da una qualunque galassia A raggiungerà B in futuro. In altri termini, un osservatore in B non vedrà mai le galassie A la cui distanza attuale $d_{AB}(t_0)$ è superiore a $r_{\text{inv}} \simeq 45.61382 \text{ Glyr}$ (5.12). Questo è il **raggio di invisibilità assoluta dell'Universo** cioè il **raggio dell'Universo per sempre invisibile ad un qualunque osservatore B** .

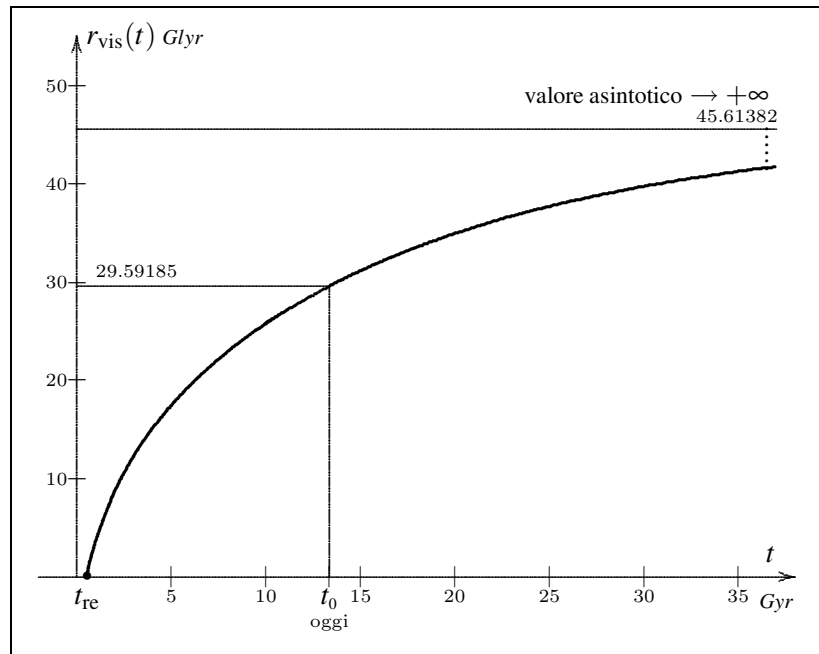


Figura 5.9: Raggio dell'Universo visibile $r_{\text{vis}}(t)$.

Nella Figura 5.10 sono tracciate le progressioni $d(t_{bA}, t; t_0)$ dei fotoni primordiali per alcuni valori di t_{bA} (2.5, 5, 7.5, 10). Il numero $d(t_{bA}, t_0; t_0)$ è la *distanza attuale* $d_{AB}(t_0)$ della galassia A che comincia da oggi ad essere visibile da B (Teorema 5.3.2).

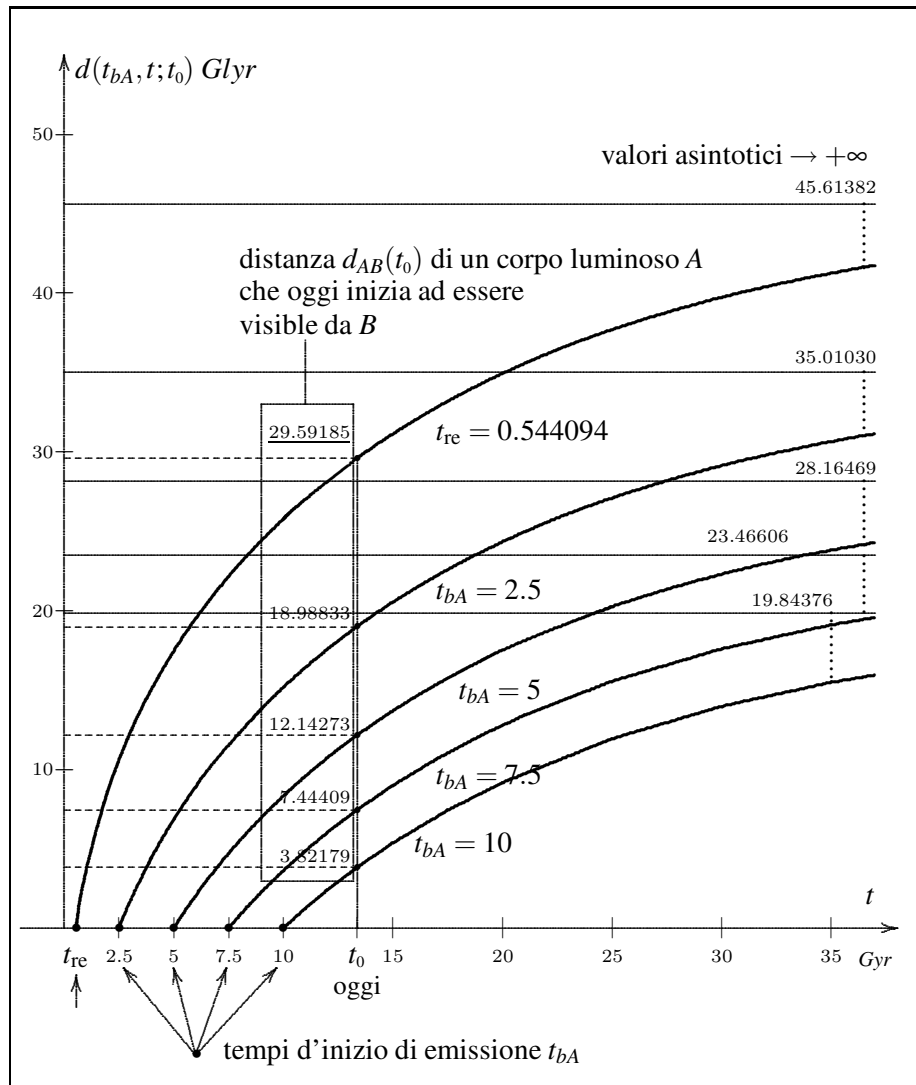


Figura 5.10: Progressione dei fotoni primordiali $d(t_{bA}, t; t_0)$.

Nota 5.3.1 – Il raggio $r_{\text{vis}}(t)$ è chiamato dai cosmologi **particle horizon** o anche **cosmological horizon**. A causa dell'espansione dell'Universo il suo valore odierno $r_{\text{vis}}(t_0)$ non è semplicemente l'età dell'Universo t_0 moltiplicata per la velocità della luce, come per l'**orizzonte di Hubble** (vedi nota seguente) ma piuttosto la velocità

della luce moltiplicata per il tempo conforme, come si può constatare combinando la (5.9) con la (5.5). Il *particle horizon* di oggi rappresenta l'estrema distanza dalla quale possiamo trarre informazioni sul passato dell'Universo. •

Nota 5.3.2 – Un altro tipo di ‘orizzonte’ è l'**Hubble horizon** o **Hubble radius**. Stabilisce il confine tra particelle che si muovono sempre più lentamente della velocità della luce rispetto a un osservatore in un dato momento ed è definito da

$$(5.14) \quad r_H(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{H(t)}$$

In effetti, al paragrafo 4.12, Nota 4.12.3, si è inteso come **raggio di Hubble** il valore odierno di r_H

$$r_H \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{H_0}$$

ed abbiamo osservato che *se la distanza odierna $d_{AB}(t_0)$ di due galassie è uguale al raggio di Hubble r_H allora la loro velocità di recessione inizia oggi, cioè al tempo t_0 , ad essere super-luminale e lo rimarrà per sempre*. Ritorniamo su questo argomento al paragrafo 5.5. •

Nota 5.3.3 – I cosmologi chiamano **event horizon** (orizzonte degli eventi) la minima distanza dalla quale la luce emessa ora potrà mai raggiungere l'osservatore in futuro. Vista la (5.13), questa distanza coincide con il nostro *raggio di invisibilità assoluta* r_{inv} . •

5.4 Configurazione attuale dell'Universo

Il grande cerchio che appare nella Figura 5.11⁴ rappresenta la sfera tridimensionale \mathbb{S}_3 di raggio $r_0 \simeq 1460.42 \text{ Glyr}$ (4.15) dove al tempo presente t_0 sono distribuite le galassie. Stante l'estremamente piccola curvatura di questa sfera, per un osservatore che si trovi in una qualsiasi galassia B l'Universo appare piatto almeno in un intorno di circa 29.59 miliardi di anni luce, come mostrato nella parte alta della figura. Questa distanza è il **raggio di visibilità attuale** $r_{\text{vis}}(t_0)$ (5.11) dell'Universo. Questo raggio s'intende misurato sulla sfera \mathbb{S}_3 e su questa determina una calotta sferica di semi-ampiezza $\psi_{\text{vis}}(t_0)$.

A sua volta, il **raggio di invisibilità dell'Universo** $r_{\text{inv}} \simeq 45.61 \text{ Glyr}$ (5.12), oltre il quale l'Universo resta per sempre invisibile a B , determina una calotta sferica di semi-ampiezza ψ_{inv} .

⁴Già presentata nella Prefazione, Figura 2.

Entrambi gli angoli $\psi_{\text{vis}}(t_0)$ e ψ_{inv} non sono riportati in scala rispetto al resto del disegno. Essi sono in realtà molto piccoli e risulterebbero quindi quasi impercettibili:

$$(5.15) \quad \begin{cases} \psi_{\text{vis}}(t_0) = \frac{r_{\text{vis}}(t_0)}{r_0} = \frac{29.59185}{1460.429942} \simeq 0.020262 \\ \psi_{\text{inv}} = \frac{r_{\text{inv}}}{r_0} = \frac{45.61382}{1460.429942} \simeq 0.031233 \end{cases}$$

Nel corso dell'espansione dell'Universo l'angolo ψ_{inv} resta invariato, mentre ψ_{vis} cresce asintoticamente fino al limite ψ_{inv} per $t \rightarrow +\infty$.

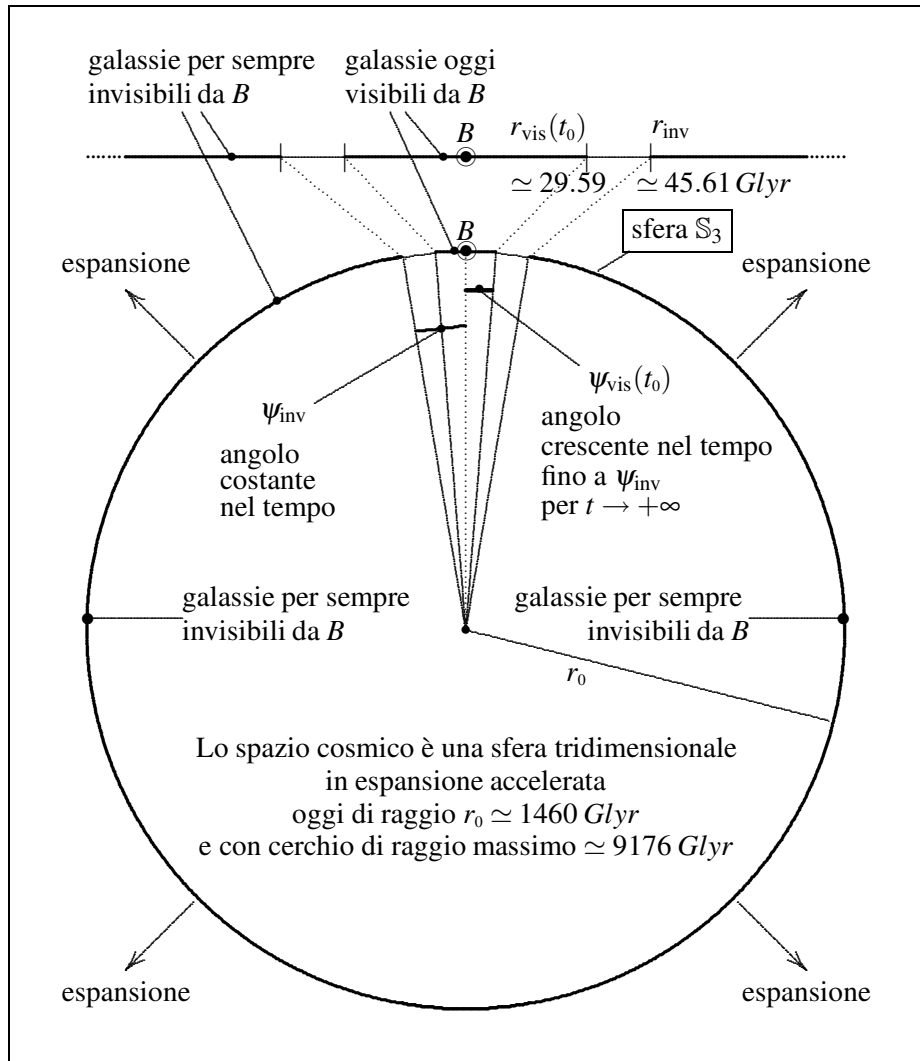


Figura 5.11: Configurazione attuale dell'Universo vista da B .

Su di una sfera \mathbb{S}_3 di raggio r il volume di una calotta sferica di semi-ampiezza ψ è (equazione (4.64), Figura 4.13)

$$(5.16) \quad V(r, \psi) = 2\pi r^3 (\psi - \sin \psi \cos \psi)$$

Per $\psi = \pi$ otteniamo il volume dell'intera sfera \mathbb{S}_3

$$(5.17) \quad V = 2\pi^2 r^3$$

Segue che il volume dell'intero Universo è oggi

$$(5.18) \quad VU(t_0) = 2\pi^2 r_0^3 \simeq 61.485 * 10^9 \text{ Glyr}^3$$

mentre quello dell'Universo visibile è

$$(5.19) \quad VU_{\text{vis}}(t_0) = 2\pi r_0^3 (\psi_{\text{vis}} - \sin \psi_{\text{vis}} \cos \psi_{\text{vis}}) \simeq 108534.8 \text{ Glyr}^3$$

5.5 Visibilità e recessione super-luminale

Nella Figura 5.12 sono riportati entrambi i grafici del raggio di visibilità $r_{\text{vis}}(t)$ (Figura 5.9) e del confine trans-luminale $L(t, t_0)$ (Figura 4.10).

Si osserva che la retta verticale in t_0 incrocia il grafico di $L(t, t_0)$ al livello $r_H = L(t_0, t_0)$ corrispondente al raggio di Hubble, come già stabilito dall'equazione (4.55). Richiamando la Nota 4.12.3 si conclude che

Teorema 5.5.1 – *Se la distanza attuale di due galassie A e B è maggiore del raggio di Hubble*

$$d_{AB}(t_0) > r_H$$

allora A e B hanno velocità di recessione super-luminale anche se sono reciprocamente visibili.

Interessante paradosso.

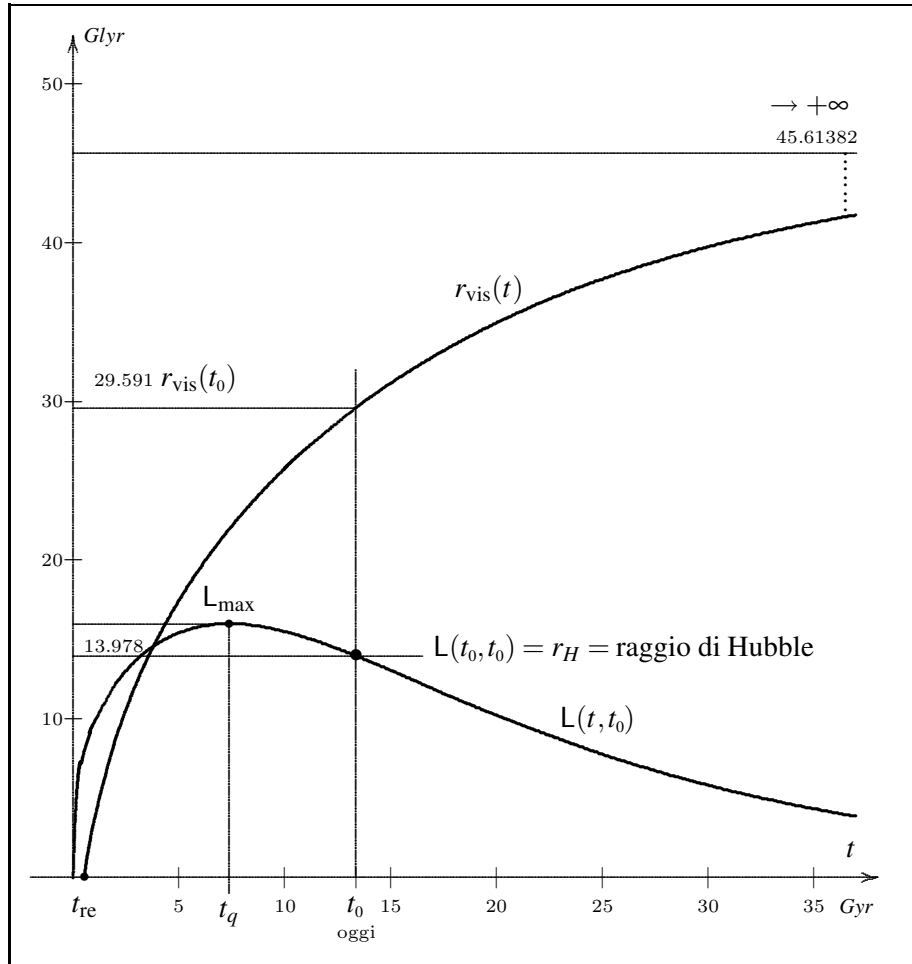


Figura 5.12: Raggio $r_{\text{vis}}(t)$ dell'Universo visibile e confine trans-luminale $L(t, t_0)$ a confronto.

Capitolo 6

Redshift

6.1 Redshift espansionale

Il fenomeno di redshift analizzato in questo capitolo considera due corpi A e B appartenenti al fluido cosmico, vale a dire due punti fissi nello spazio di riferimento, come illustrato nella Figura 6.1.

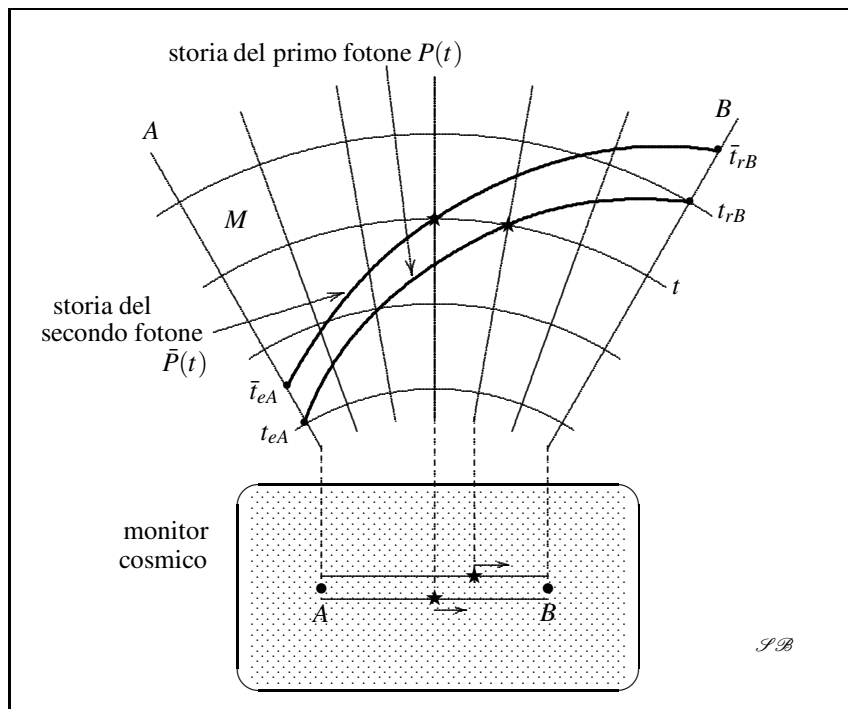


Figura 6.1: Due fotoni P e \bar{P} provenienti da A e captati da B .

Si tratta di un fenomeno dovuto all'espansione dell'Universo. Lo chiamiamo pertanto **redshift espansionale** anche per distinguerlo da un redshift di natura diversa, che qui non trattiamo, che considera una particella luminosa vagante nell'intorno del centro di una galassia, e che è quindi un'estensione cosmologica del redshift relativistico.

Consideriamo due fotoni P e \bar{P} emessi da A in due tempi successivi $\bar{t}_{eA} > t_{eA}$ e intercettati da B nei tempi $\bar{t}_{rB} > t_{rB}$. Riprendendo la Figura 5.1, aggiungiamo la storia del secondo fotone \bar{P} , Figura 6.1.

C'è da attendersi che i due intervalli di emissione-ricezione abbiano diversa ampiezza: $\bar{t}_{rB} - \bar{t}_{eA} \neq t_{rB} - t_{eA}$. Tuttavia, come illustrato nella Figura 6.2, stante l'equazione (5.2), le due aree ombreggiate sopra questi due intervalli restano inalterate perché entrambe sono uguali a $d_{AB}(t_{\#})$.

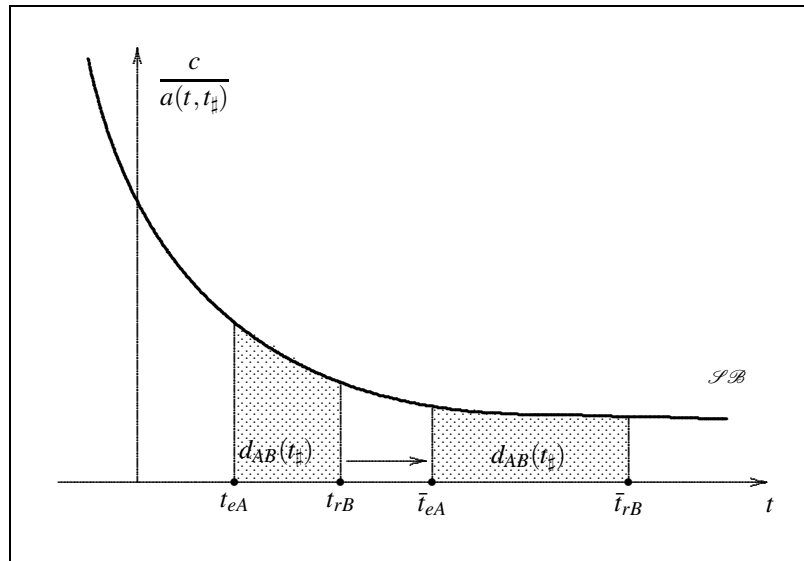


Figura 6.2: Spostamento dell'intervallo emissione-ricezione conservante l'area ombreggiata.

Queste aree ombreggiate si comportano come se fossero riempite da un fluido incompressibile planare incanalato sotto il grafico di $c/a(t, t_{\#})$ e sopra l'intervallo di emissione-ricezione $[t_{eA}, t_{rB}]$.

Supponiamo ora che il tempo di emissione \bar{t}_{eA} del secondo fotone sia molto vicino al tempo di emissione t_{eA} del primo fotone, come mostrato nella Figura 6.3. Le aree sopra gli intervalli $I_{er} = [t_{eA}, t_{rB}]$ e $\bar{I}_{er} = [\bar{t}_{eA}, \bar{t}_{rB}]$ sono entrambe uguali alla distanza $d_{AB}(t_{\#})$. Siccome l'area centrale bianca è parte comune di queste due aree, le due aree ombreggiate sopra gli intervalli $I_e = [t_{eA}, \bar{t}_{eA}]$ e $I_r = [t_{rB}, \bar{t}_{rB}]$ sono uguali.

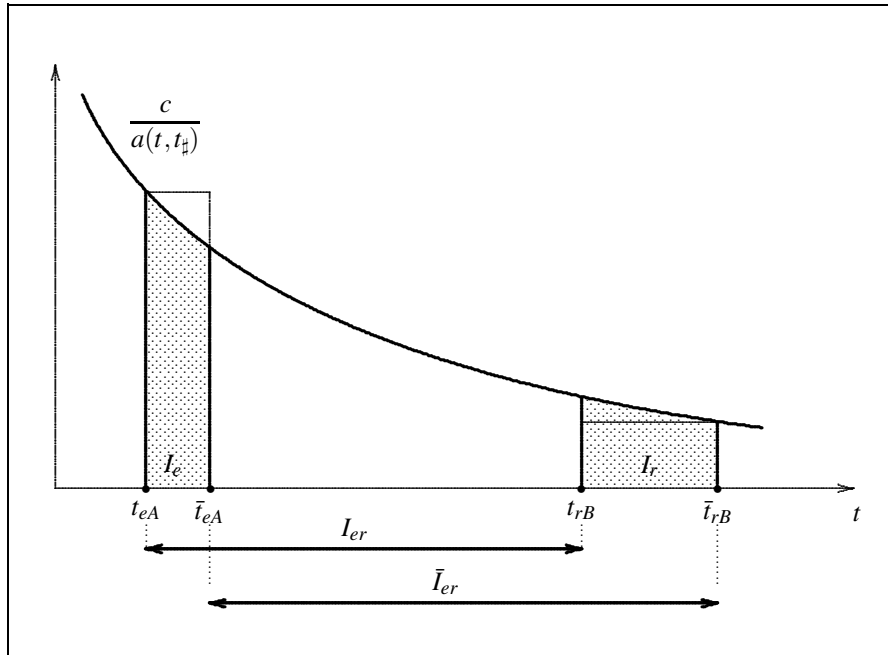


Figura 6.3: Le due aree ombreggiate sono uguali.

Se questi due intervalli-base sono molto piccoli in confronto agli intervalli I_{er} e \bar{I}_{er} allora le due aree ombreggiate si possono considerare uguali al prodotto *base* \times *altezza* dei rettangoli dove sono contenute. Così, possiamo scrivere con buona approssimazione che¹

$$\frac{I_e}{a(t_{eA}, t_{\#})} = \frac{I_r}{a(t_{rB}, t_{\#})}$$

ovvero

$$(6.1) \quad \boxed{\frac{a(t_{rB}, t_{\#})}{a(t_{eA}, t_{\#})} = \frac{I_r}{I_e}}$$

Questa formula si può applicare correttamente quando gli eventi di emissione dei due fotoni corrispondono a due creste successive di un'onda monocromatica di lunghezza

$$\lambda_{eA} = c I_e$$

emessa da A . Allora i due eventi di ricezione da parte di B corrispondono a due creste successive della stessa onda ma di lunghezza

$$\lambda_{rB} = c I_r,$$

¹ Questa argomentazione è tratta, con qualche modifica, da [13], pp. 126-127.

e la (6.1) si traduce nell'equazione

$$(6.2) \quad \boxed{\frac{a(t_{rB}, t_{\#})}{a(t_{eA}, t_{\#})} = \frac{\lambda_{rB}}{\lambda_{eA}}}$$

che descrive il fenomeno di **spostamento spettrale** o di **redshift**:

$$\begin{cases} a(t_{rB}, t_{\#}) > a(t_{eA}, t_{\#}) & \iff \lambda_{rB} > \lambda_{eA} & \iff \\ a(t_{rB}, t_{\#}) < a(t_{eA}, t_{\#}) & \iff \lambda_{rB} < \lambda_{eA} & \iff \end{cases}$$

$$\begin{cases} \iff & \text{spostamento della lunghezza d'onda originale verso il rosso.} \\ \iff & \text{spostamento della lunghezza d'onda originale verso il blu.} \end{cases}$$

Nota 6.1.1 – Se scriviamo la (6.2) nella forma

$$\lambda_{rB} = \frac{a(t_{rB}, t_{\#})}{a(t_{eA}, t_{\#})} \lambda_{eA}$$

osserviamo che lo spettro di una galassia A osservato da B è in effetti *moltiplicato* per il rapporto $a(t_{rB}, t_{\#})/a(t_{eA}, t_{\#})$ e non traslato, come il termine ‘shift’ potrebbe far intendere. •

Nota 6.1.2 – Come indicato nel titolo di questo paragrafo, il fenomeno di redshift che stiamo discutendo è dovuto all'espansione dell'Universo, come si vede bene dall'equazione (6.2) che coinvolge solo il fattore di scala. In molti testi esso viene erroneamente denominato come *effetto Doppler relativistico*, trascurando il fatto che l'*effetto Doppler* riguarda il caso di un corpo in movimento rispetto ad un osservatore (un riferimento). •

Introducendo il **parametro di redshift**

$$(6.3) \quad \boxed{z_{AB} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda_{rB} - \lambda_{eA}}{\lambda_{eA}} = \frac{\lambda_{rB}}{\lambda_{eA}} - 1}$$

l'equazione (6.2) assume la forma

$$(6.4) \quad \boxed{\frac{a(t_{rB}, t_{\#})}{a(t_{eA}, t_{\#})} = 1 + z_{AB}}$$

Osserviamo che questa equazione è $t_{\#}$ -invariante, cosicché possiamo prendere $t_{\#} = t_0$ e scrivere

$$(6.5) \quad \boxed{\frac{a(t_{rB}, t_0)}{a(t_{eA}, t_0)} = 1 + z_{AB}}$$

Il teorema seguente esprime il ruolo fondamentale svolto dal redshift.

Teorema 6.1.1 – L'equazione

$$(6.6) \quad \boxed{\frac{1}{a(t_{eA}, t_0)} = 1 + z_{AB}}$$

fornisce la relazione fra il tempo di emissione t_{eA} di un fotone emesso da A e il redshift z_{AB} misurato oggi da un osservatore in B .

Dimostrazione. Questa equazione è ottenuta dalla (6.5) considerando il tempo di ricezione uguale al tempo presente, $t_{\#} = t_0$, e ponendo quindi $a(t_0, t_0) = 1$. ■

Nota 6.1.3 – Per un generico tempo t l'equazione (6.6) può essere scritta nella forma semplificata

$$(6.7) \quad \boxed{\frac{1}{a(t, t_0)} = 1 + z}$$

Poiché $a(t, t_0)$ è una funzione crescente senza punti stazionari, quindi invertibile, **il redshift z può svolgere il ruolo di parametro temporale al posto di t** com'è usanza in astronomia. Si noti che $z = 0$ corrisponde al tempo presente: $t = t_0$. •

Nota 6.1.4 – Sempre per lo stesso motivo, l'equazione (6.6) può essere risolta rispetto a t_{eA} . In questo modo si ottiene una funzione

$$z_{AB} \longmapsto t_{eA}$$

che, in accordo col Teorema 6.1.1, fornisce il tempo di emissione t_{eA} come funzione del redshift z_{AB} misurato oggi da un osservatore in B . In effetti, il tempo di emissione t_{eA} è uguale all'età dell'oggetto cosmico osservato A . In altre parole, **misurando il redshift di un oggetto cosmico possiamo calcolare la sua età**, purché sia nota l'espressione analitica di $a(t, t_0)$, come nel caso del modello MR. •

Teorema 6.1.2 – Nel modello MR l'equazione

$$(6.8) \quad \boxed{t_{eA}(z_{AB}) = \frac{1}{\beta} \operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{\alpha^3 (1 + z_{AB}^3)} + 1 \right)}$$

fornisce il tempo di emissione di un segnale emesso da A e captato oggi da B con un redshift z_{AB} .

Dimostrazione. L'equazione (6.8) è la relazione inversa di (6.6). Quindi:²

$$(6.7) \quad \frac{1}{a(t, t_0)} = 1 + z \iff \frac{1}{a^3(t, t_0)} = (1 + z)^3, \quad \text{profilo (4.31)}$$

$$\implies \frac{1}{\cosh(\beta t) - 1} = \alpha^3 (1 + z)^3 \implies \cosh(\beta t) - 1 = \frac{1}{\alpha (1 + z)^3} \implies (6.8). \quad \blacksquare$$

² Per semplificare il calcolo poniamo $z_{AB} = z$ e $t_{eA} = t$.

Nota 6.1.5 – Siccome $\operatorname{arccosh}(u) = \log(u + \sqrt{u^2 - 1})$, una rappresentazione alternativa di $z_{AB} \mapsto t_{eA}$ è

$$(6.9) \quad \boxed{t_{eA} = \frac{1}{\beta} \log(u + \sqrt{u^2 - 1}), \quad u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\alpha^3 (1 + z_{AB})^3} + 1}$$

Qui u svolge il ruolo di **parametro intermedio**. •

Nella Figura 6.4, pagina 129, è tracciato il grafico della funzione $z_{AB} \mapsto t_{eA}$. Alcuni suoi valori numerici sono riportati nella Tabella 6.1 più avanti (pagina 132).

Nota 6.1.6 – Il tempo di reionizzazione t_{re} (inizio di emissione di luce) corrisponde al massimo valore di un redshift osservabile: $z_{\text{re}} = 8.8$, vedi Tabella 4.1. •

Nota 6.1.7 – Calcolo dell'inclinazione della tangente nel punto iniziale. La derivata di $y = \operatorname{arccosh}(x)$ è $y' = 1/\sqrt{x^2 - 1}$. Quindi dalla (6.8) otteniamo

$$\beta t'(z) = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} u'(z).$$

Per $z = 0$: $u(0) = \frac{1 + \alpha^3}{\alpha^3}$, $\alpha^3 u'(0) = -3$. Di qui segue

$$u^2(0) - 1 = \frac{(1 + \alpha^3)^2}{\alpha^6} - 1 = \frac{(1 + \alpha^3)^2 - \alpha^6}{\alpha^6} = \frac{1 + 2\alpha^3}{\alpha^6},$$

$$\beta t'(0) = \frac{\alpha^3}{\sqrt{1 + 2\alpha^3}} u'(0) = -\frac{3}{\sqrt{1 + 2\alpha^3}},$$

$$(6.10) \quad t'(0) = -\frac{3}{\beta \sqrt{1 + 2\alpha^3}}.$$

Per $\alpha \simeq 0.607247$ e $\beta \simeq 0.178366 \text{ Gyr}^{-1}$ risulta

$$(6.11) \quad t'(0) \simeq -13.978027.$$

Questa è l'inclinazione della curva $t(z)$ in $z = 0$. L'intersezione della tangente con l'asse z è situata in $z \simeq 0.95586$. •

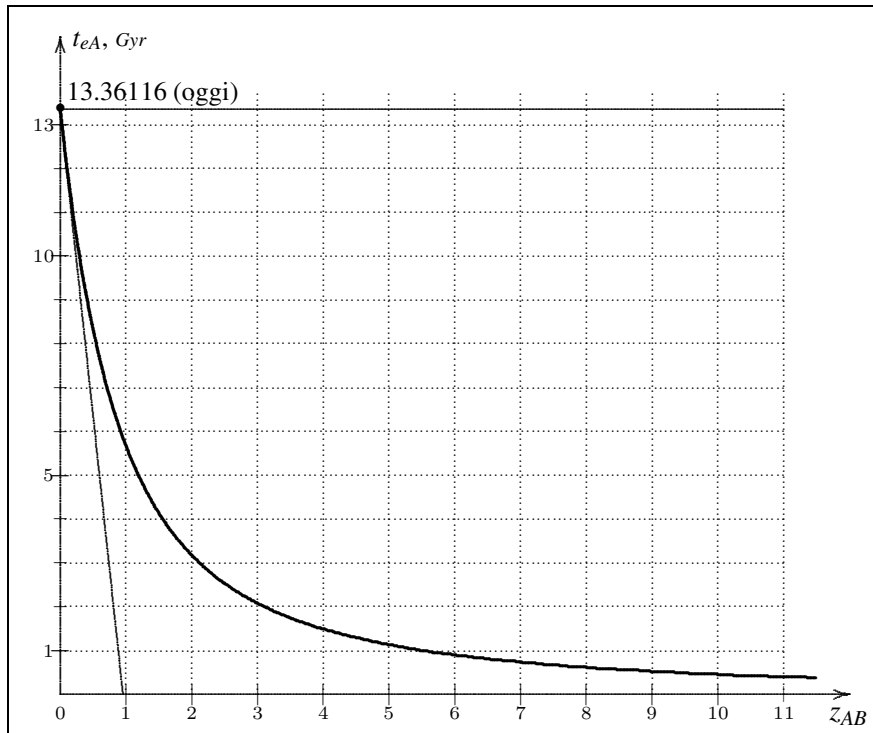


Figura 6.4: $t_{eA}(z_{AB})$ nel modello MR.

6.2 Dal redshift alla distanza attuale

Teorema 6.2.1 – Se al tempo presente t_0 un oggetto cosmico A è osservato da B con un redshift $z = z_{AB}$ allora la distanza attuale $d_{AB}(t_0)$, misurata nella sezione spaziale S_{t_0} , è data dall'integrale

$$(6.12) \quad d_{AB}(t_0) = c \int_{t(z)}^{t_0} \frac{dt}{a(t, t_0)}$$

dove il limite inferiore d'integrazione $t(z) = t_{eA}(z_{AB})$ è dato dalla (6.8).

Dimostrazione. Si pone $t_{eA} = t(z)$, $t_{\#} = t_0$ e $t_{rB} = t_0$ nella relazione emissione-ricezione (5.2). ■

Il grafico della distanza (6.12) è tracciato nella Figura 6.5, dove è confrontato con la distanza di ricezione $d_{AB}(t_{eA})$ data dall'equazione (6.13) nel prossimo paragrafo. Si veda anche la tabella 6.1 a pagina 132 per alcuni valori numerici.

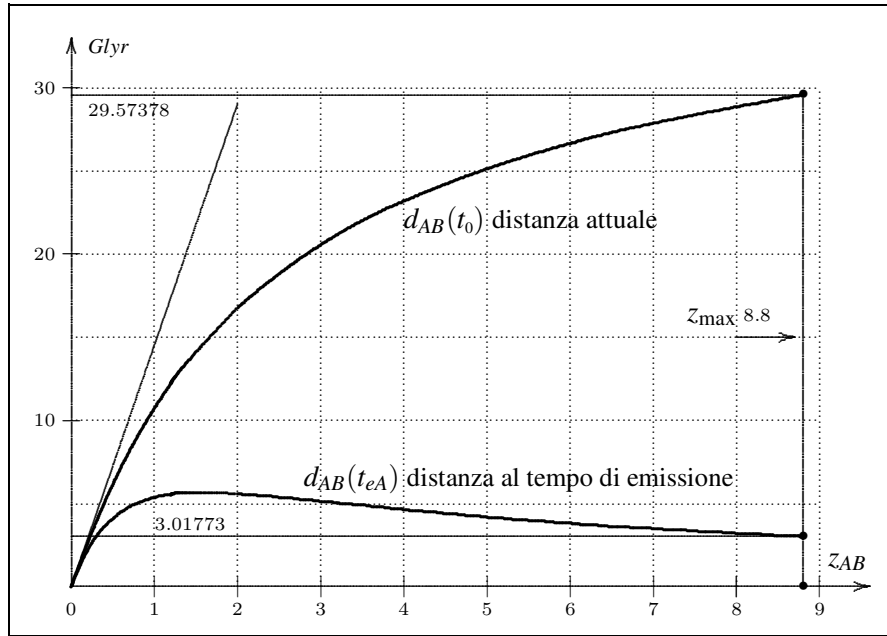


Figura 6.5: Redshift z_{AB} vs. le distanze attuali e al tempo di emissione.

6.3 Dal redshift alla distanza al tempo di emissione

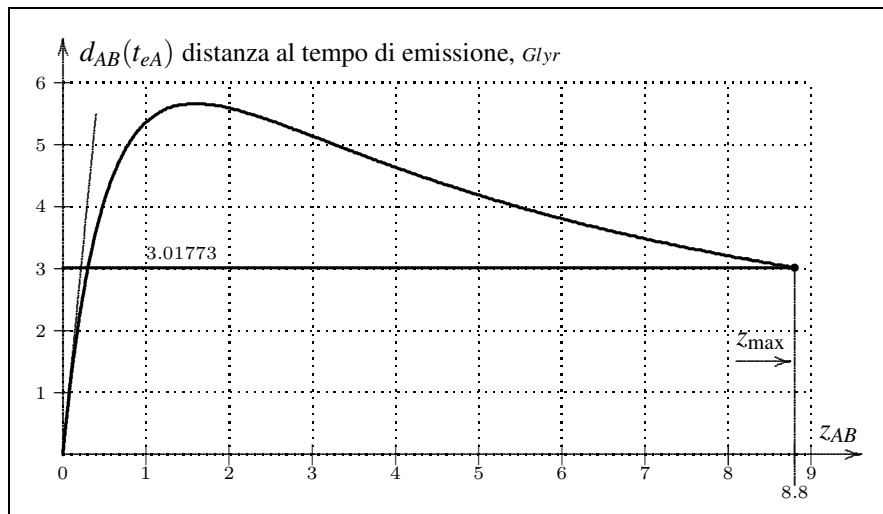


Figura 6.6: Redshift z_{AB} vs. la distanza al tempo di emissione $d_{AB}(t_{eA})$.

Teorema 6.3.1 – Se al tempo presente t_0 un oggetto cosmico A è osservato da B con un redshift $z = z_{AB}$ allora la distanza $d_{AB}(t(z))$ misurata nella sezione spaziale corrispondente al tempo di emissione è data da

$$(6.13) \quad d_{AB}(t_{eA}) = \frac{c}{1+z_{AB}} \int_{t(z)}^{t_0} \frac{dt}{a(t, t_0)} = \frac{1}{1+z_{AB}} d_{AB}(t_0)$$

Dimostrazione. Dalla formula (1.29) scritta con $t_{\#} = t_0$, $d_{AB}(t) = a(t, t_0) d_{AB}(t_0)$, nonché dalla (6.12), segue

$$d_{AB}(t) = c a(t, t_0) \int_{t(z)}^{t_0} \frac{dt}{a(t, t_0)}.$$

Ponendo $t = t(z)$ risulta

$$d_{AB}(t(z)) = c a(t(z), t_0) \int_{t(z)}^{t_0} \frac{dt}{a(t, t_0)}.$$

Si applica infine la (6.7) $\frac{1}{a(t, t_0)} = 1 + z$. ■

Nella Tabella 6.1 sono riportati su ogni riga il redshift z_{AB} di un corpo cosmico A misurato da B : il tempo di emissione t_{eA} , la distanza attuale $d_{AB}(t_0)$ e la distanza al tempo di emissione $d_{AB}(t_{eA})$.

- La corrispondenza $z_{AB} \mapsto t_{eA}$ è definita dall'equazione (6.9)

$$t_{eA} = \frac{1}{\beta} \log(u + \sqrt{u^2 - 1}), \quad u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\alpha^3 (1 + z_{AB})^3} + 1$$

quindi da

$$(6.14) \quad t_{eA}(z_{AB}) = \frac{1}{\beta} \operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{\alpha^3 (1 + z_{AB}^3)} + 1 \right)$$

- L'applicazione $t_{eA} \mapsto d_{AB}(t_0)$ è definita dall'equazione (6.12)

$$d_{AB}(t_0) = c \int_{t_{eA}}^{t_0} \frac{dt}{a(t, t_0)}.$$

- L'applicazione $d_{AB}(t_0) \mapsto d_{AB}(t_{eA})$ è definita dall'equazione (6.13)

$$d_{AB}(t_{eA}) = \frac{1}{1+z_{AB}} d_{AB}(t_0).$$

Tabella 6.1: $z_{AB} \mapsto t_{eA} \mapsto d_{AB}(t_0) \mapsto d_{AB}(t_{eA})$.

z_{AB} redshift misurato	t_{eA} tempo di emissione	$d_{AB}(t_0)$ distanza odierna	$d_{AB}(t_{eA})$ distanza al tempo di emissione
0.0	13.361160	0	0
0.1	12.059862	1.364801	1.240728
0.2	10.930753	2.661961	2.218301
0.3	9.947120	3.890388	2.992606
0.4	9.087011	5.050586	3.607562
0.5	8.332161	6.144310	4.096206
0.6	7.667264	7.174207	4.483879
0.7	7.079443	8.143518	4.790304
0.8	6.557845	9.055803	5.031001
0.9	6.093308	9.914755	5.218292
1.0	5.678087	10.724054	5.362027
1.2	4.970357	12.207806	5.549003
1.4	4.393193	13.533387	5.638911
1.6	3.916490	14.723675	5.662952
1.8	3.518136	15.798076	5.642170
2.0	3.181690	16.772852	5.590950
2.2	2.894767	17.661574	5.519241
2.4	2.647919	18.475571	5.433991
2.6	2.433848	19.224324	5.340090
2.8	2.246851	19.915803	5.241000
3.0	2.082421	20.556736	5.139184
3.2	1.936959	21.152840	5.036390
3.4	1.807564	21.708992	4.933861
3.6	1.691877	22.229372	4.832472
3.8	1.587960	22.717600	4.732833
4.0	1.494213	23.176803	4.635360
4.2	1.409303	23.609706	4.540328
4.4	1.332111	24.018703	4.447908
4.6	1.261694	24.405891	4.358194
4.8	1.197251	24.773123	4.271228
5.0	1.138098	25.122042	4.187007
5.2	1.083649	25.454107	4.105501
5.4	1.033398	25.770622	4.026659
5.6	0.986906	26.072761	3.950418
5.8	0.943791	26.361578	3.876702
6.0	0.903722	26.638006	3.805429
6.2	0.866406	26.902906	3.736514
6.4	0.831585	27.157060	3.669873
6.6	0.799032	27.401171	3.605417

Continua alla pag. seguente

Tabella 6.1 – Continua dalla pag. precedente

z_{AB}	t_{eA}	$d_{AB}(t_0)$	$d_{AB}(t_{eA})$
6.8	0.768547	27.635873	3.543060
7.0	0.739949	27.861767	3.482720
7.2	0.713081	28.079370	3.424313
7.4	0.687798	28.289194	3.367761
7.6	0.663973	28.491683	3.312986
7.8	0.641492	28.687246	3.259914
8.0	0.620250	28.876280	3.208475
8.2	0.600154	29.059135	3.158601
8.4	0.581120	29.236134	3.110227
8.6	0.563070	29.407594	3.063291
8.8	0.545936	29.573779	3.017732

Nota 6.3.1 – La lontananza di 29 miliardi di anni-luce che vediamo nell’ultima riga della tabella può sembrare incredibilmente alta in un Universo che ha solo 13,36 miliardi di anni, dove un anno luce è la distanza percorsa dalla luce in un anno e dove nulla può viaggiare più veloce della luce. Questo è un paradosso che ha generato molti malintesi sulla dimensione dell’Universo visibile e sulla misura delle distanze in uno spazio in espansione. •

6.4 Legge di Slipher e modelli a espansione costante

Secondo [9], p. 274: “Howard Robertson in 1928 showed that Slipher’s redshifts and Hubble’s previously published instances supported an approximate redshift–distance relation

$$zc = HL \quad [14.5]$$

where L is the distance of the galaxy, and the constant H is called Hubble term”.

Nel nostro contesto l’equazione [14.5] si traduce nella **legge di Slipher**

$$(6.15) \quad d_{AB}(t_0, z) = r_H z$$

dove

$$r_H \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{H_0}$$

è il raggio di Hubble (4.53). Questa legge fornisce la distanza attuale di una galassia A in termini del redshift z misurato da B .

Oggi sappiamo che la legge Slipher (6.15) è accettabile solo per piccoli valori di z . Vale comunque la pena di analizzare gli aspetti matematici sottostanti questa legge. Vedremo che è il risultato di due successivi processi di linearizzazione.

Un **modello ad espansione costante (constant-rate expansion model CRE)** si basa sull'assunzione che l'Universo si sia evoluto con un tasso di crescita costante nel corso della sua storia. Un tale modello è caratterizzato da un fattore di scala del tipo

$$a_{\text{cre}}(t, t_{\#}) = \mu (t - t_{\#}) + \nu, \quad \mu, \nu = \text{costante}, \mu > 0.$$

Tuttavia, la condizione di normalizzazione $a_{\text{cre}}(t_{\#}, t_{\#}) = 1$ implica $\nu = 1$ per cui la formula precedente si riduce a

$$a_{\text{cre}}(t, t_{\#}) = \mu (t - t_{\#}) + 1.$$

Il corrispondente fattore di Hubble è

$$H(t) = \frac{\dot{a}_{\text{cre}}}{a_{\text{cre}}} = \frac{\mu}{\mu (t - t_{\#}) + 1}.$$

Ponendo $t = t_{\#}$ si trova $H(t_{\#}) = \mu > 0$ per cui **il profilo di un modello ad espansione costante risulta essere**

(6.16)

$$a_{\text{cre}}(t, t_{\#}) = H(t_{\#})(t - t_{\#}) + 1$$

Di qui si osserva che **un modello ad espansione costante è univocamente determinato dal valore $H(t_{\#})$ del fattore di Hubble in un dato tempo di riferimento.**

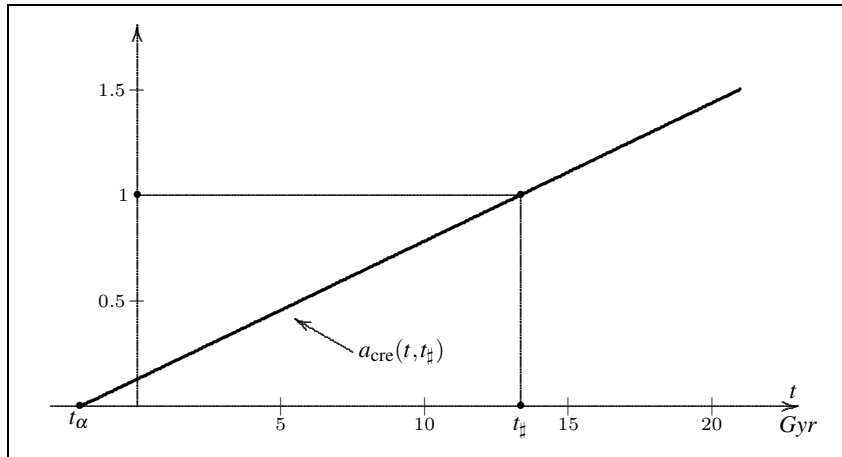


Figura 6.7: Profilo del modello a espansione costante.

Nel piano (t, a) il profilo (6.16) è una retta passante per il punto $(t_{\#}, 1)$ con inclinazione $H(t_{\#})$, Figura 6.7. Questa retta interseca l'asse t in un punto t_{α} che segna la data d'inizio dell'Universo. Ponendo $t = t_{\alpha}$ e $a_{\text{cre}}(t_{\alpha}, t_{\#}) = 0$ nella (6.16) si trova

$$(6.17) \quad t_{\alpha} = t_{\#} - \frac{1}{H(t_{\#})}$$

Come mostra la Figura 6.7 questa data può avere un valore negativo.

Teorema 6.4.1 – Nel punto $(t_{\#}, 1)$ la retta $a_{\text{cre}}(t, t_{\#})$ è tangente ad ogni profilo $a(t, t_{\#})$ soddisfacente l'equazione

$$(6.18) \quad \dot{a}(t_{\#}, t_{\#}) = H(t_{\#}).$$

Dimostrazione. Dalla (6.16) segue $\dot{a}_{\text{cre}}(t, t_{\#}) = H(t_{\#})$ per ogni t e quindi $\dot{a}_{\text{cre}}(t_{\#}, t_{\#}) = H(t_{\#})$. Per ogni altro profilo $a(t, t_{\#})$ con tempo di riferimento $t_{\#}$ vale la stessa equazione $\dot{a}(t_{\#}, t_{\#}) = H(t_{\#})$. ■

Nella Figura 6.8 il profilo $a(t, t_0)$ (4.38) del modello MR è comparato col profilo del modello a espansione costante con $t_{\#} = t_0$.

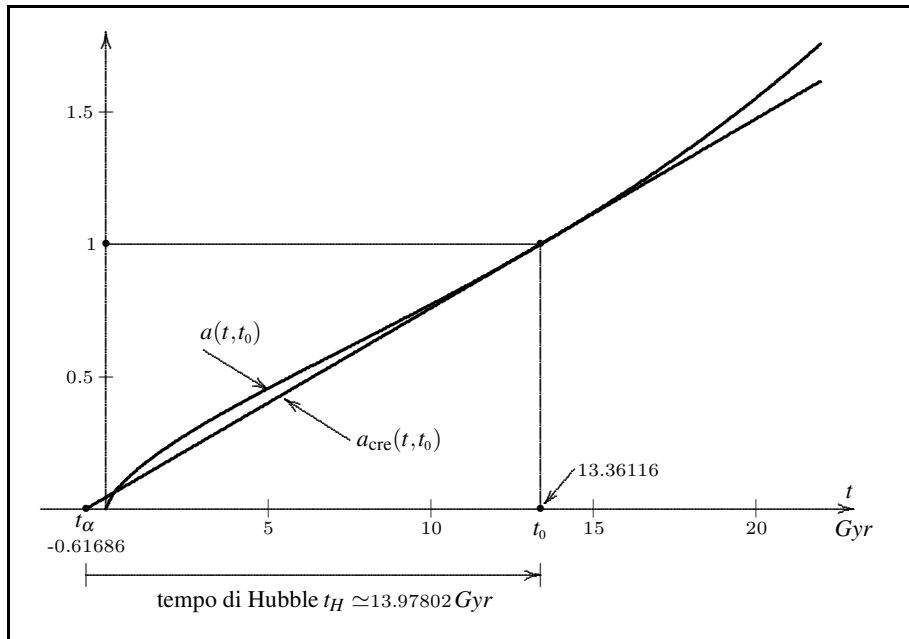


Figura 6.8: Profilo del modello ad espansione costante comparato con quello del modello MR.

Essendo $H(t_{\#}) = H_0 \simeq 0.07154 \text{ Gyr}^{-1}$ e $t_0 \simeq 13.36116 \text{ Gyr}$, l'espressione numerica del profilo (6.16) è

$$(6.19) \quad a_{\text{cre}}(t, t_0) = H_0 (t - t_0) + 1 \simeq 0.07154 * (t - 13.36116) + 1$$

In virtù del Teorema 6.4.1 i due profili sono tangenti nel punto $(t_0, 1)$. Applicando la (6.17) si trova

$$t_{\alpha} = t_0 - \frac{1}{H_0} = t_0 - t_H$$

dove

$$(6.20) \quad t_H = H_0^{-1} \simeq 13.97802 \text{ Gyr}$$

è il cosiddetto **tempo di Hubble**. Segue che l'inizio dell'Universo è datato

$$(6.21) \quad t_{\alpha} \simeq -0.61686 \text{ Gyr}$$

Esaminiamo ora la trasmissione dei fotoni.

Teorema 6.4.2 – *In un modello ad espansione costante un fotone emesso da A al tempo t_{eA} raggiunge B al tempo t_{rB} se e solo se*

$$(6.22) \quad d_{AB}(t_{\#}) = \frac{c}{H(t_{\#})} \log \frac{t_{rB} - t_{\alpha}}{t_{eA} - t_{\alpha}}$$

Dimostrazione. La relazione di emissione-ricezione (5.2) è valida per ogni profilo ed è indipendente dalla scelta del tempo di riferimento. Applicandola al profilo $a_{\text{cre}}(x, t_{\#})$ otteniamo

$$(6.23) \quad c \int_{t_e}^{t_r} \frac{dx}{a_{\text{cre}}(x, t_{\#})} = d_{AB}(t_{\#}).$$

Segue che

$$\begin{aligned} \int_{t_e}^{t_r} \frac{dx}{a_{\text{cre}}(x, t_{\#})} &= \int_{t_e}^{t_r} \frac{dx}{H(t_{\#}) (x - t_{\#}) + 1} \\ &= \frac{1}{H(t_{\#})} \left[\log [H(t_{\#}) (x - t_{\#}) + 1] \right]_{t_e}^{t_r} \\ &= \frac{1}{H(t_{\#})} \left[\log [H(t_{\#}) (t_r - t_{\#}) + 1] - \log [H(t_{\#}) (t_e - t_{\#}) + 1] \right] \\ &= \frac{1}{H(t_{\#})} \log \frac{H(t_{\#}) (t_r - t_{\#}) + 1}{H(t_{\#}) (t_e - t_{\#}) + 1} = \dots \end{aligned}$$

Applichiamo la (6.17) $\frac{1}{H(t_{\#})} = t_{\#} - t_{\alpha}$,

$$\dots = \frac{1}{H(t_{\#})} \log \frac{(t_r - t_{\#}) + (t_{\#} - t_{\alpha})}{(t_e - t_{\#}) + (t_{\#} - t_{\alpha})} = \frac{1}{H(t_{\#})} \log \frac{t_r - t_{\alpha}}{t_e - t_{\alpha}}. \blacksquare$$

Teorema 6.4.3 – In un modello ad espansione costante, se B osserva A con un redshift z_{AB} allora la distanza isocrona tra A e B al tempo $t_{\#}$ è data da

$$(6.24) \quad d_{AB}(t_{\#}, z) = \frac{c}{H(t_{\#})} \log(1 + z_{AB})$$

Dimostrazione. L'equazione generale (6.4) applicata a a_{cre} si traduce in

$$\frac{H(t_{\#})(t_r - t_{\#}) + 1}{H(t_{\#})(t_e - t_{\#}) + 1} = 1 + z.$$

Per la (6.17), $H^{-1}(t_{\#}) = t_{\#} - t_{\alpha}$, si trova $1 + z = \frac{t_r - t_{\#} + H^{-1}(t_{\#})}{t_e - t_{\#} + H^{-1}(t_{\#})} = \frac{t_r - t_{\alpha}}{t_e - t_{\alpha}}$. Quindi

(6.22) \implies (6.24). \blacksquare

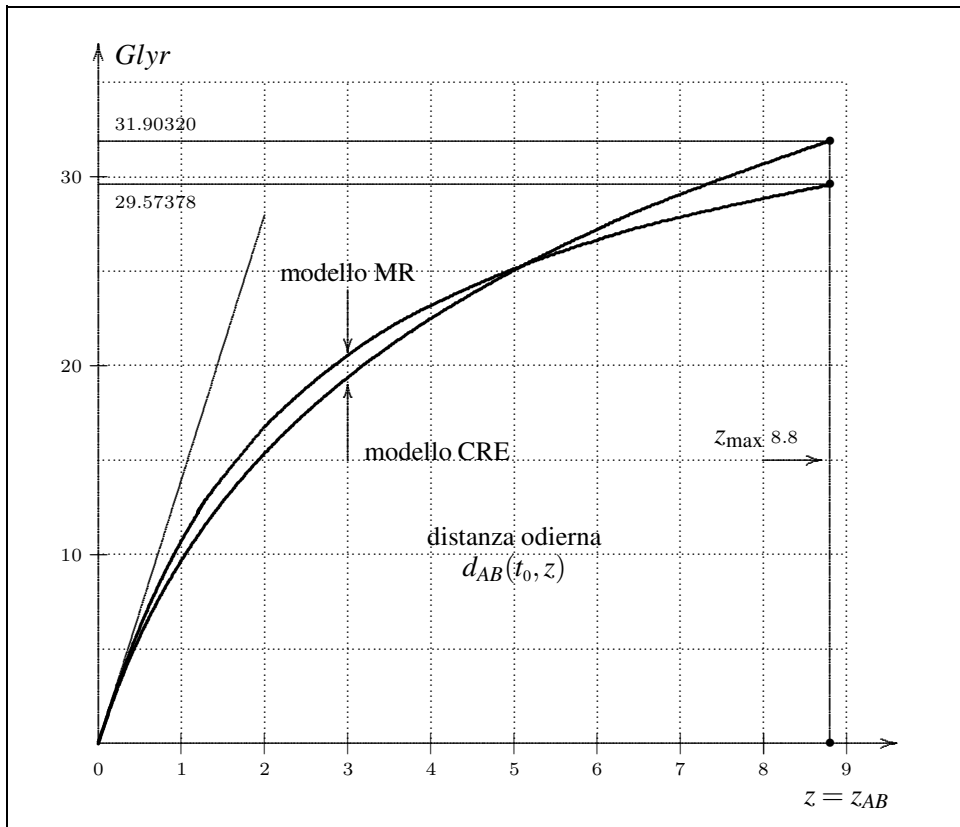


Figura 6.9: $z_{AB} \mapsto d_{AB}(t_0, z)$: confronto tra il modello MR e il modello CRE.

In particolare, per $t_{\#} = t_0$ dalla (6.24) segue

$$(6.25) \quad \boxed{d_{AB}(t_0, z) = r_H \log(1 + z_{AB})}$$

I grafici di (6.25) e di (6.12) sono confrontati nella Figura 6.9. Le due tangenti nell'origine coincidono e la loro inclinazione è $\simeq 13.97802$.

Circa la formula (6.25) va osservato che la serie logaritmica

$$\log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} + \dots$$

converge molto lentamente poiché i grafici delle sue somme ridotte

$$z, \quad z - \frac{z^2}{2}, \quad z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}, \quad z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4}, \dots$$

si differenziano notevolmente. Di conseguenza, l'unica approssimazione che ha senso è

$$\log(1 + z) \simeq z$$

e questa è accettabile solo per piccoli valori di z , in pieno accordo con la legge di Slipher (6.15).

Bibliografia

- [1] Astronomy & Astrophysics **594**, A11 (2016), *Planck 2015 results XI. CMB power spectra, likelihoods, and robustness of parameters*, Table 21 (six-parameter Λ CDM cosmology), two columns.
- [2] A&A **594**, A13 (2016), *Planck 2015 results XIII. Cosmological parameters*, Table 8 (Λ CDM cosmology), last column.
- [3] A&A **596**, A107 (2016), *Planck intermediate results XLVI. Reduction of large-scale etc.*, Table 8 (Λ CDM cosmology), last column.
- [4] Ade P.A.R. *et al.*, *Planck 2015 results XIII. Cosmological parameters*. A&A **594** A13, 1-63 (2016).
- [5] Basri S.A., *A Deductive Theory of Space and Time*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1966).
- [6] Dodd R., *Using SI units in astronomy*, Cambridge University Press (2012).
- [7] Friedmann A., *Über die Krümmung des Raumes*, Zeitschrift für Physik, **10** (1), 377-386 (1922). English translation: *On the Curvature of Space*, General Relativity and Gravitation, **31** (12), 1991-2000 (1999).
- [8] Friedmann A., *Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes*, Zeitschrift für Physik, **21**, 326-332 (1924). English translation: *On the Possibility of a World with Constant Negative Curvature of Space*, General Relativity and Gravitation, **31** (12), 2001-2008 (1999).
- [9] Harrison E., *Cosmology, the Science of the Universe*, Cambridge Univ. Press (2012).
- [10] Lemaître G., *Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques*, Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, **47**, 49-59 (1927).

- [11] Levi-Civita T., Amaldi U., *Lezioni di Meccanica Razionale* (1926, reprint 1989), volume II, part I, §6.
- [12] LIGO and Virgo Collaboration, *A gravitational-wave standard siren measurement of the Hubble constant*, *Nature* **551** (November 2017).
- [13] Liddle A., *An Introduction to Modern Cosmology*, Wiley 1998.
- [14] Lee J.M., *Riemannian Manifolds, An Introduction to Curvature*, Springer (1997).
- [15] Narlikar J.L., *An Introduction to Cosmology*, Cambridge Univ. Press (2002).
- [16] Oesch P.A. et al., *A remarkably luminous galaxy at $z = 11.1$ measured with Hubble space telescope grism spectroscopy*, *The Astrophysical Journal*, 819:129, 2016 March 10.
- [17] Olive K.A. et al., Particle Data Group, *Chinese Physics C* **38** 090001 (2014).
- [18] Riess A.G. et al., *A 2.4% Determination of the Local Value of the Hubble Constant*, *The Astrophysical Journal*, Volume 826, Number 1, 2016.
- [19] *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) project*, 7th year, 2010.
- [20] Wolf J.A., *Spaces of constant curvature*, Publish or Perish, Inc., 1984.

INDICE DEL VOLUME 42-43

(a.a. 2017-2018 – 2018-2019)

Fondamenti matematici e analisi numerica della dinamica di un Universo isotropo

SERGIO BENENTI

<i>Prefazione</i>	ii
1 <i>Geometria dello spazio-tempo cosmico</i>	1
1.1 Postulati geometrici	1
1.2 Il principio di isotropia e sue conseguenze	4
1.3 Commenti sul principio di Weyl	6
1.4 Connessioni lineari e curvatura	6
1.5 Permanenza del segno della curvatura spaziale	10
1.6 Fattore conforme tra due metriche spaziali	11
1.7 Tempo di riferimento e fattore di scala	13
1.8 Velocità di recessione e legge di Hubble	14
1.9 Analisi dimensionale	16
1.10 Coordinate co-mobili	18
1.11 Vettori e tensori isotropi	19
1.12 Monitor cosmico e particelle vaganti	21
1.13 Connessioni cosmiche	23
1.14 Tensore di Ricci di una connessione cosmica	30
1.15 Derivate covarianti ed equazioni di conservazione	31
2 <i>Postulati-ponte</i>	33
2.1 Connessione cosmica newtoniana	33
2.2 Velocità peculiare di una particella vagante	34
2.3 Connessione cosmica relativistica	35
2.4 Metrica cosmica relativistica	38
2.5 Tensori di Ricci e di Einstein	42
2.6 Particelle sub-luminali	44
3 <i>Dinamica cosmica relativistica</i>	46
3.1 Primo postulato dinamico: le equazioni di Einstein	46
3.2 Secondo postulato dinamico: fluido cosmico perfetto	48
3.3 Terzo postulato dinamico: equazioni di stato	50

3.4	Sulle equazioni di Friedmann e di Lemaître	52
3.5	Quarto postulato dinamico: materia-radiazione	54
3.6	Equazioni dinamiche del modello MR	56
3.7	Relazione tra le densità di materia e radiazione	57
3.8	Il problema della curvatura spaziale	59
3.9	Equazione di Weierstrass	61
3.10	Profili dell'Universo	63
3.11	Profili qualitativi del modello MR	65
3.12	Complementi sull'equazione di Weierstrass	69
4	<i>Cosmologia numerica</i>	78
4.1	Raccolta dei dati cosmologici	78
4.2	Nel modello MR la curvatura spaziale è positiva	80
4.3	Modello Universo chiuso	81
4.4	Sulle unità di misura del fattore di Hubble	84
4.5	Stime della curvatura spaziale	85
4.6	Le funzioni di Weierstrass del modello MR	85
4.7	Profilo numerico puntuale dell'Universo MR	86
4.8	Età dell'Universo e altre datazioni cruciali	88
4.9	Profilo analitico del modello MR	90
4.10	Variazione del tempo di riferimento	93
4.11	Evoluzione nel tempo del fattore di Hubble	94
4.12	Sulla velocità di recessione delle galassie	95
4.13	Proiezione stereografica delle iper-sfere	99
4.14	Volume di una calotta iper-sferica	103
4.15	Modelli con costante cosmologica nulla	105
5	<i>Trasmissione di segnali e visibilità</i>	108
5.1	Trasmissione di fotoni	108
5.2	Relazione emissione-ricezione	109
5.3	Universo visibile e Universo non visibile	115
5.4	Configurazione attuale dell'Universo	119
5.5	Visibilità e recessione super-luminale	121
6	<i>Redshift</i>	123
6.1	Redshift espansionale	123
6.2	Dal redshift alla distanza attuale	129
6.3	Dal redshift alla distanza al tempo di emissione	130
6.4	Legge di Slipher e modelli a espansione costante	133

Anno di fondazione della rivista: 1759
Direttore responsabile: Massimo Mori
Autorizzazione del Tribunale di Torino: Registro Stampa, n. 73 del 29/11/2018
(già n. 2685 del 13 aprile 1977)
Iscrizione al R.O.C. n. 2037 del 30 giugno 2001
Finito di stampare nel mese di marzo 2020