

Meccanica dei sistemi anolonomi

11

Sergio Benenti

■ 1 Premessa

Quando a un sistema meccanico con un numero finito di gradi di libertà vengono imposti, oltre a “vincoli di posizione”, anche dei “vincoli di mobilità”, vale a dire delle restrizioni sulle velocità di qualche sua componente, allora il sistema si dice **anolonomo** (o anche “non-olonomo”).

Nelle *Lezioni* la meccanica dei sistemi anolonomi è trattata in vari paragrafi inseriti in differenti capitoli ⁽¹⁾.

Una tale frammentazione non facilita il lavoro del lettore che si voglia addentrare in questo argomento, oggi più che mai pregnante di applicazioni tecnologiche, per esempio nel campo della “robotica” e del controllo dinamico di apparati elettromeccanici. Inoltre, la trattazione si limita ai soli vincoli di mobilità lineari ⁽²⁾, e un solo esempio applicativo viene presentato ⁽³⁾.

D'altra parte, sebbene la letteratura sui sistemi anolonomi sia molto vasta e in crescita continua, l'argomento resta ancora oggi abbastanza ostico. Per esempio, pare non esistano testi riportanti metodologie generali applicabili a ogni tipo di sistema anolonomo. Al contrario, gli esempi che si trovano in letteratura, richiamati i principi generali di questa meccanica, vengono poi trattati con metodi *ad hoc*. A peggiorare la situazione va detto che sovente la teoria viene affrontata con metodi matematici molto (per non dire troppo) sofisticati e quindi quasi sempre non accessibili proprio a coloro che della teoria stessa dovrebbero far uso.

In questo capitolo ci si propone di colmare, almeno in parte, queste lacune. Dopo una rivisitazione dei principi della meccanica dei sistemi con vincoli di mobilità, basata sulle più elementari nozioni di meccanica razionale e di geometria differenziale, il lettore vedrà il sorgere spontaneo e naturale di due metodi alternativi atti alla costruzione di due tipi di equazioni dinamiche, che abbiamo chiamato

⁽¹⁾Eccone l'elenco: cap. VI_I, §2, nn. 9, 10, 11 (esempio), 12; §3, n. 17 (spostamenti virtuali). Vol. I, parte seconda: cap. V, §8, nn. 54, 55 (equazioni Maggi), 56, 57, 58 (equazioni di Volterra), 59, 60 (equazioni di Appell); cap. XI, §1, nn. 2, 3 (principio di Gauss).

⁽²⁾«... si potrebbero anche pensare vincoli di mobilità più complessi, per esempio non lineari nelle \dot{q}_h o addirittura involgenti derivate delle q di ordine superiore al primo; ma sinora non si conoscono sistemi materiali, *concretamente realizzabili*, soggetti a vincoli di tal natura» (cap. VI, §2, nn. 9). In realtà, a quel tempo, Paul Appell aveva già proposto un meccanismo atto, secondo lui, a realizzare un vincolo anolonomo non lineare. Ma, come osserveremo nell'ultimo paragrafo, tale esempio soffre di un difetto che non lo rende accettabile. Probabilmente Amaldi e Levi-Civita, pur essendo al corrente dell'esempio di Appell, erano di questa stessa opinione.

⁽³⁾Cap. VI, §2, n. 11.

di **prima specie** e di **seconda specie**, applicabili a ogni sistema meccanico anolonomo, purché a vincoli “ideali”, siano essi lineari o non lineari. Questi due metodi si riveleranno essere delle *rielaborazioni* del metodo di Maggi, il primo, e del metodo dei moltiplicatori di Lagrange, il secondo ⁽⁴⁾. Rielaborazioni che, per rendere più facile e immediata la loro applicazione, si espletano nella stesura di *fogli di lavoro*, costituiti ciascuno da una successione di istruzioni.

Per esigenze editoriali, cioè per “vincoli di spazio”, la trattazione verrà limitata ai soli vincoli indipendenti dal tempo e un solo esempio applicativo verrà proposto; esso riguarda un semplice caso di sistema anolonomo con vincolo non lineare realizzabile, ciò che riveste di per sé un certo interesse, visto che di tali vincoli non se ne conoscono tanti (oserei dire che non se ne conoscono affatto). Altri esempi e complementi alla teoria sono disponibili sul sito: www.compomat.it.

■ 2 Spazio delle configurazioni

Rivolveremo la nostra attenzione a quei sistemi meccanici schematizzabili in un insieme (finito o infinito) di punti mobili nello spazio affine tridimensionale euclideo, ma vincolati tra loro in maniera tale che, in definitiva, tutte le possibili configurazioni che essi possono assumere nello spazio formano un insieme Q dotato di una struttura di varietà differenziabile, reale e a dimensione finita n . I suddetti vincoli vengono detti **vincoli di posizione** e la varietà Q **varietà** (o anche **spazio**) **delle configurazioni**. La dimensione n di Q prende il nome di **numero dei gradi di libertà** del sistema. Siffatti sistemi vengono detti **olonomi**.

Per semplicità e per brevità, ci limiteremo qui a considerare solo vincoli di posizione indipendenti dal tempo.

Sia allora $\{P_\nu, \nu \in \mathcal{B}\}$ un sistema olonomo con varietà delle configurazioni Q . Qui ν è un indice variabile in un insieme \mathcal{B} , discreto o continuo, che etichetta ogni punto in maniera da renderlo distinguibile da ogni altro. Fissato un punto origine O , lo spazio affine tridimensionale diventa uno spazio vettoriale, che denotiamo con \mathbb{E}_3 , e risultano definiti i **vettori posizione** $\mathbf{r}_\nu = P_\nu - O$ di ogni singolo punto P_ν . Possiamo di conseguenza pensare a una applicazione

$$\mathbf{r}_\nu: Q \rightarrow \mathbb{E}_3: q \mapsto \mathbf{r}_\nu(q)$$

che associa a una qualunque configurazione $q \in Q$ il vettore posizione di ogni punto P_ν del sistema in quella configurazione. Scelto inoltre un qualunque sistema di **coordinate lagrangiane** ⁽⁵⁾ (q^i) su Q , ognuna delle applicazioni $\mathbf{r}_\nu(q)$ risulta localmente rappresentata da una funzione delle (q^i) a valori vettoriali

$$(1) \quad \mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(q^i).$$

Una curva parametrizzata sulla varietà delle configurazioni Q ,

$$I \rightarrow Q: t \mapsto q(t)$$

⁽⁴⁾Gli argomenti di questo capitolo sono in gran parte tratti e opportunamente assemblati da alcuni articoli di recente pubblicazione [1, 2, 3]

⁽⁵⁾Si usa questa dizione per un qualunque sistema di coordinate su di una varietà delle configurazioni.

dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo e la variabile $t \in I$ è interpretata come *tempo*, definisce un **moto** del sistema. Se il moto $q(t)$ è rappresentato da equazioni parametriche $q^i = q^i(t)$ allora i tre enti cinematici fondamentali di ogni singolo punto P_ν , posizione, velocità e accelerazione, al variare del tempo t , sono dati dalle formule seguenti:

$$(2) \quad \begin{cases} \mathbf{r}_\nu(t) = \mathbf{r}_\nu(q^i(t)), \\ \mathbf{v}_\nu(t) = \frac{d\mathbf{r}_\nu}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt}, \\ \mathbf{a}_\nu(t) = \frac{d\mathbf{v}_\nu}{dt} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q^j \partial q^i} \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \frac{d^2 q^i}{dt^2}. \end{cases}$$

■ 3 Spazio degli stati

L'insieme TQ di tutti i vettori tangenti a una varietà differenziabile Q ammette una struttura canonica di varietà differenziabile, di dimensione doppia di quella di Q . La varietà TQ è detta **fibrato tangente** di Q e la mappa $\tau_Q: TQ \rightarrow Q$ che associa a ogni vettore $v \in TQ$ il punto $q \in Q$ in cui v è applicato, cioè il punto q tale che $v \in T_q Q$, si chiama **fibrazione tangente**.

Se Q è lo spazio delle configurazioni di un sistema olonomo, allora ogni vettore $v \in TQ$ rappresenta uno **stato cinematico** ⁽⁶⁾ del sistema di punti P_ν , cioè un insieme di coppie di vettori posizione-velocità compatibili con i vincoli imposti:

$$v = \{(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu), \nu \in \mathcal{B}\}.$$

Si osservi che

$$q = \tau_Q(v) = \{\mathbf{r}_\nu, \nu \in \mathcal{B}\}$$

è la configurazione corrispondente allo stato v . Di conseguenza, chiameremo TQ lo **spazio degli stati** del sistema olonomo considerato.

A un qualunque sistema di coordinate lagrangiane (q^i), definite sopra un dominio aperto $U \subseteq Q$, viene canonicamente associato un sistema di coordinate (q^i, \dot{q}^i) sul dominio $TU \subseteq TQ$ definito al modo seguente: a ogni vettore $v \in TQ$ le (q^i) associano i valori delle coordinate lagrangiane del punto di U dove v è applicato, mentre le (\dot{q}^i) associano le componenti di v rispetto a dette coordinate. Le (\dot{q}^i) prendono il nome di **velocità lagrangiane**. Si noti bene che queste “velocità” sono delle coordinate su TQ e, almeno quando non sia detto il contrario, non vanno intese come derivate rispetto al tempo t delle q^i . A questo proposito va subito osservato che, data una curva $q(t)$ su Q rappresentata da equazioni parametriche $q^i = q^i(t)$, risulta univocamente determinata una curva $v(t)$ su TQ localmente rappresentata da equazioni parametriche

$$\begin{cases} q^i = q^i(t), \\ \dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt}. \end{cases}$$

⁽⁶⁾O stato cinetico, o atto di moto.

Intepretata la curva $q(t)$ come moto del sistema olonomo, la curva $v(t)$ rappresenterà la successione temporale degli stati cinematici del sistema stesso, e le prime due equazioni (2),

$$(3) \quad \begin{cases} \mathbf{r}_\nu(t) = \mathbf{r}_\nu(q^i(t)), \\ \mathbf{v}_\nu(t) = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt}, \end{cases}$$

forniranno le coppie vettoriali posizione-velocità dei singoli punti del sistema allo scorrere del tempo t .

Ciò detto, prescindendo dal tempo e quindi dal concetto di moto, le formule (3) consentono di affermare che, nel dominio di un sistema di coordinate (q^i, \dot{q}^i) su TQ , gli stati ⁽⁷⁾ $(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu)$ ammettono la rappresentazione parametrica

$$(4) \quad \begin{aligned} \mathbf{r}_\nu &= \mathbf{r}_\nu(q^i) \\ \mathbf{v}_\nu &= \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \dot{q}^i \end{aligned}$$

nei parametri (q^i) variabili nel loro dominio di definizione, e (\dot{q}^i) variabili in tutto \mathbb{R}^n .

■ 4 Vincoli di mobilità e sistemi anolonomi

A un sistema olonomo possono essere imposti dei **vincoli di mobilità**, cioè dei vincoli coinvolgenti, nel loro insieme, non solo le posizioni \mathbf{r}_ν dei punti P_ν , ma anche le loro velocità \mathbf{v}_ν . Gli stati compatibili con tali **vincoli addizionali** formano evidentemente un sottoinsieme C dello spazio degli stati TQ . Noi ci porremo qui, senza peraltro diminuire la portata della teoria verso le applicazioni, nel caso in cui C soddisfa alle seguenti **condizioni di regolarità**:

- C è una sottovarietà di dimensione $n + m$, con $m < n = \dim Q$.
- La restrizione $\tau_C: C \rightarrow Q$ della fibrazione tangente $TQ \rightarrow Q$ a C è suriettiva (questo significa che i vincoli di mobilità non implicano vincoli sulle configurazioni).
- Per ogni $q \in Q$, l'insieme $C_q = C \cap T_q Q$ è una sottovarietà di dimensione m non dipendente da q .

La figura 11.1 schematizza le condizioni di regolarità di C .

Non perderemo tuttavia di vista il fatto che, affinché le condizioni di regolarità siano soddisfatte, occorre talvolta escludere da C certi **stati singolari**, dove almeno una delle delle condizioni suddette non è soddisfatta ⁽⁸⁾. La presenza di stati singolari comporta delle restrizioni sulle configurazioni. La figura 11.2 illustra schematicamente la presenza di stati singolari.

⁽⁷⁾Ricordiamo per l'ultima volta che per "stato" intendiamo uno stato cinetico compatibile con i vincoli.

⁽⁸⁾Di questi "stati singolari" non v'è alcun cenno nelle *Lezioni*. D'altra parte essi si manifestano essenzialmente nel caso di vincoli di mobilità non lineari.

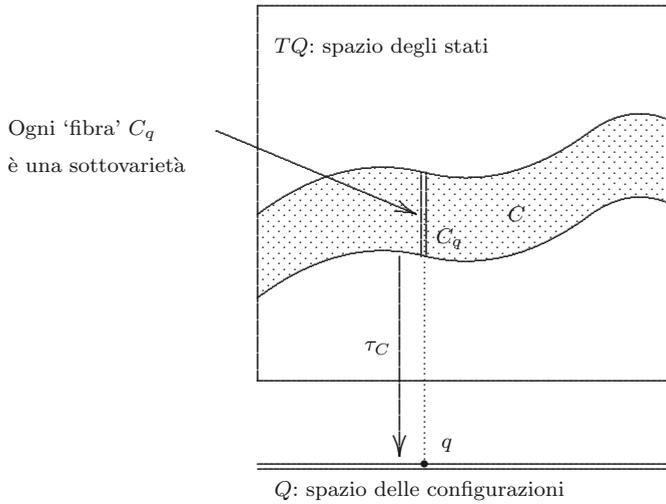


Figura 11.1. Regolarità di C .

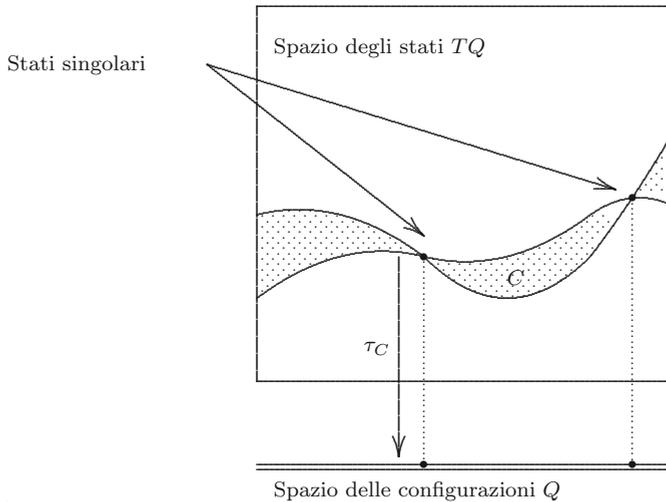


Figura 11.2. Stati vincolati singolari.

Un sistema olonomo a cui siano imposti vincoli di mobilità sarà qui chiamato **sistema anolonomo**. Anche se possono essere presenti stati singolari, chiameremo C **varietà vincolare** o, semplicemente, **vincolo**.

Per la teoria sviluppata nel seguito sarà fondamentale distinguere tra due tipi di rappresentazione (in coordinate locali) del vincolo C : la **rappresentazione parametrica** e la **rappresentazione implicita**.

1. Nella rappresentazione parametrica il vincolo C è descritto da n equazioni del tipo

$$(5) \quad \dot{q}^i = \psi^i(q, z)$$

negli m parametri $z = (z^\alpha)$ ($\alpha = 1, \dots, m < n$). Si noti bene che le (q^i, z^α) possono essere interpretate come coordinate su C ⁽⁹⁾.

2. Nella rappresentazione implicita il vincolo C è descritto da $r = n - m$ equazioni indipendenti ⁽¹⁰⁾ del tipo

$$(6) \quad C^a(q, \dot{q}) = 0, \quad a = 1, \dots, r$$

Osservazione 11.1. Le condizioni di regolarità sono rispettivamente equivalenti a:

$$(7) \quad \begin{cases} \text{rank} \left[\frac{\partial \psi^i}{\partial z^\alpha} \right]_{n \times m} = m & \text{(rango massimo)} \\ \text{rank} \left[\frac{\partial C^a}{\partial \dot{q}^i} \right]_{n \times r} = r & \text{(rango massimo)} \end{cases}$$

Per le derivate parziali che compongono queste due matrici, che interverranno frequentemente nel seguito, useremo i simboli

$$(8) \quad \psi_\alpha^i = \frac{\partial \psi^i}{\partial z^\alpha} \quad \text{e} \quad C_i^a = \frac{\partial C^a}{\partial \dot{q}^i}.$$

Osservazione 11.2. Tra le due rappresentazioni valgono le relazioni

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial C^a}{\partial q^i} + C_j^a \frac{\partial \psi^j}{\partial q^i} = 0, \\ C_i^a \psi_\alpha^i = 0, \end{cases}$$

che si ottengono differenziando l'identità $C^a(q, \psi(q, z)) = 0$:

$$dC^a = \left(\frac{\partial C^a}{\partial q^i} + \frac{\partial C^a}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial \psi^j}{\partial q^i} \right) dq^i + \frac{\partial C^a}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial \psi^j}{\partial z^\alpha} dz^\alpha = 0.$$

Osservazione 11.3. Un vincolo di mobilità si dice **lineare** se ogni fibra $C_q = C \cap T_q Q$ è un sottospazio vettoriale di $T_q Q$. In tal caso è sempre possibile trovare equazioni parametriche lineari nei parametri z ,

$$(10) \quad \dot{q}^i = \psi_\alpha^i(q) z^\alpha,$$

ed equazioni implicite lineari nelle \dot{q} ⁽¹¹⁾,

$$(11) \quad C_i^a(q) \dot{q}^i = 0.$$

⁽⁹⁾I parametri z^α sono le *caratteristiche cinetiche* delle *Lezioni*, dove sono denotati con e_α (cap. V, n. 54). Le nostre ψ sono invece denotate con η .

⁽¹⁰⁾'Indipendenti' significa che i differenziali dC^a sono linearmente indipendenti in ogni punto di C dove le funzioni C^a sono definite.

⁽¹¹⁾Si noti la coerenza tra le notazioni adottate in queste due formule con le notazioni introdotte nelle (8).

Osservazione 11.4. Tra i vincoli di mobilità lineari si trovano quelli derivanti dall'imposizione di **vincoli di configurazione** o **vincoli olonomi**, rappresentati da una sottovarietà S dello spazio delle configurazioni Q , ossia, in coordinate, da r equazioni indipendenti

$$S^a(q) = 0.$$

Infatti, se il sistema è obbligato ad assumere solo configurazioni appartenenti a S , le sue possibili velocità dovranno essere tangenti a S . Ciò significa le velocità lagrangiane dovranno soddisfare al vincolo di mobilità C espresso dalle equazioni

$$(12) \quad \frac{\partial S^a}{\partial q^i} \dot{q}^i = 0.$$

Queste sono equazioni lineari del tipo (11) con

$$C_i^a(q) = \frac{\partial S^a}{\partial q^i}.$$

Vincoli di mobilità di questo tipo possono essere chiamati **vincoli derivati** o anche **vincoli integrabili**. Si pone in effetti il problema di stabilire se, dato un vincolo rappresentato da equazioni lineari del tipo (11), esso è conseguenza di un vincolo addizionale di posizione imposto al sistema olonomo di partenza ⁽¹²⁾. La questione si risolve facilmente osservando che esistono (localmente) delle funzioni $S^a(q)$, vedi la (12), tali che

$$C_i^a(q) = \frac{\partial S^a}{\partial q^i}$$

se e solo se per ogni indice a il sistema a due indici (i, j)

$$\frac{\partial C_i^a}{\partial q^j}$$

è simmetrico rispetto a questi.

■ 5 Equazioni dinamiche

I due tipi di rappresentazione di un vincolo di mobilità $C \subset TQ$ che abbiamo considerato sono alla base di due distinti metodi atti a costruire le equazioni dinamiche. Entrambi questi metodi hanno due punti di partenza in comune: le **equazioni dinamiche di Newton**

$$(13) \quad m_\nu \mathbf{a}_\nu = \mathbf{A}_\nu + \mathbf{R}_\nu,$$

assunte valide per ogni punto P_ν del sistema e il cui significato sarà chiarito tra breve, e la nozione di **vincolo ideale** che sarà definita più avanti. I due metodi

⁽¹²⁾Un problema più sottile è questo: dato un vincolo rappresentato da equazioni del tipo (11), esso è *almeno in parte* conseguenza di un vincolo addizionale di posizione imposto al sistema olonomo di partenza. È analizzato nelle *Lezioni*, in una forma leggermente diversa dalla nostra, al paragrafo 58 del cap. V.

hanno in comune anche la finalità: costruire sopra lo spazio degli stati TQ , dei sistemi dinamici del primo ordine, cioè dei campi vettoriali le cui curve integrali, in tutto o in parte, descrivano tutti i possibili **moti attuali** del sistema olonomo, cioè i moti reali possibili compatibilmente con i vincoli imposti.

Il primo metodo, basato sulla rappresentazione parametrica, conduce a equazioni dinamiche che diremo di **prima specie**. Esse sono associate a un campo vettoriale Z definito proprio sul vincolo C . Le sue curve integrali saranno del tipo $(q^i(t), z^\alpha(t))$, e le $q^i(t)$ forniranno i moti del sistema.

Il secondo metodo è invece basato sulla rappresentazione implicita dei vincoli e conduce a equazioni dinamiche, che diremo di **seconda specie**, associate a un campo vettoriale D , definito su tutto $(^{13})$ lo spazio degli stati TQ , ma tangente a C . Quindi ogni sua curva integrale che parte da uno stato di C resta su C . Saranno pertanto da considerare fisicamente accettabili solo quelle curve integrali di D , $(q^i(t), \dot{q}^i(t))$ basate su C , cioè soddisfacenti alle condizioni iniziali, per $t = 0$, $(q^i(0), \dot{q}^i(0)) \in C$.

Essendo i sistemi dinamici Z e D conseguenza dei medesimi principi, va da sé che la restrizione di D a C coinciderà col campo Z .

La figura 11.3 schematizza quanto ora detto.

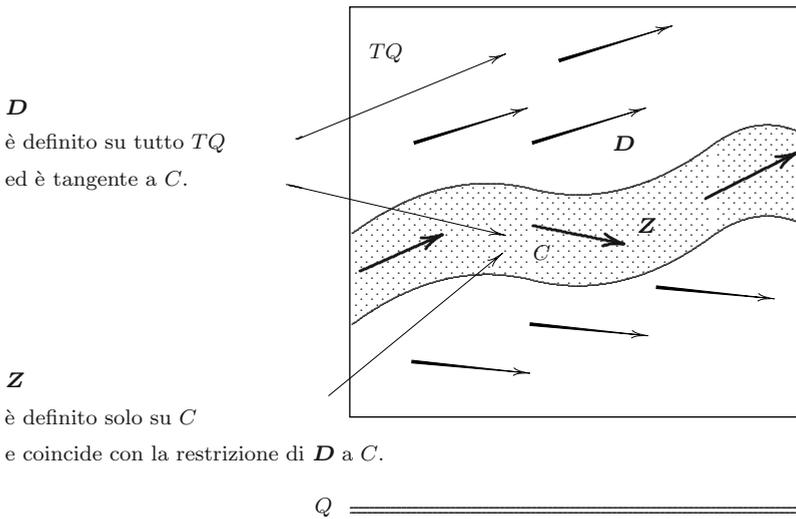


Figura 11.3. I sistemi dinamici D e Z .

Nel delineare i due metodi faremo per semplicità la consueta ipotesi che il sistema meccanico in esame sia costituito da un numero finito N di punti materiali $(^{14})$.

Ritornando ora alle equazioni di Newton (13), occorre precisare che:

- m_ν è la massa del punto P_ν ,

⁽¹³⁾Come per il primo metodo, quanto ora stiamo dicendo s'intende valido con l'esclusione degli stati singolari.

⁽¹⁴⁾L'estensione al caso di sistemi costituiti da corpi materiali continui non comporta particolari difficoltà.

- \mathbf{a}_ν è l'accelerazione di P_ν ,
- \mathbf{A}_ν è la **forza attiva** agente su P_ν ,
- \mathbf{R}_ν è la **forza reattiva** o **reazione vincolare** agente su P_ν .

Ogni vettore \mathbf{A}_ν va inteso come funzione nota dello stato cinematico del sistema, ed eventualmente dal tempo.

Le reazioni vincolari \mathbf{R}_ν sono *a priori* incognite, ma si ritengono responsabili del soddisfacimento dei vincoli durante ogni moto attuale del sistema. Il modo con cui queste reazioni si esplicano è connesso a ipotesi fisico-strutturali espresse matematicamente da opportune **condizioni costitutive**.

In entrambi i metodi di cui si è detto entreranno in gioco alcune grandezze fisiche fondamentali. Innanzitutto l'energia cinetica, che assume la forma

$$(14) \quad T = \frac{1}{2} g_{ij} \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt}$$

qualora si ponga

$$(15) \quad g_{ij} = \sum_{\nu} m_{\nu} \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^j}.$$

Com'è noto, i coefficienti g_{ij} dell'energia cinetica forniscono le componenti di un tensore metrico sopra la varietà delle configurazioni Q , che pertanto diventa una varietà riemanniana. I **simboli di Christoffel**, ovvero i coefficienti della connessione di Levi-Civita associata a questo tensore metrico, definiti in generale dall'uguaglianza

$$(16) \quad \Gamma_{jk,i} = \frac{1}{2} (\partial_j g_{ki} + \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{jk})$$

possono calcolarsi con la formula

$$(17) \quad \Gamma_{jk,i} = \sum_{\nu} m_{\nu} \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^j \partial q^k}.$$

Interverranno poi le **forze lagrangiane attive** e **reattive**, rispettivamente definite da

$$(18) \quad A_i = \sum_{\nu} \mathbf{A}_{\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^i}, \quad R_i = \sum_{\nu} \mathbf{R}_{\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^i}.$$

Useremo sovente la notazione abbreviata ∂_i per denotare la derivata parziale rispetto a una coordinata lagrangiana q^i :

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial q^i}.$$

■ 6 Equazioni dinamiche di prima specie

Il primo metodo di costruzione delle equazioni dinamiche prende le mosse da questa semplice osservazione: se il vincolo C è rappresentato da equazioni parametriche (5)

$$\dot{q}^i = \psi^i(q, z),$$

allora possiamo affermare che condizione necessaria affinché un moto rappresentato da funzioni $q^i(t)$ e $z^\alpha(t)$ sia compatibile con i vincoli è che tali funzioni soddisfino alle n equazioni differenziali

$$(19) \quad \frac{dq^i}{dt} = \psi^i(q, z).$$

Di conseguenza, sorge spontanea l'idea di affiancare a queste n equazioni altre m equazioni differenziali del tipo

$$(20) \quad \frac{dz^\alpha}{dt} = Z^\alpha(q, z),$$

in modo da poter costituire un sistema dinamico composto da $n + m$ equazioni differenziali

$$(21) \quad \mathbf{Z}: \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = \psi^i(q, z), \\ \frac{dz^\alpha}{dt} = Z^\alpha(q, z), \end{cases}$$

nelle $n+m$ funzioni $q^i(t)$ e $z^\alpha(t)$. Un sistema dinamico di questo tipo corrisponderà a un campo vettoriale, denotato con \mathbf{Z} , sopra il vincolo C ⁽¹⁵⁾.

Si pone allora il problema di determinare delle funzioni $Z^\alpha(q, z)$ per cui le curve $q(t)$ soluzioni del sistema (21) forniscano tutti i moti attuali del sistema anolonomo.

Affrontiamolo cominciando col ricordare che per ogni moto $q^i(t)$ di un sistema olonomo, le velocità e le accelerazioni dei punti costituenti P_ν sono date dalle equazioni (2). Se si impongono vincoli di mobilità descritti da equazioni parametriche (5) occorre rimpiazzare le derivate dq^i/dt con le funzioni $\psi^i(q(t), z(t))$. Si possono in tal modo ottenere le velocità e le accelerazioni dei punti P_ν lungo un qualunque moto compatibile con i vincoli:

$$(22) \quad \begin{cases} \mathbf{v}_\nu(t) = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \psi^i, \\ \mathbf{a}_\nu(t) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i \partial q^j} \psi^i \psi^j + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \left(\frac{\partial \psi^i}{\partial q^j} \psi^j + \frac{\partial \psi^i}{\partial z^\alpha} \frac{dz^\alpha}{dt} \right). \end{cases}$$

Notiamo ora che a secondo membro del secondo gruppo di queste equazioni è presente un termine lineare nelle derivate dz^α/dt . Possiamo metterlo in evidenza riscrivendo la seconda delle (22):

$$\psi_\alpha^i \frac{dz^\alpha}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} = \mathbf{a}_\nu - \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i \partial q^j} \psi^i \psi^j - \frac{\partial \psi^i}{\partial q^j} \psi^j \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i},$$

⁽¹⁵⁾Si è già osservato che le (q, z) possono interpretarsi come coordinate su C .

ricordando di aver posto (8) $\psi_\alpha^i = \partial\psi^i/\partial z^\alpha$. Moltiplicando scalarmente entrambi i membri per il vettore

$$\sum_\nu m_\nu \psi_\beta^h \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^h}$$

e tenuto conto delle definizioni (15) e (17), si ottiene l'uguaglianza

$$g_{ij} \psi_\alpha^i \psi_\beta^j \frac{dz^\alpha}{dt} = \psi_\beta^h \left(\sum_\nu m_\nu \mathbf{a}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^h} - \psi^i \psi^j \Gamma_{ij,h} - \psi^j \frac{\partial \psi^i}{\partial q^j} g_{ih} \right),$$

dalla quale, valendo le equazioni dinamiche $m_\nu \mathbf{a}_\nu = \mathbf{A}_\nu + \mathbf{R}_\nu$ e tenuto conto delle posizioni (18), si deduce:

$$(23) \quad g_{ij} \psi_\alpha^i \psi_\beta^j \frac{dz^\alpha}{dt} = \psi_\beta^h \left(A_h + R_h - \psi^i \psi^j \Gamma_{ij,h} - \psi^j \frac{\partial \psi^i}{\partial q^j} g_{ih} \right).$$

Si osservi ora che, posto

$$(24) \quad G_{\alpha\beta} = g_{ij} \psi_\alpha^i \psi_\beta^j,$$

la matrice simmetrica $m \times m$ $[G_{\alpha\beta}]$, grazie alle condizioni di regolarità dei vincoli (7), risulta essere definita-positiva e quindi invertibile. Con l'intervento della matrice inversa $[G^{\alpha\beta}]$ l'equazione (20) si risolve facilmente rispetto alle derivate dz^α/dt :

$$(25) \quad \frac{dz^\alpha}{dt} = G^{\alpha\beta} \psi_\beta^h \left(A_h + R_h - \psi^i \psi^j \Gamma_{ij,h} - \psi^j \frac{\partial \psi^i}{\partial q^j} g_{ih} \right).$$

Abbiamo così trovato m equazioni del tipo (20).

Tuttavia in queste equazioni compaiono le forze lagrangiane reattive R_i che sono, come si è detto, incognite. A questo punto occorre postulare delle **condizioni costitutive** sulle R_i . La condizione costitutiva "ideale", ma troppo drastica, sarebbe il loro annullarsi, $R_i = 0$. Possiamo invece optare per delle condizioni più deboli ma egualmente efficaci a liberare le equazioni dalla presenza delle R_i , vale a dire

$$(26) \quad \psi_\beta^i R_i = 0$$

Questo ci spinge a introdurre la definizione seguente.

Definizione 11.1. Diciamo che i vincoli di un sistema anolonomo sono **ideali** se le m equazioni (26) sono soddisfatte.

Possiamo allora affermare che:

Teorema 11.1. La dinamica di un sistema anolonomo a vincoli ideali è retta dalle equazioni differenziali

$$(27) \quad \mathbf{Z} : \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = \psi^i(q, z), \\ \frac{dz^\alpha}{dt} = G^{\alpha\beta} \psi_\beta^h \left(A_h - \psi^i \psi^j \Gamma_{ij,h} - g_{hi} \frac{\partial \psi^i}{\partial q^j} \psi^j \right) \end{cases}$$

dove $[G^{\alpha\beta}]$ è l'inversa della matrice $[G_{\alpha\beta}]$ i cui elementi sono definiti dalla (24).

Queste sono le equazioni dinamiche di prima specie. Come era nei nostri intenti, si è trovato un sistema dinamico associato a un campo vettoriale $\mathbf{Z}(q, z)$ definito su C (e solo su C).

Osservazione 11.5. Come derivazione di funzioni lisce sopra C , il campo $\mathbf{Z}(q, z)$ è definito da

$$(28) \quad \mathbf{Z} = \psi^i(q, z) \frac{\partial}{\partial q^i} + Z^\alpha(q, z) \frac{\partial}{\partial z^\alpha},$$

dove le Z^α sono le funzioni a secondo membro della seconda equazione dinamica (27),

$$(29) \quad Z^\alpha = G^{\alpha\beta} \psi_\beta^h \left(A_h - \psi^i \psi^j \Gamma_{ij,h} - g_{hi} \frac{\partial \psi^i}{\partial q^j} \psi^j \right).$$

Pertanto, una funzione $F(q, z)$ è un integrale primo di \mathbf{Z} se e solo se soddisfa l'equazione

$$(30) \quad \mathbf{Z}(F) = \psi^i(q, z) \frac{\partial F}{\partial q^i} + Z^\alpha(q, z) \frac{\partial F}{\partial z^\alpha} = 0$$

Osservazione 11.6. Le Z^α sono il prodotto del covettore

$$\phi = [\phi_i] = \left[A_i - \psi^i \psi^j \Gamma_{ij,h} - g_{ij} \frac{\partial \psi^j}{\partial q^h} \psi^h \right]$$

con i vettori

$$\psi^\alpha = [\psi^{\alpha i}] = \left[G^{\alpha\beta} \frac{\partial \psi^i}{\partial z^\beta} \right],$$

vale a dire:

$$(31) \quad Z^\alpha = \psi^{\alpha i} \phi_i = \langle \psi^\alpha, \phi \rangle$$

Osservazione 11.7. Il secondo gruppo delle equazioni dinamiche (27) sono le **equazioni di Maggi in forma esplicita**. Nella letteratura e nelle *Lezioni* ⁽¹⁶⁾ queste equazioni si riferiscono ai soli vincoli lineari ⁽¹⁷⁾ e compaiono in forma *implicita* cioè, secondo le notazioni qui adottate, nella forma

$$(32) \quad \psi_\alpha^i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} \right) = A_\alpha,$$

dove $A_\alpha = \psi_\alpha^i A_i$. Il significato di queste equazioni, e soprattutto come esse possano essere applicate, non sempre è posto in chiaro nei libri; anche nelle *Lezioni*, dove quest'argomento è trattato piuttosto sommariamente, malgrado la sua importanza. In effetti, il passaggio dalla forma implicita (32) alla forma esplicita (27) non si ottiene facendo intervenire le equazioni del vincolo nelle (32), sostituendo cioè le

⁽¹⁶⁾Cap. V, n. 55.

⁽¹⁷⁾Però, nel modo con cui le abbiamo scritte, esse sono valide anche per vincoli non lineari.

\dot{q}^i con le funzioni $\psi^i(q, z)$, come detto al n. 55 delle *Lezioni*. Infatti, interpretando alla lettera quest'operazione, l'energia cinetica assumerebbe la forma

$$T(q, z) = \frac{1}{2} g_{ij} \psi^i \psi^j$$

e di conseguenza la derivata parziale $\partial T / \partial \dot{q}^i$ sarebbe priva di senso. Occorre invece, in primo luogo, esplicitare le equazioni di Lagrange, che come si sa assumono la forma

$$(33) \quad g_{ij} \frac{d\dot{q}^j}{dt} + \Gamma_{hk,i} \dot{q}^h \dot{q}^k = A_i,$$

e poi eseguire la sostituzione $\dot{q}^i = \psi^i(q, z)$. Ha ora senso eseguire le derivate delle \dot{q}^j rispetto al tempo t :

$$\frac{d\dot{q}^j}{dt} = \frac{\partial \psi^j}{\partial q^h} \dot{q}^h + \frac{\partial \psi^j}{\partial z^\alpha} \dot{z}^\alpha = \frac{\partial \psi^j}{\partial q^h} \psi^h + \psi^j_\beta \dot{z}^\beta.$$

Le (33) diventano

$$(34) \quad g_{ij} \left(\frac{\partial \psi^j}{\partial q^h} \psi^h + \psi^j_\beta \dot{z}^\beta \right) + \Gamma_{hk,i} \psi^h \psi^k = A_i,$$

e si conclude quindi che il significato delle equazioni di Maggi (32) è questo:

$$(35) \quad \psi^i_\alpha \left[g_{ij} \left(\frac{\partial \psi^j}{\partial q^h} \psi^h + \psi^j_\beta \dot{z}^\beta \right) + \Gamma_{hk,i} \psi^h \psi^k \right] = A_\alpha.$$

Di qui poi si estraggono le \dot{z}^α col metodo che abbiamo visto, introducendo cioè la matrice $[G_{\alpha\beta} = g_{ij} \psi^i_\alpha \psi^j_\beta]$ e la sua inversa.

■ 7 Equazioni dinamiche di seconda specie

Ci basiamo su di una rappresentazione implicita del vincolo C costituita da r equazioni indipendenti $C^a(q, \dot{q}) = 0$. Cominciamo con la caratterizzazione dei vincoli ideali.

Teorema 11.2. *Un vincolo di velocità $C \subset TQ$ definito da r equazioni $C^a(q, \dot{q}) = 0$ è ideale, vale cioè la (26), se e solo se esistono r funzioni $\lambda_a(q, \dot{q})$ tali che*

$$(36) \quad R_i = \lambda_a \frac{\partial C^a}{\partial \dot{q}^i}.$$

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare l'equivalenza ⁽¹⁸⁾

$$(37) \quad \psi^i_\beta R_i = 0 \iff R_i = \lambda_a C^a_i.$$

L'implicazione \Leftarrow discende dalla seconda delle uguaglianze (9). Per dimostrare l'implicazione inversa consideriamo le r forme differenziali

$$\gamma^a = C^a_i d\dot{q}^i,$$

⁽¹⁸⁾Si ricordino le notazioni (8).

insieme agli m campi vettoriali

$$\boldsymbol{\psi}_\alpha = \psi_\alpha^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}.$$

Per le condizioni di regolarità (7), sia le forme γ^a sia i campi $\boldsymbol{\psi}_\alpha$ sono indipendenti. Inoltre le seconde equazioni (9) mostrano che le γ^a si annullano sui campi $\boldsymbol{\psi}_\alpha$,

$$\langle \boldsymbol{\psi}_\alpha, \gamma^a \rangle = 0.$$

Allo stesso tempo si vede che i vettori

$$\mathbf{C}^a = C_i^a \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i},$$

sono tangenti a C , tra loro indipendenti e ortogonali agli $\boldsymbol{\psi}_\alpha$,

$$\boldsymbol{\psi}_\alpha \cdot \mathbf{C}^a = 0.$$

Dunque, in ogni stato $(q, z) \in C$, gli n vettori $(\mathbf{C}^a, \boldsymbol{\psi}_\alpha)$ formano una decomposizione in sottospazi ortogonali dello spazio tangente alla fibra di TQ in quello stato. Di conseguenza, se un vettore \mathbf{v} è tale che $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\psi}_\alpha = 0$, cioè se

$$v_i \frac{\partial \psi^i}{\partial z^\alpha} = 0$$

per ogni α , allora \mathbf{v} è una combinazione lineare dei vettori \mathbf{C}^a :

$$v_i = \lambda_a \frac{\partial C^a}{\partial \dot{q}^i}. \quad \square$$

Un primo passo per giungere alla scrittura delle equazioni dinamiche è il seguente teorema.

Teorema 11.3. *Nel caso di vincoli ideali, dalle equazioni di Newton discendono le equazioni dinamiche*

$$(38) \quad D_\lambda : \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i, \\ \frac{d\dot{q}^i}{dt} = g^{ij} \left(A_i - \Gamma_{hk,i} \dot{q}^h \dot{q}^k + \lambda_a \frac{\partial C^a}{\partial \dot{q}^j} \right). \end{cases}$$

Dimostrazione. Cominciamo col considerare le n sommatorie (una per ogni indice i)

$$(39) \quad S_i = \sum_\nu (m_\nu \mathbf{a}_\nu - \mathbf{A}_\nu - \mathbf{R}_\nu) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial \dot{q}^i}.$$

Con l'intervento delle definizioni (18) esse assumono la forma

$$S_i = \sum_\nu m_\nu \mathbf{a}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial \dot{q}^i} - A_i - R_i.$$

Il primo termine a secondo membro, tenuto conto dell'espressione (2) delle accelerazioni \mathbf{a}_ν , si sviluppa in

$$\sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{a}_{\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^i} = \sum_{\nu} m_{\nu} \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^j \partial q^k} \frac{dq^j}{dt} \frac{dq^k}{dt} + \sum_{\nu} m_{\nu} \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^j} \frac{d^2 q^j}{dt^2}.$$

Tenuto conto delle definizioni (15) e (17) abbiamo:

$$(40) \quad S_i = g_{ij} \frac{d^2 q^j}{dt^2} + \Gamma_{jk,i} \frac{dq^j}{dt} \frac{dq^k}{dt} - A_i - R_i,$$

Ma per la definizione (39), le equazioni newtoniane $m_{\nu} \mathbf{a}_{\nu} - \mathbf{A}_{\nu} - \mathbf{R}_{\nu} = 0$ implicano le equazioni $S_i = 0$,

$$(41) \quad g_{ij} \frac{d^2 q^j}{dt^2} + \Gamma_{jk,i} \frac{dq^j}{dt} \frac{dq^k}{dt} - A_i - R_i = 0.$$

Con l'intervento della matrice inversa $[g^{ij}]$ della $[g_{ij}]$ queste equazioni risultano equivalenti al sistema del secondo ordine in forma normale

$$(42) \quad \frac{d^2 q^i}{dt^2} = g^{ih} \left(A_h + R_h - \Gamma_{jk,h} \frac{dq^j}{dt} \frac{dq^k}{dt} \right).$$

Queste equazioni, a loro volta, sono equivalenti al sistema del primo ordine (38), tenuto conto della condizione costitutiva (36). \square

Osservazione 11.8. Le equazioni (41) sono la **forma esplicita delle equazioni di Lagrange**

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = A_i + R_i.$$

Le equazioni (38) costituiscono il sistema dinamico corrispondente a un campo vettoriale \mathbf{D}_{λ} su TQ dipendente dai *moltiplicatori di Lagrange* $\lambda = (\lambda_a)$. Il problema è dunque quello di *stabilire per quali funzioni $\lambda_a(q, \dot{q})$, se ne esistono, le curve integrali di \mathbf{D}_{λ} sono compatibili con i vincoli*. Occorre subito chiarire che:

Definizione 11.2. *Le curve integrali di \mathbf{D}_{λ} s'intendono **compatibili con i vincoli** se quelle che intersecano la sottovarietà C , o che sono basate in C , giacciono interamente su C .*

Il problema si traduce allora nel seguente: *stabilire per quali funzioni $\lambda_a(q, \dot{q})$, se ne esistono, il campo vettoriale \mathbf{D}_{λ} è tangente alla sottovarietà C* . Espresso in questa forma, se ne trova facilmente la soluzione.

Teorema 11.4. \mathbf{D}_{λ} è tangente a C se e solo se

$$(43) \quad \lambda_a(q, \dot{q}) = -H_{ab} \left(F^i \frac{\partial C^b}{\partial \dot{q}^i} + \dot{q}^i \frac{\partial C^b}{\partial q^i} \right)$$

dove si è posto

$$(44) \quad F^i(q, \dot{q}) = A^i - \Gamma_{hk}^i \dot{q}^h \dot{q}^k$$

e dove $[H_{ab}]$ è l'inversa della matrice $[H^{ab}]$ i cui elementi sono definiti da

$$(45) \quad H^{ab} = g^{ij} \frac{\partial C^a}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial C^b}{\partial \dot{q}^j}.$$

Dimostrazione. Come derivazione sulle funzioni, il campo vettoriale D_λ è dato da

$$(46) \quad D_\lambda = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \left(\lambda_a \frac{\partial C^a}{\partial \dot{q}^j} g^{ji} - \Gamma_{hk}^i \dot{q}^h \dot{q}^k + A^i \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}.$$

Allora D_λ è tangente a C se e solo se

$$D_\lambda C^a(q, \dot{q}) = f^a(C^1, \dots, C^r),$$

dove f^a sono funzioni di r variabili, $f^a(x^1, \dots, x^r)$, tali che $f^a(0, \dots, 0) = 0$. Siccome la restrizione a C di D_λ non dipende da queste funzioni (perché queste si annullano su C) e siccome siamo interessati solo a quelle curve integrali di D_λ che giacciono interamente su C , possiamo senz'altro assumere $f^a = 0$ senza perdita di generalità. Allora le equazioni $D_\lambda C^a(q, \dot{q}) = 0$ prendono la forma

$$(47) \quad \dot{q}^i \frac{\partial C^a}{\partial q^i} + H^{ab} \lambda_b + F^i \frac{\partial C^a}{\partial \dot{q}^i} = 0.$$

In virtù delle condizioni di regolarità dei vincoli, la matrice $[H^{ab}]$ risulta regolare. Con l'utilizzo della sua matrice inversa $[H_{ab}]$ possiamo risolvere le equazioni (47) lineari nei moltiplicatori di Lagrange, e trovare così le (43). \square

È ora sufficiente sostituire le espressioni (43) nelle (38) per ottenere effettive equazioni dinamiche, prive di incognite supplementari.

Teorema 11.5. *La dinamica di un sistema anolonomo a vincoli ideali definiti da r equazioni $C^a(q, \dot{q}) = 0$ è governata dalle equazioni differenziali*

$$(48) \quad D : \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i, \\ \frac{d\dot{q}^i}{dt} = F^\ell \left(\delta_\ell^i - H_{ab} \frac{\partial C^b}{\partial \dot{q}^\ell} \frac{\partial C^a}{\partial \dot{q}^j} g^{ij} \right) - H_{ab} \frac{\partial C^b}{\partial \dot{q}^\ell} \frac{\partial C^a}{\partial \dot{q}^j} g^{ij} \dot{q}^\ell, \end{cases}$$

associate a un campo vettoriale D su TQ . I moti attuali sono rappresentati da tutte e sole le soluzioni le cui condizioni iniziali soddisfano i vincoli.

Osservazione 11.9. La formula (43) permette il calcolo delle forze reattive lagrangiane lungo ogni moto:

$$(49) \quad R_i(q, \dot{q}) = -H_{ab} \left(F^j \frac{\partial C^b}{\partial \dot{q}^j} + \dot{q}^j \frac{\partial C^b}{\partial \dot{q}^j} \right) \frac{\partial C^a}{\partial \dot{q}^i}.$$

■ 8 Vincoli omogenei

Diciamo che un vincolo anolonomo è **omogeneo** se tutte le equazioni $C^a(q, \dot{q}) = 0$ che lo rappresentano sono omogenee nelle velocità lagrangiane \dot{q} . Si vede facilmente che l'omogeneità non dipende dalla scelta delle coordinate lagrangiane.

Teorema 11.6. *Per i vincoli omogenei ideali la potenza delle forze reattive $W = R_i \dot{q}^i$ si annulla in ogni stato compatibile.*

Dimostrazione. Per ipotesi il vincolo è omogeneo, vale a dire

$$\frac{\partial C^a}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i = k C^a(q, \dot{q}).$$

Se il vincolo è ideale vale la (36), Teorema 11.2, e quindi

$$W = R_i \dot{q}^i = \lambda_a \frac{\partial C^a}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i = k \lambda_a C^a$$

si annulla per $C^a = 0$. □

■ 9 Spostamenti virtuali

Nel ricercare le equazioni dinamiche dei sistemi olonomi e anolonomi ci siamo basati sulla nozione di vincolo ideale – vedi la (26) e l’equivalente (36) – dettata da considerazioni puramente matematiche atte ad eliminare la presenza delle reazioni vincolari in equazioni differenziali ottenute a partire dalle equazioni dinamiche newtoniane.

Dobbiamo ora suffragare questa scelta con considerazioni di carattere “meccanico”. La chiave di volta sarà, come vedremo, l’introduzione del concetto di “spostamento virtuale”. Premettiamo un’osservazione.

Osservazione 11.10. Le condizioni (26), $\psi_\alpha^i R_i = 0$, che caratterizzano i vincoli anolonomi ideali implicano, come caso particolare, le condizioni $R_i = 0$ che caratterizzano i vincoli olonomi ideali. Si osservi infatti che, in assenza di vincoli anolonomi, le equazioni $\dot{q}^i = \psi^i(q, z)$ sono rimpiazzate dalle banali equazioni $\dot{q}^i = \dot{q}^i$, nel senso che i parametri $z = (z^\alpha)$ sono rimpiazzati dalle $\dot{q} = (\dot{q}^i)$ e gli indici greci α, \dots sono rimpiazzati dagli indici latini i, \dots . Si ha così la transizione

$$\frac{\partial \psi^i}{\partial z^\alpha} \longmapsto \frac{\partial \psi^i}{\partial \dot{q}^j} \longmapsto \delta_j^i,$$

e quindi

$$R_i \frac{\partial \psi^i}{\partial z^\alpha} \longmapsto R_i.$$

Pertanto nel seguito non sarà necessario mantenere la distinzione tra vincoli ideali olonomi e vincoli ideali anolonomi; *gli enunciati riguarderanno sistemi anolonomi a vincoli ideali, avendo essi validità anche in assenza di tali vincoli.*

Poiché la dinamica di un sistema anolonomo è retta da equazioni differenziali del primo ordine associate a campi vettoriali su TQ o su $C \subset TQ$, possiamo interpretare ogni moto come successione continua (e differenziabile) di stati cinematici (e non solo di configurazioni), cioè come curva su TQ (e non solo su Q).

Secondo questa *filosofia*, per cui lo spazio degli stati TQ è l’arena su cui trattare la meccanica sistemi anolonomi, facendo intervenire le equazioni vincolari

parametriche si possono riscrivere le equazioni (22) alla maniera seguente:

$$(50) \quad \begin{aligned} \mathbf{v}_\nu(q, z) &= \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \psi^i, \\ \mathbf{a}_\nu(q, z, \dot{z}) &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i \partial q^j} \psi^i \psi^j + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \left(\frac{\partial \psi^i}{\partial q^j} \psi^j + \frac{\partial \psi^i}{\partial z^\alpha} \dot{z}^\alpha \right). \end{aligned}$$

Queste equazioni forniscono una rappresentazione parametrica, nei parametri $(q, z, \dot{z}) = (q^i, z^\alpha, \dot{z}^\alpha)$, di tutti i possibili “stati dinamici” compatibili con i vincoli, laddove per **stato dinamico** si voglia intendere un sistema di vettori posizione-velocità-accelerazione $(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu, \mathbf{a}_\nu)$.

Ciò premesso, fissiamo uno stato compatibile con i vincoli $s_0 = (q_0, \dot{q}_0) \in C$, e consideriamo una curva su C ,

$$c_{q_0} : I \rightarrow C : \varepsilon \mapsto c_{q_0}(\varepsilon)$$

avente le seguenti proprietà:

- c_{q_0} è basata in s_0 , vale a dire $c_{q_0}(0) = s_0 = (q_0, \dot{q}_0)$.
- La sua immagine è tutta contenuta nella fibra C_{q_0} , cioè nella sottovarietà degli stati compatibili corrispondenti alla configurazione q_0 . In termini più semplici: la curva c_{q_0} lascia invariata la configurazione q_0 .

Definizione 11.3. *A ogni vettore tangente in $\varepsilon = 0$ a una curva siffatta diamo il nome di **spostamento virtuale** basato nello stato $s_0 = (q_0, \dot{q}_0)$ (fig. 11.4).*

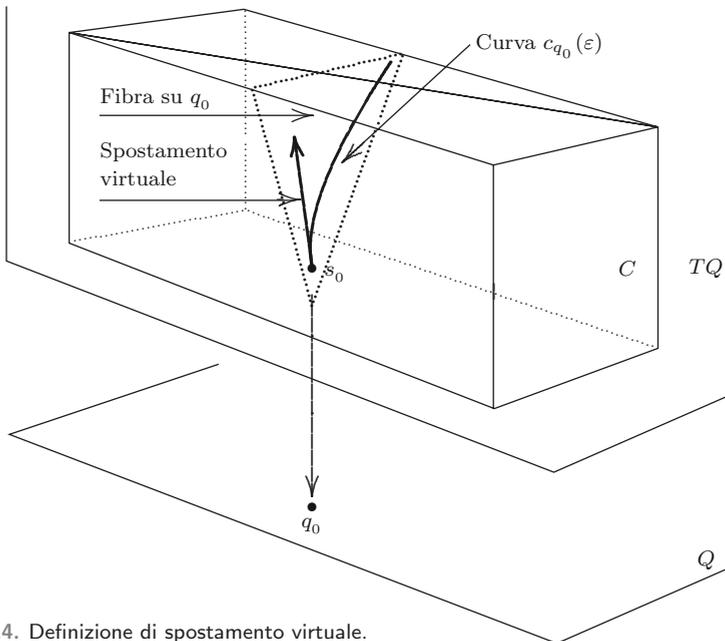


Figura 11.4. Definizione di spostamento virtuale.

Osservazione 11.11. Uno spostamento virtuale è un “piccolo spostamento” da uno stato $s_0 = (q_0, \dot{q}_0) \in TQ$ a uno stato vicino $s = (q_0, \dot{q})$ corrispondente alla stessa configurazione $q_0 \in Q$.

Accettata questa definizione, dobbiamo vedere quali proprietà se ne traggono. La prima considerazione da farsi è che uno spostamento virtuale darà luogo a uno **spostamento virtuale indotto** \mathbf{w}_ν per ogni punto P_ν del sistema nella fissata configurazione q_0 . Per determinare l'espressione di questi vettori cominciamo con l'osservare che una curva $c_{q_0}(\varepsilon)$ del tipo sopra definito genera una famiglia a un parametro di stati $(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu)$ del tipo

$$(51) \quad \begin{cases} \mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(q_0^i) = \text{costante}, \\ \mathbf{v}_\nu(\varepsilon) = \left. \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \right|_{q^i=q_0^i} \dot{q}^i(\varepsilon). \end{cases}$$

Segue che

$$(52) \quad \begin{cases} \frac{d\mathbf{r}_\nu}{d\varepsilon} = 0, \\ \frac{d\mathbf{v}_\nu}{d\varepsilon} = \left. \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \right|_{q^i=q_0^i} \frac{d\dot{q}^i}{d\varepsilon}. \end{cases}$$

La prima equazione conferma che la curva $c_{q_0}(\varepsilon)$ non muta la configurazione. Siamo quindi interessati alla sola seconda equazione nel senso che, come conseguenza della definizione di spostamento virtuale, siamo interessati a calcolare i vettori $d\mathbf{v}_\nu/d\varepsilon$ per $\varepsilon = 0$, denotati con \mathbf{w}_ν , nel caso in cui gli stati descritti da $c_{q_0}(\varepsilon)$ siano tutti compatibili con i vincoli anolonomi, cioè che sia sempre $c_{q_0}(\varepsilon) \in C$. Ciò accade se e solo se $\dot{q}^i = \psi^i(q_0, z)$, per cui le (52) diventano

$$(53) \quad \begin{cases} \frac{d\mathbf{r}_\nu}{dt} = 0, \\ \frac{d\mathbf{v}_\nu}{dt} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \frac{\partial \psi^i}{\partial z^\alpha} \right)_{q^i=q_0^i} \frac{dz^\alpha}{d\varepsilon}. \end{cases}$$

Ponendo allora

$$(54) \quad \dot{z}^\alpha = \left. \frac{dz^\alpha}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \quad \mathbf{w}_\nu = \left. \frac{d\mathbf{v}_\nu}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0},$$

risulta

$$(55) \quad \mathbf{w}_\nu(q_0, \dot{z}) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \frac{\partial \psi^i}{\partial z^\alpha} \right)_{q^i=q_0^i} \dot{z}^\alpha.$$

Questa formula fornisce gli **spostamenti virtuali indotti** \mathbf{w}_ν compatibili con i vincoli nella configurazione q_0 . Si osservi che, fissata la configurazione q_0 , ogni \mathbf{w}_ν è una funzione lineare nei parametri $(\dot{z}^\alpha) \in \mathbb{R}^m$.

Dall'espressione (55), che possiamo ormai riferire a ogni configurazione omettendo il pedice ν , segue che, ricordate le notazioni sopra adottate,

$$(56) \quad \sum_{\nu} \mathbf{R}_{\nu} \cdot \mathbf{w}_{\nu} = \sum_{\nu} \mathbf{R}_{\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^i} \frac{\partial \psi^i}{\partial z^{\alpha}} \dot{z}^{\alpha} = R_i \psi_{\alpha}^i \dot{z}^{\alpha}.$$

Comparando questo risultato con la Definizione 11.1, ovvero con la (26), possiamo affermare che

Teorema 11.7. *I vincoli di un sistema anolonomo sono ideali se e solo se il lavoro virtuale delle forze reattive è nullo per ogni spostamento virtuale compatibile coi vincoli* ⁽¹⁹⁾.

Per **lavoro virtuale delle forze reattive** s'intende ovviamente la sommatoria $\sum_{\nu} \mathbf{R}_{\nu} \cdot \mathbf{w}_{\nu}$.

L'enunciato di questo teorema può dunque essere adottato come definizione di vincolo ideale. Restano da farsi alcune importanti osservazioni.

Osservazione 11.12. La condizione costitutiva $\sum_{\nu} \mathbf{R}_{\nu} \cdot \mathbf{w}_{\nu} = 0$ dei vincoli ideali si traduce nell'equazione

$$(57) \quad \sum_{\nu} (m \mathbf{a}_{\nu} - \mathbf{A}_{\nu}) \cdot \mathbf{w}_{\nu} = 0,$$

soddisfatta per ogni insieme di spostamenti virtuali indotti \mathbf{w}_{ν} . Questa è la ben nota formulazione del **principio dei lavori virtuali**.

Osservazione 11.13. Uno spostamento virtuale \mathbf{w}_{ν} ha in realtà il significato di *accelerazione*. Infatti la rappresentazione parametrica dell'accelerazione \mathbf{a}_{ν} data dalla seconda equazione (50) ammette la decomposizione $\mathbf{a}_{\nu} = \mathbf{a}_{0\nu} + \mathbf{a}_{\alpha\nu} \dot{z}^{\alpha}$, dove

$$(58) \quad \mathbf{a}_{0\nu} = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^i \partial q^j} \psi^i + \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^i} \frac{\partial \psi^i}{\partial q^j} \right) \psi^j, \quad \mathbf{a}_{\alpha\nu} = \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^i} \frac{\partial \psi^i}{\partial z^{\alpha}}.$$

Ora si osserva che, mentre il primo vettore $\mathbf{a}_{0\nu}$ dipende solo dallo stato cinematico del sistema, il secondo vettore $\mathbf{a}_{\alpha\nu} \dot{z}^{\alpha}$ è, in conformità con la formula (55), uno spostamento virtuale:

$$\mathbf{a}_{\alpha\nu} \dot{z}^{\alpha} = \mathbf{w}_{\nu}(q, z, \dot{z}).$$

Questa strana circostanza è il preludio della formulazione gaussiana della meccanica (prossimo paragrafo). Va però parimenti osservato, richiamando l'Osservazione 11.10, che per i sistemi olonomi la seconda equazione (58) si traduce in

$$\mathbf{a}_{i\nu} = \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^i},$$

per cui gli spostamenti virtuali indotti sono dati da

$$\mathbf{w}_{\nu}(q, \dot{q}) = \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^i} \dot{q}^i$$

e acquisiscono il significato di velocità.

⁽¹⁹⁾Per come abbiamo introdotto il concetto di spostamento virtuale l'attributo 'compatibile coi vincoli' è qui pleonastico, ma è meglio farlo intervenire per conformarsi all'enunciato classico presente in letteratura.

■ 10 Il principio di Gauss

Le equazioni parametriche (50) degli stati dinamici di un sistema anolonomo ci consentono di stabilire il seguente teorema.

Teorema 11.8. *In ogni stato dinamico $(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu, \mathbf{a}_\nu)$ di un sistema anolonomo le accelerazioni \mathbf{a}_ν sono tali da minimizzare la funzione*

$$(59) \quad G = \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} \left(\mathbf{a}_{\nu} - \frac{\mathbf{A}_{\nu}}{m_{\nu}} \right)^2,$$

intesi fissi i vettori $(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu)$.

Osservazione 11.14. Questa condizione di minimo per la funzione G è una delle varie formulazioni del **principio di Gauss**. Questo “principio” è qui proposto come teorema, conseguenza delle equazioni di Newton e delle definizioni sopra date di spostamento virtuale di vincolo ideale.

Dimostrazione. Le forze attive \mathbf{A}_ν sono in generale funzioni di $(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu)$, quindi G risulta essere una funzione dei vettori $(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu, \mathbf{a}_\nu)$, a valori positivi, escluso quando $m_\nu \mathbf{a}_\nu = \mathbf{A}_\nu$ per tutti gli indici ν . Tramite le (50), la si traduce in una funzione di (q, z, \dot{z}) . Questa “trasformazione” è, per molte ragioni, di cruciale importanza. La prima è che, dovendola valutare, in conformità con l’enunciato, come funzione delle accelerazioni, è da intendersi fissato lo stato cinematico $(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu)$. Questo equivale a dire che, nella rappresentazione $G(q, z, \dot{z})$ sono da considerarsi fissi i parametri (q, z) , che definiscono appunto lo stato cinematico. Pertanto, posto che la funzione è definita-positiva, la condizione di minimo da dimostrare equivale alla condizione

$$(60) \quad \frac{\partial G}{\partial \dot{z}^\alpha} = 0.$$

Eseguendo la derivata a primo membro si trova:

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{z}^\alpha} = \sum_{\nu} m_{\nu} \left(\mathbf{a}_{\nu} - \frac{\mathbf{A}_{\nu}}{m_{\nu}} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_{\nu}}{\partial \dot{z}^\alpha} = \sum_{\nu} (m_{\nu} \mathbf{a}_{\nu} - \mathbf{A}_{\nu}) \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_{\nu}}{\partial \dot{z}^\alpha}.$$

Ma dalla seconda delle (50) si trae l’uguaglianza

$$\frac{\partial \mathbf{a}_{\nu}}{\partial \dot{z}^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^i} \frac{\partial \psi^i}{\partial z^\alpha},$$

per cui risulta

$$(61) \quad \frac{\partial G}{\partial \dot{z}^\alpha} = \sum_{\nu} (m_{\nu} \mathbf{a}_{\nu} - \mathbf{A}_{\nu}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^i} \frac{\partial \psi^i}{\partial z^\alpha}.$$

Osserviamo ora che, siccome $\partial G / \partial \dot{z}^\alpha$ non dipende dalle \dot{z} , la condizione di minimo (60) equivale a

$$(62) \quad \frac{\partial G}{\partial \dot{z}^\alpha} \dot{z}^\alpha = 0 \quad \text{per ogni } (\dot{z}^\alpha) \in \mathbb{R}^m,$$

ovvero, per quanto appena visto, a

$$(63) \quad \sum_{\nu} (m_{\nu} \mathbf{a}_{\nu} - \mathbf{A}_{\nu}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^i} \frac{\partial \psi^i}{\partial z^\alpha} \dot{z}^\alpha = 0 \quad \text{per ogni } (\dot{z}^\alpha) \in \mathbb{R}^m.$$

Ma, come indica la (55), il termine

$$\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \frac{\partial \psi^i}{\partial z^\alpha} \dot{z}^\alpha$$

altro non è che il generico spostamento virtuale $\mathbf{w}_\nu(q, z, \dot{z})$ del punto P_ν . Pertanto la condizione di minimo (63) è equivalente a

$$(64) \quad \sum_\nu (m_\nu \mathbf{a}_\nu - \mathbf{A}_\nu) \cdot \mathbf{w}_\nu = 0 \quad \text{per ogni spostamento virtuale,}$$

cioè al principio dei lavori virtuali. \square

Osservazione 11.15. Con un'analisi più approfondita si potrebbe vedere che il principio di Gauss, come qui formulato, sussiste solo se si accetta la definizione qui data di spostamento virtuale.

■ 11 Le equazioni di Gibbs-Appell

Dalla (59) segue per la funzione G l'espressione

$$G = \frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu \left(\mathbf{a}_\nu^2 + \frac{\mathbf{A}_\nu^2}{m_\nu^2} - 2 \mathbf{a}_\nu \cdot \frac{\mathbf{A}_\nu}{m_\nu} \right).$$

Dunque G può porsi nella forma

$$G = S + S_1 - S_2,$$

posto che si abbia

$$(65) \quad \begin{cases} S = \frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu \mathbf{a}_\nu^2, \\ S_1 = \frac{1}{2} \sum_\nu \frac{1}{m_\nu} \mathbf{A}_\nu^2, \\ S_2 = \sum_\nu \mathbf{A}_\nu \cdot \mathbf{a}_\nu. \end{cases}$$

Tenuto anche conto della seconda uguaglianza (50), osserviamo che

$$\frac{\partial S_1}{\partial \dot{z}^\alpha} = 0, \quad \frac{\partial S_2}{\partial \dot{z}^\alpha} = \sum_\nu \mathbf{A}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \psi_\alpha^i = A_i \psi_\alpha^i,$$

per cui risulta

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{z}^\alpha} = \frac{\partial S}{\partial \dot{z}^\alpha} - A_i \psi_\alpha^i.$$

Questo mostra che:

Teorema 11.9. *Il principio di Gauss è equivalente alle equazioni*

$$(66) \quad \frac{\partial S}{\partial \dot{z}^\alpha} = A_i \psi_\alpha^i$$

dove

$$(67) \quad S = \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{a}_{\nu}^2$$

si esprime come funzione di (q, z, \dot{z}) mediante le (50).

Queste sono le celebri **equazioni di Gibbs-Appell**. Non è stato però finora osservato che esse sono *ridondanti* perché la funzione $S(q, z, \dot{z})$ contiene dei termini additivi indipendenti dalle \dot{z} . Infatti, ancora in virtù della seconda uguaglianza (50), indicando con dei punti \dots i termini che non contengono le \dot{z} , si ha successivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\nu}^2 &= \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^i \partial q^j} \psi^i \psi^j \right)^2 + \left[\frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^i} \left(\frac{\partial \psi^i}{\partial q^j} \psi^j + \frac{\partial \psi^i}{\partial z^{\alpha}} \dot{z}^{\alpha} \right) \right]^2 + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^i \partial q^j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^h} \psi^i \psi^j \left(\frac{\partial \psi^h}{\partial q^k} \psi^k + \frac{\partial \psi^h}{\partial z^{\alpha}} \dot{z}^{\alpha} \right) = \\ &= \left[\frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^i} \left(\frac{\partial \psi^i}{\partial q^h} \psi^h + \frac{\partial \psi^i}{\partial z^{\alpha}} \dot{z}^{\alpha} \right) \right] \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^j} \left(\frac{\partial \psi^j}{\partial q^k} \psi^k + \frac{\partial \psi^j}{\partial z^{\beta}} \dot{z}^{\beta} \right) \right] + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^i \partial q^j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^h} \psi^i \psi^j \frac{\partial \psi^h}{\partial z^{\alpha}} \dot{z}^{\alpha} + \dots = \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^j} \left(\frac{\partial \psi^i}{\partial q^h} \psi^h + \frac{\partial \psi^i}{\partial z^{\alpha}} \dot{z}^{\alpha} \right) \left(\frac{\partial \psi^j}{\partial q^k} \psi^k + \frac{\partial \psi^j}{\partial z^{\beta}} \dot{z}^{\beta} \right) + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^i \partial q^j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^h} \psi^i \psi^j \frac{\partial \psi^h}{\partial z^{\alpha}} \dot{z}^{\alpha} + \dots = \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^j} \left[\frac{\partial \psi^i}{\partial q^h} \psi^h \frac{\partial \psi^j}{\partial z^{\beta}} \dot{z}^{\beta} + \frac{\partial \psi^i}{\partial z^{\alpha}} \dot{z}^{\alpha} \left(\frac{\partial \psi^j}{\partial q^k} \psi^k + \frac{\partial \psi^j}{\partial z^{\beta}} \dot{z}^{\beta} \right) \right] + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^i \partial q^j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^h} \psi^i \psi^j \frac{\partial \psi^h}{\partial z^{\alpha}} \dot{z}^{\alpha} + \dots \end{aligned}$$

Di qui segue, tenuto conto delle definizioni (15) e (17),

$$\begin{aligned} \sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{a}_{\nu}^2 &= g_{ij} \left[\frac{\partial \psi^i}{\partial q^h} \psi^h \frac{\partial \psi^j}{\partial z^{\beta}} \dot{z}^{\beta} + \frac{\partial \psi^i}{\partial z^{\alpha}} \dot{z}^{\alpha} \left(\frac{\partial \psi^j}{\partial q^k} \psi^k + \frac{\partial \psi^j}{\partial z^{\beta}} \dot{z}^{\beta} \right) \right] + \\ &+ 2 \Gamma_{ij,h} \psi^i \psi^j \frac{\partial \psi^h}{\partial z^{\alpha}} \dot{z}^{\alpha} + \dots \end{aligned}$$

ovvero, con le notazioni sopra adottate,

$$\begin{aligned} \sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{a}_{\nu}^2 &= g_{ij} \left[\frac{\partial \psi^i}{\partial q^h} \psi^h \psi_{\beta}^j \dot{z}^{\beta} + \psi_{\alpha}^i \dot{z}^{\alpha} \left(\frac{\partial \psi^j}{\partial q^k} \psi^k + \psi_{\beta}^j \dot{z}^{\beta} \right) \right] + \\ &+ 2 \Gamma_{ij,h} \psi^i \psi^j \psi_{\alpha}^h \dot{z}^{\alpha} + \dots = \\ &= g_{ij} \psi_{\alpha}^i \psi_{\beta}^j \dot{z}^{\alpha} \dot{z}^{\beta} + 2 g_{ij} \frac{\partial \psi^i}{\partial q^h} \psi^h \psi_{\beta}^j \dot{z}^{\beta} + 2 \Gamma_{ij,h} \psi^i \psi^j \psi_{\alpha}^h \dot{z}^{\alpha} + \dots \end{aligned}$$

In conclusione, posto al solito $G_{\alpha\beta} = g_{ij}\psi_\alpha^i\psi_\beta^j$, per la funzione S si trova l'espressione concisa

$$S = \frac{1}{2} G_{\alpha\beta} \dot{z}^\alpha \dot{z}^\beta + \left(g_{ik} \frac{\partial \psi^i}{\partial q^h} \psi^h + \Gamma_{ij,k} \psi^i \psi^j \right) \psi_\alpha^k \dot{z}^\alpha + S_0,$$

dove S_0 non dipende dalle \dot{z} .

Da questo risultato segue che le equazioni di Gibbs-Appell (66) assumono la **forma esplicita** ⁽²⁰⁾

$$(68) \quad G_{\alpha\beta} \dot{z}^\beta + \left(g_{ik} \frac{\partial \psi^i}{\partial q^h} \psi^h + \Gamma_{ij,k} \psi^i \psi^j - A_k \right) \psi_\alpha^k = 0.$$

D'altra parte, poiché la matrice $[\psi_\alpha^i]$ ha rango massimo (fuori dagli stati singolari), la matrice simmetrica $[G_{\alpha\beta}]$ è regolare. Sicché, denotando con $[G^{\alpha\beta}]$ la sua inversa, le precedenti equazioni possono risolversi rispetto alle \dot{z} :

$$\dot{z}^\alpha = G^{\alpha\beta} \left(A_k - \Gamma_{ij,k} \psi^i \psi^j - g_{ik} \frac{\partial \psi^i}{\partial q^h} \psi^h \right) \psi_\beta^k.$$

Questo risultato, ottenuto a partire dalle equazioni di Gibbs-Appell, è in piena armonia con le equazioni dinamiche di prima specie (27), ottenute con un metodo diretto a partire dalle equazioni di Newton; esso inoltre torna a suffragare la validità della definizione di spostamento virtuale da noi adottata.

■ 12 Fogli di lavoro

I Teoremi 11.1 e 11.5 forniscono le equazioni dinamiche di prima e seconda specie valide per ogni sistema anolonomo a vincoli ideali. Nelle applicazioni, per la loro effettiva scrittura, occorrerà seguire due procedure, una per ogni tipo di equazione. Chiameremo queste procedure *fogli di lavoro*, adottando la terminologia usata nelle tecniche di compilazione di programmi di calcolo. Avremo così un **foglio di lavoro di prima specie**, uno **di seconda specie** con una variante chiamata **foglio di lavoro di prima specie ridotto**, per quei vincoli anolonomi descritti da una sola equazione implicita. Tutti questi fogli di lavoro hanno un prologo comune, che chiamiamo **foglio di lavoro preliminare**.

1 Foglio di lavoro preliminare

1. Determinare la varietà delle configurazioni del sistema olonomo soggiacente (cioè a prescindere dai vincoli anolonomi); scegliere un sistema di coordinate lagrangiane (q^i); determinare gli enti geometrici e algebrici, nell'ambito euclideo tridimensionale, che si ritengono utili ai calcoli successivi (vettori e altri enti geometrici).

⁽²⁰⁾Si parla qui di *forma esplicita delle equazioni di Gibbs-Appell* in maniera del tutto analoga a quanto detto nell'Osservazione 11.7 a proposito della *forma esplicita delle equazioni di Maggi*.

2. Determinare le equazioni implicite $C^a(q, \dot{q}) = 0$ ($a = 1, \dots, r$) dei vincoli anolonomi, calcolare la matrice $[C_i^a]$ e determinare gli stati singolari.

3. Verificare che i vincoli siano ideali.

4. Calcolare l'energia cinetica $T = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$ ed esplicitare la matrice dei coefficienti $[g_{ij}]$.

5. Calcolare i **binomi lagrangiani**

$$(69) \quad T_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i}$$

e da questi estrarre i polinomi di secondo grado nelle velocità lagrangiane,

$$(70) \quad P_i = \Gamma_{jk,i} \dot{q}^j \dot{q}^k.$$

Si osservi che nel calcolo delle derivate

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}$$

si possono trascurare i termini nelle *accelerazioni lagrangiane* $d\dot{q}^i/dt$.

Variante: calcolare i simboli di Christoffel $\Gamma_{jk,i}$ utilizzando la formula (59).

2 Foglio di lavoro di prima specie

1. Scegliere una rappresentazione parametrica $\dot{q}^i = \psi^i(q, z)$ dei vincoli $C^a(q, \dot{q}) = 0$ quindi calcolare, nell'ordine, gli oggetti seguenti.

2. Vettori $\psi_\alpha = [\psi_\alpha^i] = \left[\frac{\partial \psi^i}{\partial z^\alpha} \right]$.

3. Matrice $[G_{\alpha\beta}] = [g_{ij} \psi_\alpha^i \psi_\beta^j] = \psi_\alpha \cdot \psi_\beta$ (con $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ ⁽²¹⁾ denotiamo il prodotto scalare di due vettori rispetto alla matrice metrica $[g_{ij}]$).

4. Matrice inversa $[G^{\alpha\beta}]$.

5. Vettori $\psi^\alpha = G^{\alpha\beta} \psi_\beta$.

6. Covettore $\mathbf{B} = [B_i] = \left[g_{ij} \frac{\partial \psi^j}{\partial q^h} \psi^h \right]$.

⁽²¹⁾Punto in grassetto.

7. Covettore $\Gamma = [\Gamma_i] = [\Gamma_{jk,i} \psi^j \psi^k]$ ottenuto dai polinomi P_i di cui al punto 6 del foglio preliminare con la sostituzione delle equazioni parametriche $\dot{q}^i = \psi^i(q, z)$.

8. Covettore $\Phi = [\phi_i] = A - B - \Gamma$.

9. Calcolo delle $Z^\alpha = \langle \psi^\alpha, \Phi \rangle = \psi^{\alpha i} \Phi_i$.

10. Scrittura delle equazioni dinamiche (suddivise in due gruppi) per generiche forze lagrangiane A_i :

$$\begin{aligned} \frac{dq^i}{dt} &= \psi^i(q, z), \\ \frac{dz^\alpha}{dt} &= Z^\alpha. \end{aligned}$$

11. Calcolo delle forze lagrangiane A_i e loro inserimento nel secondo gruppo delle equazioni dinamiche. Occorre ricordare che, per determinare le A_i si può ricorrere, o al calcolo diretto della potenza delle forze attive, la cui espressione generale è $W = A_i \dot{q}^i$, oppure, se le forze attive sono conservative e se ne conosce l'energia potenziale V , applicare la formula

$$A_i = -\frac{\partial V}{\partial q^i}.$$

3 Foglio di lavoro di seconda specie

1. Calcolare la matrice $[g^{ij}]$ inversa della $[g_{ij}]$ e, in successione, le matrici seguenti:

2. $[C_i^a] = \left[\frac{\partial C^a}{\partial \dot{q}^i} \right]$.

3. $[C^{ai}] = [g^{ij} C_j^a]$.

4. $[H^{ab}] = [g^{ij} C_i^a C_j^b] = [C^{ai} C_i^b]$.

5. $[H_{ab}]$ inversa della $[H^{ab}]$.

6. $[X_a^i] = [G_{ab} C^{bj}]$.

7. $[\pi_i^j] = [C_i^a X_a^j]$.

8. Ritornando al passo 5 del foglio di lavoro preliminare, calcolare il vettore ⁽²²⁾ $[\Gamma_{hk}^i \dot{q}^h \dot{q}^k]$.

⁽²²⁾Si tratta ovviamente di un vettore dal punto di vista algebrico, non da quello geometrico-differenziale. Questa osservazione vale per i 'vettori' costruiti in precedenza e nel seguito.

9. Posto $F^i = A^i - \Gamma_{hk}^i \dot{q}^h \dot{q}^k$, calcolare il vettore $[(\delta_j^i - \pi_j^i) F^j]$.

10. $\dot{q}^i \frac{\partial C^a}{\partial \dot{q}^i}$.

11. $X_a^i \dot{q}^j \frac{\partial C^a}{\partial \dot{q}^j}$.

12. $D^i = (\delta_j^i - \pi_j^i) F^j - X_a^i \dot{q}^\ell \frac{\partial C^a}{\partial \dot{q}^\ell}$.

13. Scrivere le equazioni dinamiche di seconda specie per generiche forze attive:

$$\frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i, \quad \frac{d\dot{q}^i}{dt} = D^i.$$

Si calcolano infine le forze lagrangiane A_i del sistema in esame, come detto alla fine del foglio di prima specie, e quindi le forze contravarianti $A^i = g^{ij} A_j$.

4 Foglio di lavoro di seconda specie ridotto Dobbiamo prestare particolare attenzione al caso, assai frequente nelle applicazioni, in cui i vincoli sono descritti da una sola equazione $C(q, \dot{q}) = 0$. In questo caso le componenti D^i si riducono a

$$(71) \quad D^i = (\delta_\ell^i - \pi_\ell^i) F^\ell - \dot{q}^\ell \frac{\partial C}{\partial \dot{q}^\ell} X^i$$

e si ottengono calcolando, nell'ordine, i seguenti oggetti:

1. $[g^{ij}]$.

2. $[C_i] = \left[\frac{\partial C}{\partial \dot{q}^i} \right]$.

3. $[C^i] = [g^{ij} C_j]$.

4. $H = C^i C_i$.

5. $[X^i] = H^{-1} [C^i]$.

6. $[\pi_i^j] = [C_i X^j]$.

7. $[\delta_j^i - \pi_j^i]$.

8. $\Gamma_{jk}^i \dot{q}^j \dot{q}^k = g^{ih} \Gamma_{jk,h} \dot{q}^j \dot{q}^k$.

9. $F^i = A^i - \Gamma_{jk}^i \dot{q}^j \dot{q}^k$.

$$10. \quad \dot{q}^i \frac{\partial C}{\partial \dot{q}^i}.$$

$$11. \quad D^i = (\delta_\ell^i - \pi_\ell^i) F^\ell - \dot{q}^\ell \frac{\partial C}{\partial \dot{q}^\ell} X^i.$$

12. Equazioni dinamiche di seconda specie per generiche forze attive:

$$\frac{dq^i}{dt} = D^i,$$

con le D^i date dalla (71).

Osservazione 11.16. Nello studio di un sistema anolonomo, una volta compilato il foglio di lavoro preliminare, s'impone la questione di quale dei due metodi seguire, cioè di quale dei due successivi fogli di lavoro compilare. La scelta è in genere dettata dalla maggiore o minore difficoltà presentata dall'inversione di due matrici. Nel primo foglio di lavoro occorre invertire la matrice $m \times m$ $[G_{\alpha\beta}]$, dove m è il numero dei parametri z^α presenti nelle equazioni parametriche $\dot{q}^i = \psi^i(q, z)$. Nel secondo foglio di lavoro occorre invertire la matrice $n \times n$ $[g_{ij}]$, dove n è il numero dei gradi di libertà del sistema. Si tenga conto che la dimensione del vincolo C è $n + m$. Ognuna di queste inversioni è ovviamente immediata nel caso di matrici diagonali.

■ 13 Vincoli non lineari

Di regola, i vincoli anolonomi che si presentano nelle applicazioni sono vincoli lineari e sono per lo più vincoli di puro rotolamento, oppure vincoli di tipo “pattino”, che coinvolgono le direzioni delle velocità di certi punti del sistema. Al contrario, esempi di sistemi non lineari sono assai rari in letteratura, per non dire assenti, perché quelli presenti sono irrealizzabili. È infatti facilissimo proporre esempi di sistemi non lineari: basta scegliere una qualunque equazione o un sistema di equazioni $C^\alpha(q, \dot{q}) = 0$ non lineari nelle velocità lagrangiane. Tuttavia, ogni esempio di vincolo non lineare introdotto in questo modo, puramente matematico, resta privo di significato e quindi di interesse, fintantoché non lo si possa realizzare, non si possa cioè costruire un meccanismo dotato di vincoli soddisfacenti alle date equazioni. Alla fine, è proprio la realizzazione di vincoli non lineari la vera difficoltà. A questo proposito è interessante ricordare questo ‘pensiero’ (o congettura) di Hertz: «*Non-linear constraints can be realized by passing to the limit $x \rightarrow 0$ of certain physical quantities x (masses, lengths, etc.) in devices realizing linear constraints*». L'esempio di Appell (1911), che pare essere il primo in ordine di tempo, ripreso e analizzato nei dettagli da Hamel (1949), illustra bene questa circostanza. «*The system with nonlinear nonholonomic constraints considered by Appell and Hamel is obtained from a nonholonomic system with linear constraints by means of the passage to the limit $\rho \rightarrow 0$* »⁽²³⁾. La macchina di Appell cade in difetto perché, una volta costruita, si deve rendere sempre più piccola la lunghezza di un

⁽²³⁾Si veda il libro [4].

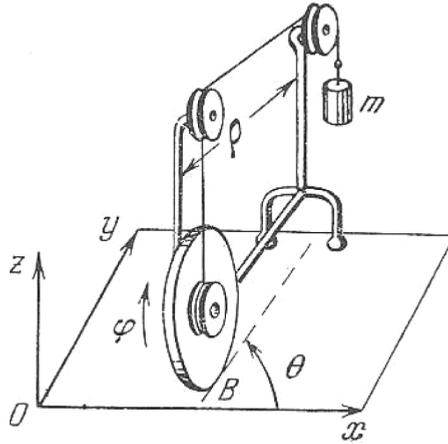


Figura 11.5. La macchina di Appell.

suo componente, e precisamente la distanza ρ nella figura 11.5. Sembra invece più ragionevolmente possibile realizzare dei meccanismi dove le masse di una o più componenti siano trascurabili rispetto alle rimanenti.

L'esempio che ora tratteremo illustra bene questa circostanza.

5 Il bipendolo anolonomo Due punti materiali P_1 e P_2 si muovono, senza attrito e senza vincoli di posizione, sul piano cartesiano (x, y) . Le loro velocità \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 sono invece sottoposte al vincolo seguente: per ogni stato cinematico (P_1, \mathbf{v}_1) e (P_2, \mathbf{v}_2) le rette ℓ_1 e ℓ_2 passanti per P_1 e P_2 e ortogonali ai rispettivi vettori \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 si incontrano in un punto P_0 vincolato a muoversi sull'asse y (fig. 11.6).

Ovviamente, un tale vincolo non ha senso quando le velocità sono parallele o entrambe nulle. Questi sono gli stati singolari del vincolo.

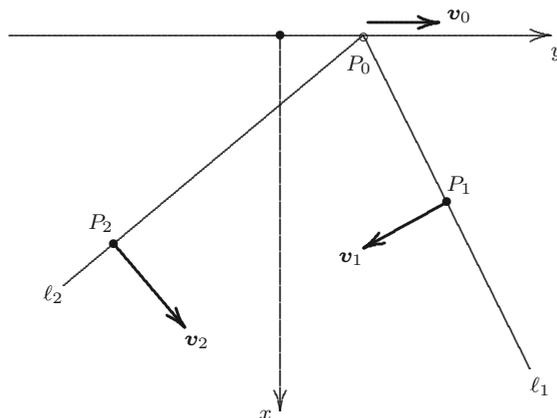


Figura 11.6. Bipendolo anolonomo.

Per una possibile realizzazione di questo vincolo conviene pensare che i due punti si muovano su due piani adiacenti (x_1, y) e (x_2, y) con asse y in comune (fig. 11.7).

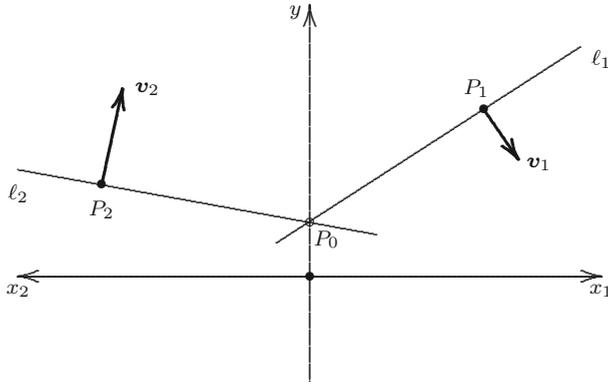


Figura 11.7.

Pensiamo allora i due punti materiali posti al centro di due ruote a bordi bene affilati appoggiate verticalmente ai due semipiani (figura 11.8). Una terza ruota a bordi affilati viaggia lungo l'asse y e dal suo centro P_0 si dipartono due sottili asticciole rigide trapassanti ortogonalmente le due ruote precedenti, nel loro centro cioè nei punti P_1 e P_2 . Queste due aste sono snodate in P_0 e inoltre i punti P_1 e P_2 possono scorrere liberamente (e senza attrito) lungo di esse.

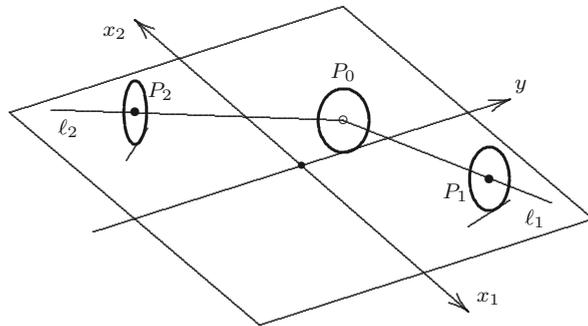


Figura 11.8.

Assumiamo che le masse delle ruote e delle aste siano del tutto trascurabili al confronto con le masse m_1 e m_2 dei due punti. ⁽²⁴⁾ Se il piano su cui scorrono le ruote affilate è per esempio ghiacciato, si realizza la condizione di ortogonalità tra le velocità dei loro centri e le rispettive aste.

Ritornando alla geometria di questo sistema meccanico, cominciamo con il precisare che la varietà delle configurazioni associata a due punti liberi nel piano

⁽²⁴⁾Ciò è realizzabile utilizzando metalli superleggeri, oggi tecnologicamente disponibili.

è $Q = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Naturale è dunque la scelta delle coordinate lagrangiane

$$(q^1, q^2, q^3, q^4) = (x_1, y_1, x_2, y_2).$$

Va sottolineato il fatto che la posizione del punto P_0 non ha alcun ruolo nella definizione della varietà delle configurazioni: prima di tutto perché e senza massa, e poi perché esso interviene solo nella definizione dei vincoli di velocità. In altre parole, il punto P_0 è una **variabile interna** al sistema o **nascosta**.

Dobbiamo prestare attenzione agli stati singolari per i quali il punto P_0 è indeterminato. Essi sono caratterizzati dalle seguenti condizioni

$$(72) \quad \begin{cases} (a) & x_1 = x_2 = 0, \\ (b) & \dot{y}_1 = \dot{y}_2 = 0, \\ (c) & \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = 0. \end{cases}$$

Dimostriamo ora che il vincolo imposto non è lineare. Nella figura 11.9 sono riportati due distinti stati dinamici, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ e $(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2)$, corrispondenti a una medesima configurazione (P_1, P_2) , ma con diverse posizioni del punto nascosto P_0 .

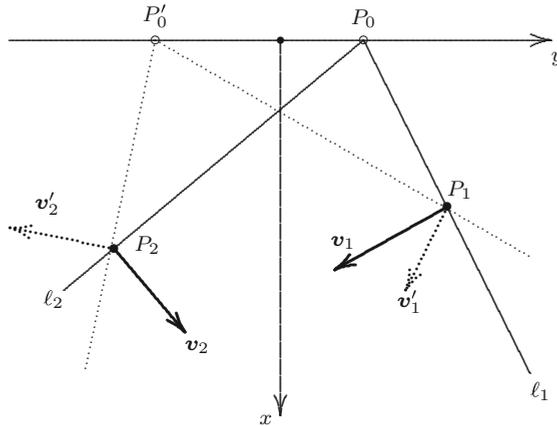


Figura 11.9.

Risulta chiaro dalla figura 11.10, che le due somme $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}'_1$ e $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}'_2$ non producono uno stato compatibile col vincolo, perché le linee tratteggiate ad esse ortogonali non si incontrano in un punto dell'asse y . Questo basta per dimostrare che il vincolo non è lineare. La non-linearità è comunque confermata dall'equazione del vincolo, che risulta essere

$$(73) \quad x_1 \dot{x}_1 \dot{y}_2 - x_2 \dot{x}_2 \dot{y}_1 + (y_1 - y_2) \dot{y}_1 \dot{y}_2 = 0.$$

Infatti, le rette ℓ_1 e ℓ_2 hanno equazione

$$\begin{cases} \ell_1 : & \dot{x}_1 (x - x_1) + \dot{y}_1 (y - y_1) = 0, \\ \ell_2 : & \dot{x}_2 (x - x_2) + \dot{y}_2 (y - y_2) = 0. \end{cases}$$

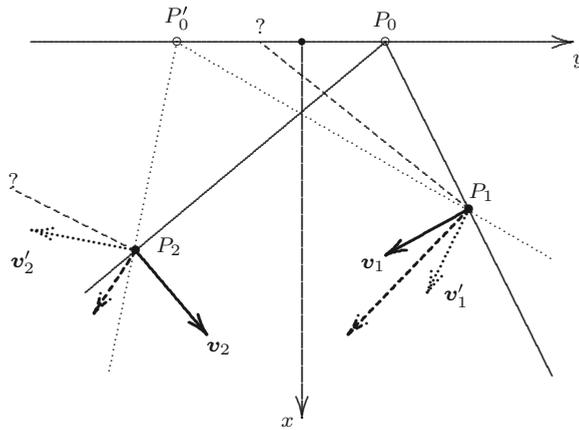


Figura 11.10.

Il punto $P_0 = (0, y_0)$ deve soddisfarle entrambe; devono quindi essere verificate le due equazioni

$$(74) \quad \dot{y}_1 (y_0 - y_1) = \dot{x}_1 x_1, \quad \dot{y}_2 (y_0 - y_2) = \dot{x}_2 x_2.$$

Moltiplicando la prima di queste per \dot{y}_2 , la seconda per \dot{y}_1 , e prendendo la differenza delle equazioni così ottenute si trova proprio la (73).

Osserviamo fin d'ora, perché sarà utile nel seguito, che dalle (74) si traggono due formule equivalenti per il calcolo della coordinata y_0 del punto P_0 :

$$(75) \quad y_0 = \frac{\dot{x}_1}{\dot{y}_1} x_1 + y_1, \quad y_0 = \frac{\dot{x}_2}{\dot{y}_2} x_2 + y_2.$$

• **Foglio di lavoro preliminare**

1. La varietà delle configurazioni è $Q = \mathbb{R}^4$ e la scelta più naturale delle coordinate lagrangiane è

$$(q^1, q^2, q^3, q^4) = (x_1, y_1, x_2, y_2).$$

2. L'equazione del vincolo è già stata determinata. Posto $C = x_1 \dot{x}_1 \dot{y}_2 - x_2 \dot{x}_2 \dot{y}_1 + (y_1 - y_2) \dot{y}_1 \dot{y}_2$, il vettore $[C_i] = [\partial C / \partial \dot{q}^i]$ è dato da:

$$[C_i] = \begin{bmatrix} x_1 \dot{y}_2 \\ -x_2 \dot{x}_2 + (y_1 - y_2) \dot{y}_2 \\ -x_2 \dot{y}_1 \\ x_1 \dot{x}_1 + (y_1 - y_2) \dot{y}_1 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo però che l'equazione di vincolo (73) $C = 0$ può essere scritta in due forme equivalenti

$$(76) \quad \begin{cases} (y_1 - y_2) \dot{y}_2 - x_2 \dot{x}_2 = -x_1 \frac{\dot{x}_1 \dot{y}_2}{\dot{y}_1}, \\ (y_1 - y_2) \dot{y}_1 + x_1 \dot{x}_1 = x_2 \frac{\dot{x}_2 \dot{y}_1}{\dot{y}_2}, \end{cases}$$

sicché il vettore $[C_i]$ si può ridurre alla più semplice forma

$$[C_i] = \begin{bmatrix} x_1 \dot{y}_2 \\ -x_1 \frac{\dot{x}_1 \dot{y}_2}{\dot{y}_1} \\ -x_2 \dot{y}_1 \\ x_2 \frac{\dot{y}_1 \dot{x}_2}{\dot{y}_2} \end{bmatrix}.$$

Questo vettore si annulla nei tre casi elencati nella (72), e solo in questi. Si hanno quindi tre tipi di stati singolari.

3. Per come si può realizzare questo sistema anolonomo, si verifica facilmente che il vincolo è ideale.

4. L'energia cinetica è ovviamente data da

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2),$$

e quindi

$$[g_{ij}] = \text{diag} [m_1, m_1, m_2, m_2].$$

5. Siccome i coefficienti dell'energia cinetica sono costanti, i simboli di Christoffel sono tutti nulli.

Il foglio di lavoro preliminare è stato completato. Siccome la matrice $[g_{ij}]$ è diagonale, optiamo per la compilazione del foglio di lavoro di seconda specie, in questo caso del tipo ridotto, essendo il vincolo rappresentato da una sola equazione.

• **Foglio di lavoro di seconda specie ridotto**

1. $[g^{ij}] = \text{diag} \left[\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \frac{1}{m_2} \right].$

2. Il covettore $[C_i] = [\partial C / \partial \dot{q}^i]$ è già stato calcolato al punto 2 del foglio preliminare.

3. $[C^i] = [g^{ij} C_j] = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{m_1} \dot{y}_2 \\ -\frac{x_1}{m_1} \frac{\dot{x}_1 \dot{y}_2}{\dot{y}_1} \\ -\frac{x_2}{m_2} \dot{y}_1 \\ \frac{x_2}{m_2} \frac{\dot{y}_1 \dot{x}_2}{\dot{y}_2} \end{bmatrix}.$

$$4. \quad H = C^i C_i = \frac{\Delta}{m_1 m_2 \dot{y}_1^2 \dot{y}_2^2}, \text{ posto}$$

$$(77) \quad \Delta = m_1 x_2^2 \dot{y}_1^4 v_2^2 + m_2 x_1^2 \dot{y}_2^4 v_1^2, \quad v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2, \quad v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2.$$

$$5. \quad X^i = H^{-1} C^i = \frac{m_1 m_2 \dot{y}_1^2 \dot{y}_2^2}{\Delta} \begin{bmatrix} \frac{x_1}{m_1} \dot{y}_2 \\ \frac{x_1}{m_1} \dot{x}_1 \dot{y}_2 \\ -\frac{x_2}{m_2} \dot{y}_1 \\ \frac{x_2}{m_2} \dot{y}_1 \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} m_2 x_1 \dot{y}_1^2 \dot{y}_2^3 \\ -m_2 x_1 \dot{x}_1 \dot{y}_1 \dot{y}_2^3 \\ -m_1 x_2 \dot{y}_2^2 \dot{y}_1^3 \\ m_1 x_2 \dot{x}_2 \dot{y}_2 \dot{y}_1^3 \end{bmatrix}.$$

$$6. \quad [\pi_i^j] = [C_i X^j] = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} m_2 x_1^2 \dot{y}_1^2 \dot{y}_2^4 & -m_2 x_1^2 \dot{x}_1 \dot{y}_1 \dot{y}_2^4 \\ -m_2 x_1^2 \dot{x}_1 \dot{y}_1 \dot{y}_2^4 & m_2 x_1^2 \dot{x}_1^2 \dot{y}_2^4 \\ -m_2 x_1 x_2 \dot{y}_1^3 \dot{y}_2^3 & m_2 x_1 x_2 \dot{x}_1 \dot{y}_1^2 \dot{y}_2^3 \\ m_2 x_1 x_2 \dot{x}_2 \dot{y}_1^3 \dot{y}_2^2 & -m_2 x_1 x_2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 \dot{y}_1^2 \dot{y}_2^2 \\ & -m_1 x_1 x_2 \dot{y}_1^3 \dot{y}_2^3 & m_1 x_1 x_2 \dot{x}_2 \dot{y}_2^2 \dot{y}_1^3 \\ m_1 x_1 x_2 \dot{x}_1 \dot{y}_1^2 \dot{y}_2^3 & -m_1 x_1 x_2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 \dot{y}_1^2 \dot{y}_2^2 \\ & m_1 x_2^2 \dot{y}_1^4 \dot{y}_2^2 & -m_1 x_2^2 \dot{x}_2 \dot{y}_1^4 \dot{y}_2 \\ -m_1 x_2^2 \dot{x}_2 \dot{y}_1^4 \dot{y}_2 & m_1 x_2^2 \dot{x}_2^2 \dot{y}_1^4 \end{bmatrix}.$$

$$7. \quad [\delta_i^j - \pi_i^j] = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta - m_2 x_1^2 \dot{y}_1^2 \dot{y}_2^4 & m_2 x_1^2 \dot{x}_1 \dot{y}_1 \dot{y}_2^4 \\ m_2 x_1^2 \dot{x}_1 \dot{y}_1 \dot{y}_2^4 & \Delta - m_2 x_1^2 \dot{x}_1^2 \dot{y}_2^4 \\ m_2 x_1 x_2 \dot{y}_1^3 \dot{y}_2^3 & -m_2 x_1 x_2 \dot{x}_1 \dot{y}_1^2 \dot{y}_2^3 \\ -m_2 x_1 x_2 \dot{x}_2 \dot{y}_1^3 \dot{y}_2^2 & m_2 x_1 x_2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 \dot{y}_1^2 \dot{y}_2^2 \\ & m_1 x_1 x_2 \dot{y}_1^3 \dot{y}_2^3 & -m_1 x_1 x_2 \dot{x}_2 \dot{y}_2^2 \dot{y}_1^3 \\ -m_1 x_1 x_2 \dot{x}_1 \dot{y}_1^2 \dot{y}_2^3 & m_1 x_1 x_2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 \dot{y}_1^2 \dot{y}_2^2 \\ & \Delta - m_1 x_2^2 \dot{y}_1^4 \dot{y}_2^2 & m_1 x_2^2 \dot{x}_2 \dot{y}_1^4 \dot{y}_2 \\ m_1 x_2^2 \dot{x}_2 \dot{y}_1^4 \dot{y}_2 & \Delta - m_1 x_2^2 \dot{x}_2^2 \dot{y}_1^4 \end{bmatrix}.$$

Elementi diagonali:

$$\Delta - m_2 x_1^2 \dot{y}_1^2 \dot{y}_2^4 = m_1 x_2^2 \dot{y}_1^4 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + m_2 x_1^2 \dot{x}_1^2 \dot{y}_2^4.$$

$$\Delta - m_2 x_1^2 \dot{x}_1^2 \dot{y}_2^4 = m_1 x_2^2 \dot{y}_1^4 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + m_2 x_1^2 \dot{y}_1^2 \dot{y}_2^4.$$

$$\Delta - m_1 x_2^2 \dot{y}_1^4 \dot{y}_2^2 = m_1 x_2^2 \dot{y}_1^4 \dot{x}_2^2 + m_2 x_1^2 \dot{y}_2^4 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2).$$

$$\Delta - m_1 x_2^2 \dot{x}_2^2 \dot{y}_1^4 = m_1 x_2^2 \dot{y}_1^4 \dot{y}_2^2 + m_2 x_1^2 \dot{y}_2^4 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2).$$

Conclusione (i indice di riga):

$$[\delta_i^j - \pi_i^j] = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} m_1 x_2^2 \dot{y}_1^4 v_2^2 + m_2 x_1^2 \dot{x}_1^2 \dot{y}_2^4 & m_2 x_1^2 \dot{x}_1 \dot{y}_1 \dot{y}_2^4 \\ m_2 x_1^2 \dot{x}_1 \dot{y}_1 \dot{y}_2^4 & m_1 x_2^2 \dot{y}_1^4 v_2^2 + m_2 x_1^2 \dot{y}_1^2 \dot{y}_2^4 \\ m_2 x_1 x_2 \dot{y}_1^3 \dot{y}_2^3 & -m_2 x_1 x_2 \dot{x}_1 \dot{y}_1^2 \dot{y}_2^3 \\ -m_2 x_1 x_2 \dot{x}_2 \dot{y}_1^3 \dot{y}_2^2 & m_2 x_1 x_2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 \dot{y}_1^2 \dot{y}_2^2 \\ & m_1 x_1 x_2 \dot{y}_1^3 \dot{y}_2^3 & -m_1 x_1 x_2 \dot{x}_2 \dot{y}_1^2 \dot{y}_2^3 \\ & -m_1 x_1 x_2 \dot{x}_1 \dot{y}_1^2 \dot{y}_2^3 & m_1 x_1 x_2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 \dot{y}_1^2 \dot{y}_2^2 \\ m_1 x_2^2 \dot{y}_1^4 \dot{x}_2^2 + m_2 x_1^2 \dot{y}_2^4 v_1^2 & m_1 x_2^2 \dot{x}_2 \dot{y}_1^4 \dot{y}_2 \\ m_1 x_2^2 \dot{x}_2 \dot{y}_1^4 \dot{y}_2 & m_1 x_2^2 \dot{y}_1^4 \dot{y}_2 + m_2 x_1^2 \dot{y}_2^4 v_1^2 \end{bmatrix}.$$

8. $\Gamma_{hi}^j = 0.$

9. $F^i = A^i.$

10. $q^i \frac{\partial C}{\partial q^i} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \dot{y}_2 \\ \dot{y}_1 \dot{y}_2 \\ -\dot{x}_2 \dot{y}_1 \\ -\dot{y}_1 \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \dot{x}_1^2 \dot{y}_2 + \dot{y}_1^2 \dot{y}_2 - \dot{x}_2^2 \dot{y}_1 - \dot{y}_1 \dot{y}_2^2 = \dot{y}_2 v_1^2 - \dot{y}_1 v_2^2.$

11. $D^i = (\delta_\ell^i - \pi_\ell^i) F^\ell - \dot{q}^\ell \frac{\partial C}{\partial q^\ell} X^i.$ Visti i risultati precedenti calcoliamo i ΔD^i con $\Delta = m_1 x_2^2 \dot{y}_1^4 v_2^2 + m_2 x_1^2 \dot{y}_2^4 v_1^2$ e $F^i = A^i$:

$$\Delta D^i = \Delta (\delta_\ell^i - \pi_\ell^i) A^\ell - (\dot{y}_2 v_1^2 - \dot{y}_1 v_2^2) \begin{bmatrix} m_2 x_1 \dot{y}_1^2 \dot{y}_2^3 \\ -m_2 x_1 \dot{x}_1 \dot{y}_1 \dot{y}_2^3 \\ -m_1 x_2 \dot{y}_2^2 \dot{y}_1^3 \\ m_1 x_2 \dot{x}_2 \dot{y}_2 \dot{y}_1^3 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che le forze lagrangiane contravarianti $A^i = g^{ij} A_j$ sono in questo caso date da

$$A^1 = \frac{1}{m_1} A_{x_1}, \quad A^2 = \frac{1}{m_1} A_{y_1}, \quad A^3 = \frac{1}{m_2} A_{x_2}, \quad A^4 = \frac{1}{m_2} A_{y_2},$$

sicché, ponendo

$$(78) \quad m_1 A^1 = A_{x_1}, \quad m_1 A^2 = A_{y_1}, \quad m_2 A^3 = A_{x_2}, \quad m_2 A^4 = A_{y_2},$$

otteniamo, dopo qualche calcolo:

$$(79) \quad \begin{aligned} \Delta D^1 &= x_2^2 \dot{y}_1^4 v_2^2 A_{x_1} + \frac{m_2}{m_1} x_1^2 \dot{x}_1 \dot{y}_2^4 (\dot{x}_1 A_{x_1} + \dot{y}_1 A_{y_1}) + \\ &\quad + x_1 x_2 \dot{y}_1 (\dot{y}_2 A_{x_2} - \dot{x}_2 A_{y_2}) - m_2 x_1 \dot{y}_1^2 \dot{y}_2^3 (\dot{y}_2 v_1^2 - \dot{y}_1 v_2^2). \\ \Delta D^2 &= x_2^2 \dot{y}_1^4 v_2^2 A_{y_1} + \frac{m_2}{m_1} x_1^2 \dot{y}_1 \dot{y}_2^4 (\dot{x}_1 A_{x_1} + \dot{y}_1 A_{y_1}) + \\ &\quad - x_1 x_2 \dot{x}_1 \dot{y}_1^2 \dot{y}_2^2 (\dot{y}_2 A_{x_2} - \dot{x}_2 A_{y_2}) + m_2 x_1 \dot{x}_1 \dot{y}_1 \dot{y}_2^3 (\dot{y}_2 v_1^2 - \dot{y}_1 v_2^2). \end{aligned}$$

Le espressioni di ΔD^3 e ΔD^4 si ottengono rapidamente dalle (79) per simmetria, cioè scambiano fra loro tutti gli indici in basso 1 e 2.

12. Secondo gruppo delle equazioni dinamiche (48):

$$(80) \quad \begin{aligned} \frac{d\dot{x}_1}{dt} &= \frac{1}{\Delta} \left[x_2^2 \dot{y}_1^4 v_2^2 A_{x_1} + \frac{m_2}{m_1} x_1^2 \dot{x}_1 \dot{y}_2^4 (\dot{x}_1 A_{x_1} + \dot{y}_1 A_{y_1}) + \right. \\ &\quad \left. + x_1 x_2 \dot{y}_1^3 \dot{y}_2^2 (\dot{y}_2 A_{x_2} - \dot{x}_2 A_{y_2}) + m_2 x_1 (\dot{y}_1 v_2^2 - \dot{y}_2 v_1^2) \dot{y}_1^2 \dot{y}_2^3 \right] \\ \frac{d\dot{y}_1}{dt} &= \frac{\dot{y}_1}{\Delta} \left[x_2^2 \dot{y}_1^3 v_2^2 A_{y_1} + \frac{m_2}{m_1} x_1^2 \dot{y}_2^4 (\dot{x}_1 A_{x_1} + \dot{y}_1 A_{y_1}) + \right. \\ &\quad \left. + x_1 x_2 \dot{x}_1 \dot{y}_1 \dot{y}_2^2 (\dot{x}_2 A_{y_2} - \dot{y}_2 A_{x_2}) + m_2 x_1 \dot{x}_1 \dot{y}_2^3 (\dot{y}_2 v_1^2 - \dot{y}_1 v_2^2) \right] \end{aligned}$$

$$(81) \quad \begin{aligned} \frac{d\dot{x}_2}{dt} &= \frac{1}{\Delta} \left[x_1^2 \dot{y}_2^4 v_1^2 A_{x_2} + \frac{m_1}{m_2} x_2^2 \dot{x}_2 \dot{y}_1^4 (\dot{x}_2 A_{x_2} + \dot{y}_2 A_{y_2}) + \right. \\ &\quad \left. + x_1 x_2 \dot{y}_2^3 \dot{y}_1^2 (\dot{y}_1 A_{x_1} - \dot{x}_1 A_{y_1}) + m_1 x_2 (\dot{y}_2 v_1^2 - \dot{y}_1 v_2^2) \dot{y}_2^2 \dot{y}_1^3 \right] \\ \frac{d\dot{y}_2}{dt} &= \frac{\dot{y}_2}{\Delta} \left[x_1^2 \dot{y}_2^3 v_1^2 A_{y_2} + \frac{m_1}{m_2} x_2^2 \dot{y}_1^4 (\dot{x}_2 A_{x_2} + \dot{y}_2 A_{y_2}) + \right. \\ &\quad \left. + x_1 x_2 \dot{x}_2 \dot{y}_2 \dot{y}_1^2 (\dot{x}_1 A_{y_1} - \dot{y}_1 A_{x_1}) + m_1 x_2 \dot{x}_2 \dot{y}_1^3 (\dot{y}_1 v_2^2 - \dot{y}_2 v_1^2) \right] \end{aligned}$$

dove si è posto

$$(82) \quad \begin{aligned} \Delta &= m_1 x_2^2 \dot{y}_1^4 v_2^2 + m_2 x_1^2 \dot{y}_2^4 v_1^2 \\ v_1^2 &= \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2, \quad v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \end{aligned}$$

Queste equazioni valgono per ogni tipo di forze attive, $\mathbf{A}_1 = [A_1, A_2] = [A_{x_1}, A_{y_1}]$ agenti su P_1 , e $\mathbf{A}_2 = [A_3, A_4] = [A_{x_2}, A_{y_2}]$ agenti su P_2 .

Alle equazioni dinamiche (80) e (81) si devono affiancare quelle del primo gruppo (48), che in questo caso sono:

$$(83) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1, & \frac{dx_2}{dt} = \dot{x}_2, \\ \frac{dy_1}{dt} = \dot{y}_1, & \frac{dy_2}{dt} = \dot{y}_2. \end{cases}$$

Le forze lagrangiane attive A_i possono essere determinate calcolando il lavoro virtuale

$$\delta W = A_i \delta q^i = A_{x_1} \delta x_1 + A_{y_1} \delta y_1 + A_{x_2} \delta x_2 + A_{y_2} \delta y_2.$$

Si osservi inoltre che nelle equazioni dinamiche (80) e (81) compaiono i termini

$$(84) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 A_{x_1} + \dot{y}_1 A_{y_1} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{A}_1, \\ \dot{x}_1 A_{y_1} - \dot{y}_1 A_{x_1} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{k}, \end{cases}$$

(analogamente, per l'indice 1 rimpiazzato da 2) dove \mathbf{k} è il vettore unitario ortogonale al piano cartesiano (x, y) .

Osservazione 11.17. In virtù del Teorema 11.6, per un sistema anolonomo a vincoli omogenei e soggetto a forze attive conservative, come nel caso presente, l'energia totale $T + V$ è conservata. Per il bipendolo anolonomo vale però la particolare proprietà che se W_ν è la potenza delle forze attive agenti su P_ν ($\nu = 1, 2$) e T_ν è l'energia cinetica, allora valgono separatamente le equazioni

$$(85) \quad \frac{dT_\nu}{dt} = W_\nu.$$

Di conseguenza, se le forze attive hanno energia potenziale disaccoppiate, cioè del tipo $V_1(x_1, y_1)$ e $V_2(x_2, y_2)$, si hanno due costanti dell'energia separate:

$$(86) \quad T_1 + V_1 = E_1, \quad T_2 + V_2 = E_2.$$

Ciò significa, in altre parole, che i due punti del bipendolo non si scambiano energia. Dimostriamo le (85); basta farlo per $\nu = 1$. In virtù delle equazioni dinamiche abbiamo

$$\frac{dT_1}{dt} = \dot{x}_1 \frac{d\dot{x}_1}{dt} + \dot{y}_1 \frac{d\dot{y}_1}{dt} = \dot{x}_1 D^1 + \dot{y}_1 D^2,$$

mentre

$$W_1 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{A}_1 = \dot{x}_1 A_{x_1} + \dot{y}_1 A_{y_1}.$$

Sulla base delle (79) si vede, con qualche calcolo, che

$$\dot{x}_1 D^1 + \dot{y}_1 D^2 = \frac{1}{m_1} (\dot{x}_1 A_{x_1} + \dot{y}_1 A_{y_1}),$$

e le (85) sono dimostrate.

6 Moti speciali del bipendolo anolonomo Le equazioni dinamiche che abbiamo trovato sono indubbiamente molto complesse. Per lo studio del comportamento del doppio pendolo sottoposto ad assegnate forze attive non si può che ricorrere alla simulazione numerica. È tuttavia possibile e interessante analizzarle per qualche caso speciale.

1. Moti spontanei

Sono i moti in assenza di forze attive. In questo caso le equazioni dinamiche (80) e (81) si riducono a

$$(87) \quad \begin{cases} \frac{d\dot{x}_1}{dt} = \frac{m_2 x_1 (\dot{y}_1 v_2^2 - \dot{y}_2 v_1^2) \dot{y}_1^2 \dot{y}_2^3}{m_1 x_2^2 \dot{y}_1^4 v_2^2 + m_2 x_1^2 \dot{y}_2^4 v_1^2}, \\ \frac{d\dot{y}_1}{dt} = \frac{m_2 x_1 \dot{x}_1 \dot{y}_1 \dot{y}_2^3 (\dot{y}_2 v_1^2 - \dot{y}_1 v_2^2)}{m_1 x_2^2 \dot{y}_1^4 v_2^2 + m_2 x_1^2 \dot{y}_2^4 v_1^2}, \end{cases}$$

$$(88) \quad \begin{cases} \frac{d\dot{x}_2}{dt} = \frac{m_1 x_2 (\dot{y}_2 v_1^2 - \dot{y}_1 v_2^2) \dot{y}_2^2 \dot{y}_1^3}{m_1 x_2^2 \dot{y}_1^4 v_2^2 + m_2 x_1^2 \dot{y}_2^4 v_1^2}, \\ \frac{d\dot{y}_2}{dt} = \frac{m_1 x_2 \dot{x}_2 \dot{y}_2 \dot{y}_1^3 (\dot{y}_1 v_2^2 - \dot{y}_2 v_1^2)}{m_1 x_2^2 \dot{y}_1^4 v_2^2 + m_2 x_1^2 \dot{y}_2^4 v_1^2}. \end{cases}$$

Per questi moti le energie cinetiche dei due punti sono costanti:

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = \text{cost.}, \quad v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = \text{cost.}$$

2. Moti spontanei con $v_2(t) = 0$

Vediamo se ne esistono. Per questi moti le equazioni (88) sono identicamente soddisfatte, mentre le (87) danno

$$(89) \quad \frac{d\dot{x}_1}{dt} = -\frac{\dot{y}_1^2}{x_1}, \quad \frac{d\dot{y}_1}{dt} = \frac{\dot{x}_1 \dot{y}_1}{x_1}.$$

Gli integrali sono

$$\begin{cases} x_1 = A \cos(\omega t + \phi) \\ y_1 = A \sin(\omega t + \phi) + B \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = A \cos \phi \\ y_1(0) = A \sin \phi + B. \end{cases}$$

La figura 11.11 fornisce una descrizione delle condizioni iniziali, con il punto P_2 fermo sull'asse x .

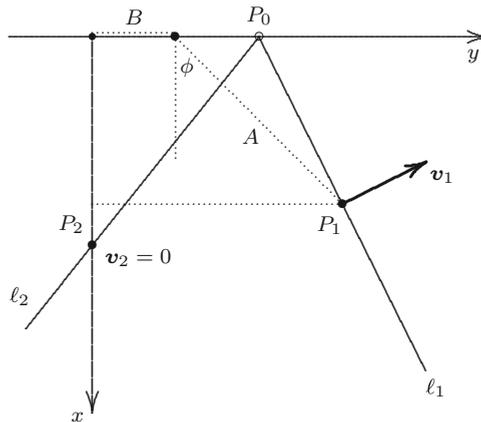


Figura 11.11.

La posizione di P_0 è data dalla prima equazione (75), $y_0 = \frac{\dot{x}_1}{\dot{y}_1} x_1 + y_1$. Essendo $\dot{y}_1 = \omega x_1$, segue che

$$y_0 = \frac{\dot{x}_1}{\omega} + y_1 = \frac{-\omega A \sin(\omega t + \phi)}{\omega} + A \sin(\omega t + \phi) + B = B.$$

Ciò mostra che anche il punto P_0 resta immobile. Nella figura 11.12 è riportata l'orbita, circolare, di P_1 .

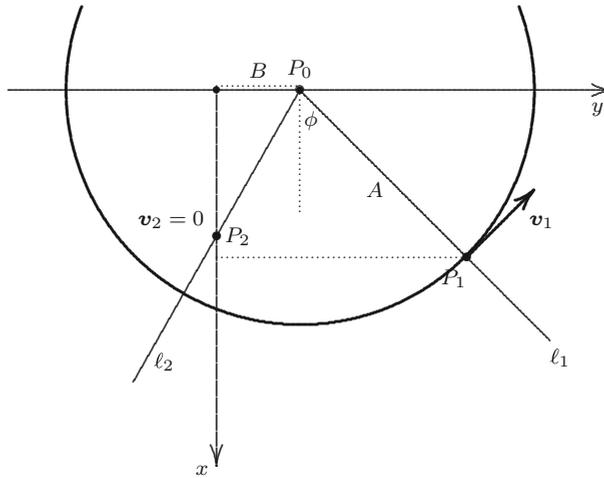


Figura 11.12.

3. Moti spontanei con v_2 a direzione costante

La figura 11.13 illustra le condizioni iniziali: il punto P_2 sta sull'asse x ; la sua velocità $v_2(0)$ è fissata così come la posizione di P_1 . Di conseguenza, la posizione di P_0 e la direzione di v_1 sono univocamente determinate. Per trovare un moto in cui v_2 mantenga una direzione costante occorre trovare un valore opportuno della velocità scalare v_1 .

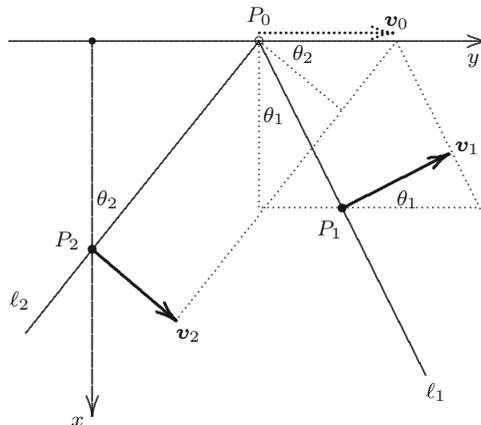


Figura 11.13.

Nella figura 11.13 è anche descritta una costruzione geometrica dell'intensità di v_1 (linee punteggiate) attraverso la costruzione della velocità v_0 di P_0 . Sono messi in evidenza due angoli θ_1 e θ_2 tali che

$$v_0 = v_1 \tan \theta_1, \quad y_1 - y_0 = x_1 \tan \theta_1,$$

e

$$v_0 = v_2 \tan \theta_2, \quad x_2 \tan \theta_2 = y_0, \quad \tan \theta_2 = \frac{\dot{x}_2}{\dot{y}_2}.$$

Segue che

$$v_1 = v_2 \frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = v_2 x_1 \frac{\tan \theta_2}{y_1 - y_0} = \frac{v_2 x_1}{y_1 - y_0} \frac{\dot{x}_2}{\dot{y}_2},$$

con

$$y_0 = \frac{x_2 \dot{x}_2}{\dot{y}_2}.$$

Dunque,

$$(90) \quad v_1 = \frac{x_1 \dot{x}_2 v_2}{y_1 \dot{y}_2 - x_2 \dot{x}_2}.$$

Questa formula fornisce la velocità scalare v_1 in termini di $\mathbf{v}_2 = (\dot{x}_2, \dot{y}_2)$, x_2 e (x_1, y_1) .

D'altra parte, il calcolo della derivata rispetto a t del rapporto \dot{y}_2/\dot{x}_2 , con l'intervento delle equazioni dinamiche (89), mostra che la condizione $\dot{y}_2/\dot{x}_2 = \text{costante}$ implica l'equazione

$$x_2 (\dot{y}_1 v_2^2 - \dot{y}_2 v_1^2) \dot{y}_2 \dot{y}_1^3 v_2^2 = 0,$$

cioè $\dot{y}_1 v_2^2 = \dot{y}_2 v_1^2$. Allora, ritornando alle equazioni dinamiche, si vede che queste implicano

$$\frac{d\dot{x}_1}{dt} = \frac{d\dot{y}_1}{dt} = \frac{d\dot{x}_2}{dt} = \frac{d\dot{y}_2}{dt} = 0.$$

Le velocità \mathbf{v}_1 and \mathbf{v}_2 sono dunque costanti. Inoltre, essendo

$$y_0 = \frac{\dot{x}_2}{\dot{y}_2} x_2 + y_2,$$

anche il punto P_0 si muove con velocità costante pari a

$$\dot{y}_0 = \frac{\dot{x}_2^2}{\dot{y}_2} + \dot{y}_2 = \frac{v_2^2}{\dot{y}_2}.$$

Tutto ciò è in accordo con le considerazioni precedenti. Si conclude pertanto che *moti rettilinei e uniformi dei due punti del bipendolo in assenza di forze attive sono possibili, purché le posizioni e le velocità iniziali soddisfino all'equazione (90)*.

4. Moti su piani inclinati

Le forze attive sono parallele ed equiorientate con gli assi x_1 e x_2 , e proporzionali alle masse dei punti (fig. 11.14). Il coefficiente di proporzionalità g è l'accelerazione gravitazionale rapportata all'inclinazione dei due piani (supposta la medesima per semplicità).

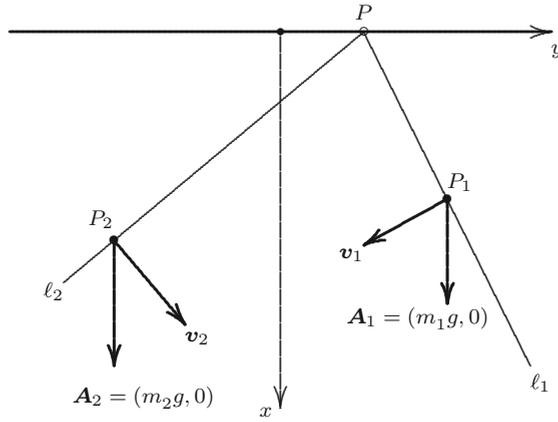


Figura 11.14.

Una possibile realizzazione di questo sistema anolonomo, per mezzo di due piani inclinati posati su di un supporto orizzontale, è illustrata in figura 11.15.

Essendo le forze attive date da

$$\begin{cases} A_{x_1} = m_1 g, \\ A_{x_2} = m_2 g, \end{cases} \quad \begin{cases} A_{y_1} = 0, \\ A_{y_2} = 0, \end{cases}$$

le equazioni dinamiche (80) e (81) diventano

$$(91) \quad \begin{aligned} \frac{d\dot{x}_1}{dt} &= g + \frac{m_2 \Theta}{\Delta} x_1 \dot{y}_1^2 \dot{y}_2^3, & \frac{d\dot{x}_2}{dt} &= g - \frac{m_1 \Theta}{\Delta} x_2 \dot{y}_2^2 \dot{y}_1^3, \\ \frac{d\dot{y}_1}{dt} &= -\frac{m_2 \Theta}{\Delta} x_1 \dot{x}_1 \dot{y}_1 \dot{y}_2^3, & \frac{d\dot{y}_2}{dt} &= \frac{m_1 \Theta}{\Delta} x_2 \dot{x}_2 \dot{y}_2 \dot{y}_1^3, \end{aligned}$$

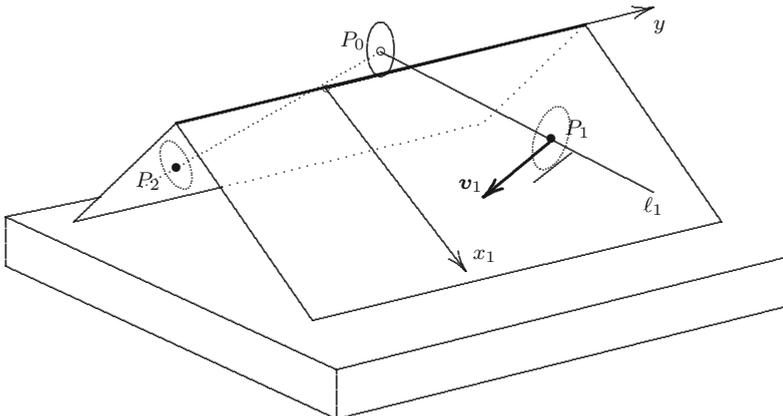


Figura 11.15.

posto

$$(92) \quad \begin{cases} \Delta = m_1 x_2^2 \dot{y}_1^4 v_2^2 + m_2 x_1^2 \dot{y}_2^4 v_1^2, \\ \Theta = (g x_2 + v_2^2) \dot{y}_1 - (g x_1 + v_1^2) \dot{y}_2. \end{cases}$$

Si noti che Θ è antisimmetrico rispetto agli indici 1 e 2. Queste equazioni ammettono alcune particolari e semplici soluzioni. Vediamone due.

Moti coincidenti

Intendiamo quei moti tali che, fin dall’inizio e in ogni istante t , due punti hanno la stessa posizione (pensando i due piani inclinati sovrapposti). Questi moti sono compatibili con il vincolo anolonomo. Infatti in questo caso Θ è costantemente nullo e le equazioni dinamiche danno

$$\frac{d\dot{x}_1}{dt} = g, \quad \frac{d\dot{y}_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\dot{x}_2}{dt} = g, \quad \frac{d\dot{y}_2}{dt} = 0.$$

Queste sono le equazioni della caduta libera di un grave.

Moti simmetrici

Intendiamo quei moti soddisfacenti, per ogni istante t , alle condizioni (fig. 11.16)

$$\begin{cases} x_2 = x_1, & \text{quindi } \dot{x}_2 = \dot{x}_1, \\ y_2 = -y_1, & \text{quindi } \dot{y}_2 = -\dot{y}_1. \end{cases}$$

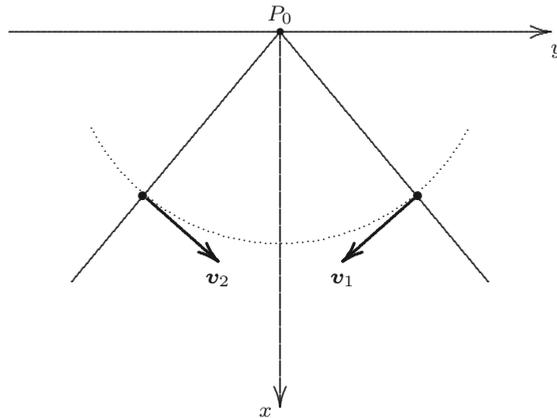


Figura 11.16.

Dimostriamo che *questi moti sono compatibili con le equazioni dinamiche se e solo se le masse dei due punti sono uguali: $m_1 = m_2$.*

Si supponga che le equazioni dinamiche ammettano una tale soluzione. In questo caso esse danno

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{x}_1}{dt} &= g - \frac{m_2 \Theta}{\Delta} x_1 \dot{y}_1^5, & \frac{d\dot{x}_2}{dt} &= g - \frac{m_1 \Theta}{\Delta} x_1 \dot{y}_1^5, \\ \frac{d\dot{y}_1}{dt} &= \frac{m_2 \Theta}{\Delta} x_1 \dot{x}_1 \dot{y}_1^4, & \frac{d\dot{y}_2}{dt} &= \frac{m_1 \Theta}{\Delta} x_1 \dot{x}_1 \dot{y}_1^4, \end{aligned}$$

con

$$\Delta = (m_1 + m_2) x_1^2 \dot{y}_1^4 v_1^2, \quad \Theta = 2(g x_1 + v_1^2) \dot{y}_1.$$

Queste equazioni sono simultaneamente soddisfatte se e solo se $m_1/\Delta = m_2/\Delta$, vale a dire se e solo se $m_1 = m_2$. Inversamente, se $m_1 = m_2$ il problema è totalmente simmetrico e la simmetria degli stati è preservata durante ogni moto.

Dimostriamo anche che *in questi moti* $y_0 = 0$ e $r_1 = r_2 = \text{costante}$. Nel caso in cui $y_1 = -y_2$ e $x_1 = x_2$, l'equazione del vincolo (73) si riduce a

$$(93) \quad x_1 \dot{x}_1 + y_1 \dot{y}_1 = 0, \quad \text{cioè} \quad (P_1 - P) \cdot \mathbf{v}_1 = 0.$$

In virtù di una delle (75) troviamo

$$y_0 = \frac{\dot{x}_1}{\dot{y}_1} x_1 + y_1 = 0.$$

Inoltre,

$$\frac{dr_1^2}{dt} = \frac{d}{dt}(x_1^2 + y_1^2) = 2x_1 \dot{x}_1 + 2y_1 \dot{y}_1 = 0.$$

Lo stesso vale per r_2 . Osserviamo infine che l'integrazione delle equazioni dinamiche del bipendolo, nel caso $m_1 = m_2 = m$, $x = x_1 = x_2$ e $y = y_1 = -y_2$, si riduce all'integrazione del sistema differenziale

$$(94) \quad \begin{cases} \frac{d\dot{x}}{dt} = g - \frac{g x + v^2}{x v^2} \dot{y}^2, \\ \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{g x + v^2}{x v^2} \dot{x} \dot{y}. \end{cases}$$

Poiché $r_i = r_2 = \ell = \text{cost.}$, possiamo scrivere

$$\begin{cases} x = \ell \cos \theta, & \dot{x} = -\ell \dot{\theta} \sin \theta, \\ y = \ell \sin \theta, & \dot{y} = \ell \dot{\theta} \cos \theta, \end{cases} \quad v^2 = \ell^2 \dot{\theta}^2,$$

dove θ è la deviazione angolare di $P_1 - P$ rispetto all'asse x . Allora la seconda equazione (94) prende la forma

$$\ell (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = -(g \cos \theta + \ell \dot{\theta}^2) \sin \theta,$$

che si riduce a $\ell \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$. Questa è l'equazione del *pendolo matematico*.

7 Il bipendolo anolonomo lineare Abbiamo assunto che il punto P_0 , intersezione delle linee ℓ_1 e ℓ_2 e scorrevole sull'asse y , fosse di massa nulla o comunque trascurabile rispetto alle masse dei due punti P_1 e P_2 . Ora vediamo che *se il punto P_0 ha una massa consistente $m_0 \neq 0$ allora il vincolo considerato diventa lineare*. Il fatto principale è che *la varietà delle configurazioni non è più la stessa di prima*: ora è $Q = \mathbb{R}^5$ con coordinate $(x_1, y_1, x_2, y_2, y_0)$. La figura 11.17 mostra due distinte configurazioni.

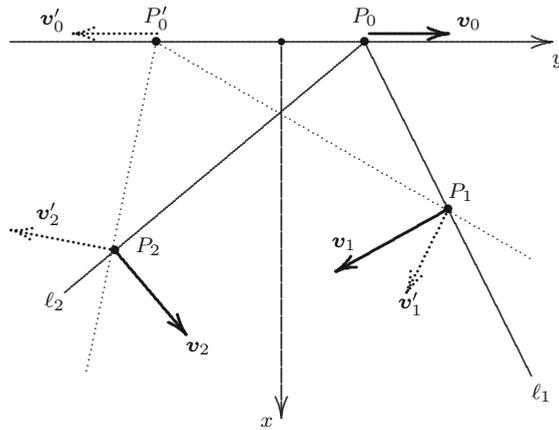


Figura 11.17.

Questa figura è simile alla figura 11.9, con la differenza grafica però, che P_0 è rappresentato da un punto in grassetto anziché da un circoletto, a indicare che ora P_0 è massivo. Sono poi riportate anche le velocità possibili di P_0 nelle due configurazioni; dunque la figura 11.17 rappresenta anche due stati compatibili col vincolo.

Nella figura 11.18 sono invece rappresentati due stati diversi relativi a una medesima configurazione. Si osserva subito che le somme $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}'_1$, $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}'_2$ e $\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'_0$ determinano un nuovo stato, nella stessa configurazione, compatibile col vincolo. Dunque il vincolo è lineare. Ciò è anche confermato dal fatto che ora le velocità \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 devono essere ortogonali ai vettori $P_1 - P_0$ e $P_2 - P_0$, rispettivamente. Le due condizioni $(P_1 - P_0) \cdot \mathbf{v}_1 = 0$ e $(P_2 - P_0) \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ si traducono in due equazioni di vincolo lineari:

$$\begin{cases} x_1 \dot{x}_1 + (y_1 - y_0) \dot{y}_1 = 0, \\ x_2 \dot{x}_2 + (y_2 - y_0) \dot{y}_2 = 0. \end{cases}$$

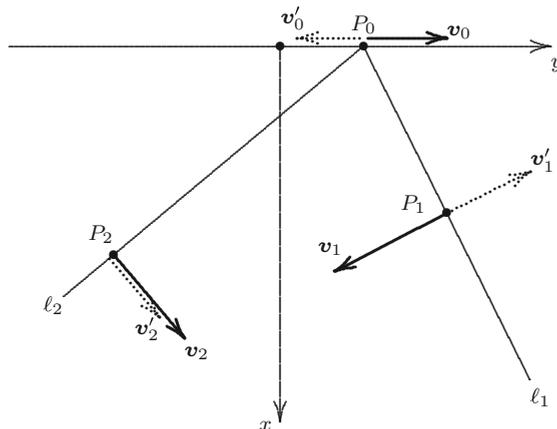


Figura 11.18.

In conclusione, l'esempio del bipendolo anolonomo è interessante per almeno due ragioni:

- È finalmente un esempio di vincolo anolonomo non lineare che può essere realizzato e che quindi ha un vero significato meccanico ⁽²⁵⁾.
- Conferma il pensiero di Hertz (inizio §13): qui a tendere a zero, per passare da un vincolo lineare a un vincolo non lineare, è una massa, la massa del punto P_0 ; cosa più facile da realizzarsi rispetto al far tendere a zero una lunghezza, come nella macchina di Appell.

■ Bibliografia

- [1] S. BENENTI, *The non-holonomic double pendulum, an example of non-linear non-holonomic system*, Regular and Chaotic Dynamics, Vol. 16, No. 5, pp. 417-442. © Pleiades Publishing, Ltd., 2011.
- [2] S. BENENTI, *A general method for writing the dynamical equations of nonholonomic systems with ideal constraints*. Regular and Chaotic Dynamics, Vol. 13, No. 4, pp. 283-315. © Pleiades Publishing, Ltd., 2008.
- [3] S. BENENTI *A user-friendly approach to the dynamics of non-holonomic systems*. SIGMA **3**, 2007, 36. Disponibile sul sito <http://www.emis.de/journals/SIGMA/>.
- [4] JU.I. NEIMARK & N.A. FUFÆEV, *Dynamics of nonholonomic systems*, Translations of Math. Monographs, A.M.S., 33, cap. 4, §2, 1972.

Sergio Benenti
 Università di Torino
 Dipartimento di Matematica
 e-mail: sergio.benenti@unito.it

⁽²⁵⁾In uno degli articoli citati in bibliografia è stato proposto, prima del bipendolo, un'ancor più semplice esempio di sistema anolonomo non lineare: due punti materiali mobili su di un piano ma vincolati ad avere velocità parallele. Quest'esempio tuttavia sembra essere di più difficile realizzazione.