ACTA ACADEMIAE SCIENTIARUM TAURINENSIS

Colloque

LA «MÉCANIQUE ANALYTIQUE» DE LAGRANGE ET SON HÉRITAGE

I

Fondation Hugot du Collège de France

Paris, 27-29 Septembre 1988

Supplemento al numero 124 (1990) degli
Atti della Accademia delle Scienze di Torino
Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO - 1990

L'intégration de l'équation d'Hamilton-Jacobi par séparation des variables: histoire et résultats récents

Sergio BENENTI

1. Introduction

Cet exposé est dédié à un argument classique de la mécanique analytique, où l'intéraction avec la géométrie différentielle est très féconde: l'intégration par séparation des variables de l'équation d'Hamilton-Jacobi, notamment de l'équation d'Hamilton-Jacobi réduite des géodésiques d'une variété riemannienne (M_n, g).

Comme pour presque tous les arguments de mécanique analytique, l'intérêt de cette question dépasse la mécanique elle même, pour toucher la relativité générale et la mécanique quantique. L'intérêt en relativité a été renouvelé par des résultats de Carter [13]. En effet de nombreux exemples intéressants de métriques séparables viennent par des solutions exactes des équations d'Einstein. D'autre part, il s'avère que la séparation de l'équation d'Hamilton-Jacobi des géodésiques est une condition nécessaire pour l'intégration par séparation des variables des équations de la physique mathématique liées à une métrique (Laplace, Schrödinger, etc...). A ce sujet on a eu dans les dernières années des progrès remarquables grâce aux travaux de Miller, Kalnins, Boyer, Winternitz et d'autres [25].

Mais venons à la question de base que nous nous proposons d'examiner. Considérons l'équation d'Hamilton-Jacobi réduite des géodésiques, c'est-à-dire l'équation,

$$(1) \qquad \frac{1}{2}\, g^{ij}\, \partial_i W\, \partial_j W = h\ ,$$

où g^{ij} sont les composantes contravariantes du tenseur métrique dans un système de coordonnées $\mathbf{x} = (x^i)$ et h un paramètre réel (l'énergie). On utilise la notation abregée ∂_i pour la dérivée partielle $\partial/\partial x^i$ et la convention de la somme sur les indices répétés, qui varient de 1 à n. On dit qu'une intégrale complète W(donc qui dépend d'une manière essentielle de

n paramètres $\mathbf{a}=(a_i)$) est *séparée* par rapport au système $\mathbf{x}$ si elle est de la forme suivante:

$$(2) \qquad W(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = W_1(x^1, \mathbf{a}) + W_2(x^2, \mathbf{a}) + \ldots + W_n(x^n, \mathbf{a}) \ ,$$

c'est-à-dire somme de fonctions d'une seule coordonnée. Les coordonnées $\mathbf{x}$ son appellées *séparables* ou *séparées*. A ce point se posent les deux problèmes suivants:

Problème 1. Etablir la forme «la plus générale» des fonctions $g^{ij}(\mathbf{x})$ telles que l'équation (1) admet une intégrale complète séparée.

Problème 2. Etant donnée une variété riemannienne (M_n, g), trouver tous les systèmes de coordonnées séparables par rapport à l'hamiltonienne géodésique sur M_n.

On verra comme on peut résoudre le Problème 1 et on discutera sur un problème qui se pose entre les deux et qui, en termes un peu vagues, peut s'énoncer de la manière suivante:

Problème 3. Caractériser «géométriquement» l'existence de coordonnées séparables.

Nous ne toucherons pas le Problème 2, qui est d'ailleurs résolu complètement pour les variétés à courbure constante E_n, S_n, H_n (voir le livre récent de Kalnins [21]).

On peut prendre comme point de départ le théorème suivant dû à Levi-Civita (1904) [27]:

Théorème. Un système de coordonnées $\mathbf{x}$ est séparable par rapport à une hamiltonienne $H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ si et seulement si pour chaque $i \neq j$ on a identiquement ($\partial^i = \partial/\partial p_i$):

$$\partial_i H \, \partial_j H \, \partial^i \partial^j H + \partial^i H \, \partial^j H \, \partial_i \partial_j H - \partial_i H \, \partial^j H \, \partial^i \partial_j H -$$
$$- \partial^i H \, \partial_j H \, \partial_i \partial^j H = 0.$$

On appellera ces équations les *conditions de séparation de Levi-Civita*. On verra dans la suite la signification géométrique et la démonstration de ce critère de séparation. Si l'on considère l'hamiltonienne géodésique

$$H = \frac{1}{2} \, g^{ij}(\mathbf{x}) \, p_i p_j \ ,$$

les premiers membres de ces équations sont des polynômes de degré 4 en $\mathbf{p}$. En annullant les coefficients on obtient un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre 2 sur les fonctions $g^{ij}(\mathbf{x})$:

$$g^{i\overline{h}}g^{j\overline{k}}\partial_{ij}g^{\overline{rs}}+\frac{1}{2}g^{ij}\,\partial_i g^{\overline{hk}}\,\partial_j g^{\overline{rs}}-g^{i\overline{h}}\partial_i g^{j\overline{k}}\partial_j g^{\overline{rs}}-g^{j\overline{h}}\partial_j g^{i\overline{k}}\partial_i g^{\overline{rs}}=0, \tag{3}$$

pour $i \neq j$, où le signe « $-$ » indique la complète symétrisation des indices (h, k, r, s). La «solution générale» de ce système donne la solution du Problème 1. Si d'autre part on applique les conditions de séparation à une hamiltonienne polynomiale de degré 2 en $\mathbf{p}$, i.e. quadratique plus un terme linéaire et une fonction «potentielle» (cas typique de la mécanique), on obtient un système d'équations qui contient comme sous-système les conditions de séparation pour la partie purement quadratique. Donc l'étude du cas purement géodésique, auquel nous nous sommes bornés, est prioritaire.

L'intégration du système d'équations (3) présente, dès son début, des difficultées évidentes.

Les équations (3) se simplifient considérablement si l'on suppose que les coordonnées $\mathbf{x}$ sont *orthogonales*, $g^{ij}=0$ pour $i \neq j$:

$$g^{ii}g^{jj}\partial_{ij}g^{kk}-g^{ii}\partial_i g^{jj}\partial_j g^{kk}-g^{jj}\partial_j g^{ii}\partial_i g^{kk}=0 \qquad (i \neq j). \tag{4}$$

Nous savons, dès les travaux fondamentaux de Stäckel (1893), que la solution générale de ce système prend la forme suivante:

$$g^{ii}=\phi^i_{(n)}\ , \tag{5}$$

où $\phi^i_{(n)}$ est une linge (on a pris la dernière) d'une matrice carrée $n \times n$ de fonctions $(\phi^i_{(j)})$, regulière, dont la matrice inverse $(\phi^{(j)}_i)$ est une *matrice de Stäckel*, i.e. telle que chaque élément $\phi^{(j)}_i$ est une fonction de la seule coordonnée x^i correspondante à l'indice du bas. Stäckel a également mis en evidence que les fonctions

$$K^*_j=\frac{1}{2}\phi^i_{(j)}p_i^2 \tag{6}$$

sont des intégrales premières, quadratiques, des géodésiques. Donc la séparation des variables orthogonales est reliée à l'existence des intégrales premières quadratiques ou bien, en introduisant une notion équivalente plus récente, des *2-tenseurs de Killing* (on verra que c'est de même pour le cas général). Cette relation a été examinée par Eisenhart [16], et récemment par Woodhouse [29] et Kalnins et Miller [22], [23] et [24]. Woodhouse à developpé un algorythme qui permet de construire des tenseurs de Killing associés à la séparation d'une seule coordonnée. Nous rappelons dans le prochain paragraphe la définition de tenseur de Killing, avant de passer à la discussion du cas orthogonal, et, ensuite, du cas général.

2. Tenseurs de Killing

L'algèbre de Poisson canonique sur le fibré cotangent T^*M_n d'une variété différentiable M_n enduit une structure d'algèbre de Lie sur l'espace $S(M_n) = \oplus_{k=0}^{+\infty} S^k(M_n)$ des tenseurs contravariants symétriques sur la variété M_n. Le crochet $[K, L]$ sur cet espace est défini par l'équation

$$[K, L]^* = \{G^*, L^*\} ,$$

où $\{,\}$ est le crochet de Poisson et, pour chaque $K \in S^k(M_n)$, K^* est la fonction sur le fibré cotangent T^*M_n définie (en coordonnées canoniques) par

$$K^* = \frac{1}{k} K^{i_1 \dots i_k} p_{i_1} \dots p_{i_k} .$$

Si K est une fonction sur M_n $(k=0)$, K^* est le pull-back de K à T^*M_n. Le tenseur symétrique $[K, L]$ est d'ordre $k+l-1$, si l est l'ordre de L. On dit que K et L *commutent* ou qu'ils sont *en involution* si $[K, L]=0$. Si M_n est une variété riemannienne on dit que K est un *k-tenseur de Killing* si

$$[K, G] = 0 , \tag{7}$$

étant G le tenseur métrique contravariant (si $k=1$ on dit que K est un *vecteur de Killing*). Puisque $G^* = H$ (hamiltonienne géodésique) on voit directement par la définition du crochet que K^* est une intégrale première des équations des géodésiques si et seulement si K est un tenseur de Killing. Cette définition de tenseur de Killing n'utilise pas explicitement la connexion de Levi-Civita comme dans la définition en composantes covariantes,

$$\nabla_{(i} K_{i_1 \dots i_k)} = 0$$

où la paranthèse ( ) est l'opérateur de symétrisation.

Proposition 1. Soient K et L deux 2-tenseurs contravariants symétriques sur une variété riemannienne (M_n, G), à valeurs propres (ϱ_i) et (σ_i) respectivement, réelles (c'est toujours le cas si la métrique est définie). Supposons que K et L ont n vecteurs propres (X_i) indépendants orthogonaux en commun. Posons

$$e^i = (X_i \cdot X_i)^{-1}, \quad \Omega_{ijk} = [X_i, X_j] \cdot X_k .$$

On a $[K, L] = 0$ si et seulement si les équations suivantes sont satisfaites:

$$(1) \qquad \begin{cases} \sigma_i X_i \varrho_j - \varrho_i X_i \sigma_j = (\varrho_i \sigma_j - \varrho_j \sigma_i)(X_i \log|e^j| + 2\, e^j \Omega_{ijj}), \\ \varrho_i \sigma_j \Omega_{ijk} + \varrho_j \sigma_k \Omega_{jki} + \varrho_k \sigma_i \Omega_{kij} = 0 \qquad (i, j, k \neq). \end{cases}$$

Démonstration - On prend les vecteurs indépendants (X_i) comme repère (non holonome). On a

$$K = e^i \varrho_i X_i \otimes X_i, \quad L = e^i \sigma_i X_i \otimes X_i .$$

On calcule le crochet $[K, L]$. Il en résulte une combinaison linéaire des produits symétriques triples des vecteurs (X_i). On annulle tous les coefficients et on trouve les équations (1). ■

Si l'on prend en particulier $L = G$, donc $\sigma_i = 1$, on trouve la propriété suivante.

Proposition 2. Soit K un 2-tenseur contravariant symétrique sur une variété riemannienne (M_n, G), à valeurs propres réelles (ϱ_i). Soient (X_i) n vecteurs propres correspondants, indépendants et orthogonaux. Le 2-tenseur K est de Killing si et seulement si les équations suivantes sont satisfaites:

$$(2) \qquad \begin{cases} X_i \varrho_j = (\varrho_i - \varrho_j)(X_i \log|e^j| + 2\, e^j \Omega_{ijj}) , \\ \varrho_i \Omega_{ijk} + \varrho_j \Omega_{jki} + \varrho_k \Omega_{kij} = 0. \end{cases}$$

On appellera ces équations les *équations intrinsèques de Killing*.

Remarque 1. Eisenhart [18] a donné des équations intrinsèques analogues,

$$\begin{cases} e_j X_i \varrho_j + 2(\varrho_i - \varrho_j)\gamma_{ijj} = 0 , \\ (\varrho_i - \varrho_j)\gamma_{ijk} + (\varrho_j - \varrho_k)\gamma_{jki} + (\varrho_k - \varrho_i)\gamma_{kij} = 0, \end{cases}$$

en utilisant les *coefficients de rotation de Ricci*

$$\gamma_{ijk} = X_j \cdot \nabla_{X_k} X_i ,$$

avec un repère (X_i) unimodulaire: $e_i = |X_i| = \pm 1$. Les coefficients γ_{ijk} sont liés, par définition, à la connexion de Levi-Civita, donc à la structure riemannienne locale, tandis que les coefficients Ω_{ijk} sont définis par le crochet de Lie et le produit scalaire seulement. Donc, bien qu'il y ait une relation linéaire entre les deux types de coefficients, les Ω sont, en principe, plus convenables pour «mesurer» la «non-holonomie» du repère.

Remarque 2. Si $\Omega_{ijk} = 0$ pour (i, j, k) différents, alors les champs (X_i) sont *normaux*, i.e. la distribution orthogonale à chaque X_i est complétement intégrable. On peut donc choisir des vecteurs propres X_i en involution, $[X_i, X_j] = 0$, et par conséquent des coordonnées locales $\mathbf{x}$ telles que $X_i = \partial_i$. Etant les Ω identiquement nuls, le système (2) se réduit aux équations:

$$\partial_i \varrho_j = (\varrho_i - \varrho_j)\, \partial_i \log |g^{jj}| \, . \tag{3}$$

On voit que, si K et L sont deux tenseurs de Killing, les équations $(2)_1$ impliquent $(1)_1$. Il n'est pas ainsi pour les $(1)_2$. Mais si $\Omega_{ijk} = 0$, donc si le repère est holonome, alors les $(1)_2$ disparaissent. On a donc démontré la propriété suivante:

Proposition 3. Si deux tenseurs de Killing sont diagonalisés par un même système de coordonnées orthogonales, alors ils sont en involution.

Proposition 4. Si n 2-tenseurs symétriques K_a, indépendants, sont diagonalisés par rapport à un système de coordonnées $\mathbf{x}$, alors $[K_a, K_b] = 0$ si et seulement si la matrice des composantes non nulles $K_a^{ii} = \phi^i_{(a)}$ est l'inverse d'une matrice de Stäckel $\phi_i^{(a)}$.

Démonstration. La relation de commutation des tenseurs s'écrit

$$\phi^i_{(a)} \partial_i \phi^h_{(b)} - \phi^i_{(b)} \partial_i \phi^h_{(a)} = 0 \qquad (i \text{ n.s.}).$$

(La notation «i n.s.» signifie que l'indice i est non sommé). Puisque les tenseurs sont indépendants on a $det(\phi^i_{(a)}) \neq 0$. On note $\phi_i^{(a)}$ la matrice inverse. Si l'on multiplie par $\phi_h^{(c)}\ \phi_j^{(a)}\ \phi_k^{(b)}$ et on somme sur les indices (h, a, b) on trouve l'égalité équivalente:

$$\delta^i_k \partial_i \phi^{(c)}_j - \delta^i_j \partial_i \phi^{(c)}_k = 0 \qquad (i \text{ n.s.}) .$$

On voit que cette équation est équivalente à: $\partial_i \phi^{(c)}_j = 0$ pour $i \neq j$. ■

Proposition 5. Si n 2-tenseurs de Killing K_a sont indépendants et en involution, alors ils engendrent la métrique G, c'est-à-dire il existe des constantes c^a telles que $G = c^a K_a$.

Démonstration. On sait que le nombre maximum de fonctions indépendantes et en involution sur un fibré cotangent T^*M_n est n. Par conséquent il existe une fonction différentiable $F: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}: (t_a) \to F(t_a)$ telle que $G^* = H = F(K^*_a)$. Si l'on dérive deux fois cette relation, par rapport a p_i et p_j, et l'on pose $\mathbf{p} = 0$, on trouve:

$$g^{ij} = \left.\frac{\partial F}{\partial t_a}\right|_{p=0} K^{ij}_a .$$

On a donc la relation linéaire cherchée. □

Rappelons enfin le théorème remarquable suivant, dû à Katzin et Levine [26]:

Théorème. La dimension de l'espace des 2-tenseurs de Killing sur une variété (M_n, g) est inférieure ou égale au nombre

$$K(2, n) = n(n+1)^2(n+2)/12.$$

On a l'égalité si la variété est à courbure constante. Sur une variété à courbure constante tout 2-tenseur de Killing est *réductible* (c'est-a-dire somme de produits symétriques de vecteurs de Killing).

On sait d'ailleurs que les variétés à courbure constante sont caractérisées par le fait que la dimension de l'espace des vecteurs de Killing est maximale: $K(1, n) = n(n+1)/2$.

3. Systèmes séparables orthogonaux (ou de Stäckel)

Théorème. Une variété riemannienne (M_n, g) admet (localement) un système séparable orthogonal $\mathbf{x}$ si et seulement si elle admet n tenseurs de Killing $K_a (a = 1, \ldots, n)$, linéarement indépendants, avec n formes

ϕ^i réelles indépendantes (ou bien n vecteurs propres X_i réels indépendants) en commun. Si un tel système de tenseurs de Killing existe, alors:

(i) Les formes ϕ^i (les vecteurs X_i) sont *normalisables*, i.e. à un facteur intégrant près, les formes ϕ^i sont fermées (les vecteurs X_i sont en involution):

$$d\phi^i = 0 \quad ([X_i, X_j] = 0).$$

Le système séparé $\mathbf{x}$ est alors défini par: $\phi^i = dx^i\,(X_i = \partial_i)$.

(ii) Les tenseurs de Killing sont en involution:

$$[K_a, K_b] = 0\ .$$

(iii) Le tenseurs métrique contravariant G est une combinaison (à coefficients constants) des tenseurs K_a. On peut donc considérer $K_n = G$.

(iv) Il existe une matrice de Stäckel $(\phi_i^{(a)})$ telle que

$$K_a = \phi^i_{(a)} X_i \otimes X_i.$$

Démonstration. Soient ϱ_{ia} les valeurs propres (réelles) du tenseur K_a. La matrice carrée (ϱ_{ia}) est régulière, puisque les K_a sont indépendants. Les équations intrinsèques de Killing $(2)_2$ du § 2, qui sont valables pour chaque K_a, montrent que $\varrho_{ia}\Omega_{ijk} + \varrho_{ja}\Omega_{jki} + \varrho_{ka}\Omega_{kij} = 0$, c'est-à-dire qu'il existe une relation linéaire entre les trois lignes (i, j, k) de la matrice (ϱ_{ia}): absurde. Donc on a indentiquement $\Omega_{ijk} = 0$ $(i, j, k \neq)$. Rappelons la Remarque 2 du paragraphe précédent: on a des coordonnées locales $\mathbf{x}$, orthogonales, pour lesquelles les équations intrinsèques de Killing se réduisent aux équations (2) du § 2. Le calcul montre le fait remarquable suivant: les conditions d'intégrabilité complète de ce système d'équations coincident avec les conditions de séparation de Levi-Civita pour le cas orthogonal (équation (2) du § 1). Donc les coordonnées $\mathbf{x}$ sont séparables. Le reste de l'enoncé est une conséquence des Propositions 3, 4 et 5 du paragraphe précédent. ■

Remarque. Cet enoncé reprend, en le modifiant, le théorème d'Eisenhart sur la caractérisation des coordonnées séparables orthogonales [16]. Selon Eisenhart les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un tel système sont les suivantes: (a) il existe n tenseur de Killing indépendants (dont l'n-meme est la métrique); (b) ces tenseurs ont n vecteurs propres (formes propres) en commun; (c) les vecteurs propres sont normaux (les formes propres sont fermées); (d) les valeurs propres sont simples; (e) $\det(\varrho_{ia}-\varrho_{aj})\neq 0$ pour $i\neq j$ et $a=1,\ldots,n-1$. Dans la formulation de ce théorème donnée par Woodhouse [29] on trouve les seules conditions (a)-(b)-(c). Par contre, dans la formulation de Kalnins et Miller [22], sur les tenseurs de Killing indépendants on fait les hypothèses suivantes: (f) ils sont en involution; (g) ils commutent comme operateurs linéaires; (h) au moins un des tenseurs a des valeurs propres simples. En effet, comme on a démontré ici, les seules conditions (a) et (b) sont essentielles. On peut d'ailleurs démontrer que les conditions (a)-(b) son équivalentes aux conditions (a)-(g).

On s'aperçoit de l'utilité des équations intrinsèques de Killing dans les cas simple $n=2$. Puisque $X_i\varrho_i=0$, le vecteur X_i est tangent à la courbe $\varrho_i=\text{const.}$ Par conséquent si les valeurs propres d'un tenseur de Killing sur une variété de dimension 2 sont des fonctions indépendantes, elles sont des coordonnées séparables. Si l'on prend, par exemple, le plan euclidien E_2 avec les coordonnées (privilegées) cartesiennes orthogonales, et on considère la combinaison linéaire des produit symétriques des trois vecteurs de Killing (les translations selon les axes et la rotation autour de l'origine), on obtient les lignes coordonnées de toutes les coordonnées séparables orthogonales (à une traslation et une rotation près) comme courbes d'équation $\varrho_1=\text{const.}$ et $\varrho_2=\text{const.}$, étant ϱ_i les racines de l'équation caractéristique de la combinaison. Puisque cette combinaison est un polynôme de degré 2 dans les coordonnées cartesiennes, on s'attend que ces courbes soient d'ordre 4. Mais le calcul montre qu'elles sont en effet d'ordre 2, c'est-à-dire des coniques, eventuellement dégénérées, homofocales. Rappelons que cette propriété, pour le cas $n=3$, a été démontrée par Eisenhart, Weinacht et Blaschke (voir [17]).

4. Connexions, intégrales complètes et séparation des variables

Définition. Une *connexion de covecteurs* Γ sur une variété M est une distribution sur T^*M transversale aux fibres: en chaque point $p\in T^*M$ le sous-espace $\Gamma_p=\Gamma\cap T_p(T^*M)$ est complementaire à l'espace tangent à la fibre de T^*M en p.

On réalise le transport d'un covecteur p_0 lelong d'une courbe sur M en prenant la courbe *relevée* à T^*M: c'est la courbe intégrale de Γ par p_0 qui se projecte sur la courbe donnée.

Une connexion Γ est localement représentée par des *équations du* *premier ordre*, comme sous-variété de TT^*M,

(1) $$\dot{p}_j = \Gamma_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p})\,\dot{x}^i ,$$

ou bien par des *générateurs* (champs de vecteurs indépendants):

(2) $$D_i = \partial_i + \Gamma_{ij}\partial^j .$$

Les fonctions $\Gamma_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ sont les *coefficients* de la connexion dans le système de coordonnées $\mathbf{x}$. Les coefficients d'une connexion par rapport à deux systèmes différents $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ sont liés par la relation suivante:

(3) $$\Gamma_{ij} = \partial_i \xi_j^{h'}\; p_{h'} + \xi_i^{i'}\; \xi_j^{j'}\; \Gamma_{i'j'} ,$$

oú $\xi_i^{i'} = \partial x^{i'}/\partial x^i$. On voit que $[D_i, D_j] = R_{ijk}\partial^k$ où

(4) $$R_{ijk} = \partial_i \Gamma_{jk} - \partial_j \Gamma_{ik} + \Gamma_{ih}\partial^h \Gamma_{jk} - \Gamma_{jh}\partial^h \Gamma_{ik}$$

est la *courbure* de la connexion Γ. Donc: la connexion Γ est *plate*, i.e. le transport d'un covecteur ne dépend pas de la courbe choisie pour joindre deux points, si et seulement si sa courbure est nulle (Γ est une distribution complètement intégrable): $R_{ijk} = 0$.

Une connexion est *symétrique* si $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$, *linéaire* si $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ij}^h(\mathbf{x})\, p_h$. De (3) il suit que ces deux conditions ne dépendent pas du systéme de coordonnées choisi. On voit qu'une connexion Γ est symétrique si et seulement si elle est *lagrangienne*, i.e. chaque Γ_p est un sous-espace langrangien de T_pT^*M selon la structure symplectique canonique de T^*M.

Une *fonction H* sur T^*M est *invariante* dans la connexion Γ, ou *intégrale* de Γ, si $\langle v, dH\rangle = 0$ pour chaque $v \in \Gamma$, i.e. localement:

(5) $$\partial_i H + \Gamma_{ij}\partial^j H = 0.$$

Une *1-forme différentielle* ξ sur M est *invariante* ou *intégrale* de Γ si, interprétée comme section $\xi : M \to T^*M$ du fibré cotangent, son image $\xi(M)$ est une variété intégrale de Γ. Dans ce cas on a localement:

(6) $$\partial_i \xi_j - \Gamma_{ij}(\xi) = 0.$$

Si Γ est plate, alors les images des formes invariantes sont les variétés intégrales de la distribution Γ.

Si la connexion est symétrique, toute forme invariante est fermée: $d\xi = 0$.

Une connexion Γ sur une variété riemannienne (M, g) est *métrique* si l'hamiltonienne des géodésiques est invariante.

Une étude plus détaillée sur cette notion de connexion, qui généralise la notion usuelle de connexion linéaire, et qui utilise la structure symplectique du fibré cotangent, sera presentée ailleurs. Nous nous sommes bornés ici aux premiers éléments nécessaires pour la discussion de la séparation des variables.

On sait que, du point de vue géometrique, une *intégrale complète* de l'équation réduite d'Hamilton-Jacobi associée à une hamiltonienne $H: T^*M \to R$ est un feuilletage de T^*M: (i) transversal aux fibres, (ii) lagrangien, (iii) tel que sur chaque feuille H est constant. Selon les définitions que nous avons données ci-dessus, on peut dire, d'une façon équivalente, qu'une intégrale complète de l'hamiltonienne H est une connexion Γ: (i) plate, (ii) symétrique, (iii) dont H est une fonction invariante. Les variétés intégrales de Γ forment le feuilletage lagrangien $\{L_{\mathbf{a}}; \mathbf{a} \in R^n\}$. Ce feuilletage admet deux types de représentation: (I) avec une *fonction génératrice* $W(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ par la formule $p_i = \partial_i W$; (II) avec *équations en involution*, i.e. avec équations du type $F_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = a_i$, où les fonctions F_i sont indépendantes et en involution: $\{F_i, F_j\} = 0$. Dans ces deux types de représentation la condition (iii) s'exprime respectivement par l'*équation d'Hamilton-Jacobi réduite* $H(\mathbf{x}, \partial\mathbf{W}) = h$ $(h \in R)$ ou bien par les équations $\{F_i, H\} = 0$: les fonctions F_i sont des intégrales premières de H. Les coefficients de la connexion correspondante sont définis à l'aide de ces deux représentations:

$$(7) \qquad \Gamma_{ij} = \partial_i \partial_j W, \quad \text{où} \quad a_i = F_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \ .$$

Définition 1. Une intégrale complète est *séparée* dans un système de coordonnées $\mathbf{x}$ si les coefficients de la connexion correspondante sont *diagonalisés* dans ce système:

$$(8) \qquad \Gamma_{ij} = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j \ .$$

Remarque 1. L'intégrale complète est séparée par rapport a $\mathbf{x}$ si et seulement si, dans les deux représentations, on a respectivement:

$$(9) \qquad \partial_i \partial_j W = 0 \quad (i \neq j) \ ,$$

$$(10) \qquad \{F_i, F_j\}_k = \partial^k F_i \, \partial_k F_j - \partial^k F_j \, \partial_k F_i = 0 \qquad (k \text{ n.s.})$$

(nous disons que les F_i sont en *involution séparée*). La condition (9), est évidente d'après (7). Omettons la démonstration de la condition (10), d'ailleurs simple, pour brévité.

Remarque 2. Si une intégrale complète est séparée alors la connexion est symétrique.

Remarque 3. Les coefficients d'une connexion séparée sont complètement déterminés par l'hamiltonienne: si l'on pose (étant $\partial^i H \neq 0$)

$$R_i = -\frac{\partial_i H}{\partial^i H}, \tag{11}$$

de (5) et (8) on tire:

$$\Gamma_{ii} = R_i \,. \tag{12}$$

Remarque 4. La complète intégrabilité de la connexion Γ est caractérisée par les équations

$$R_{ijj} = \partial_i R_j + R_i \partial^i R_j = 0 \qquad (i \neq j, \text{ n, s}). \tag{13}$$

En les développant avec (11) on retrouve les conditions de séparation de Levi-Civita.

Remarque 5. Etant valables les conditions d'intégrabilité (13), si la connexion Γ est linéaire, i.e. si $\Gamma_{ii} = B_i^h(\mathbf{x})\, p_h$, et métrique, i.e. si H est l'hamiltonienne des géodésiques d'une variété riemannienne (M_n, g), alors cette variété est localement euclidienne. On retrouve ainsi, sans calculs, un théorème dû a Levi-Civita [27]: si l'équation d'Hamilton-Jacobi des géodésiques est séparée par des coordonnées de «première classe» alors la variété est localment euclidienne. La distinction des coordonnées séparables en deux sous-systèmes, ou «classes», ou «groupes», introduite par Levi-Civita pour l'hamiltonienne géodésique et utilisée avec succès par Dall'Acqua [15], se généralise à une hamiltonienne quelconque [8]:

Définition 2. Soit $\mathbf{x}$ un système de coordonnées tel que les conditions de séparation de Levi-Civita sont satisfaites (donc il existe une intégrale complète séparée). On dit que la coordonnée x^i est de *première* *classe* si il existe n fonctions $B_i^j(\mathbf{x})$ telles que $\partial_i H = -\partial^i H B_i^j p_j$, c'est-à-dire si R_i est linéaire en $\mathbf{p}$:

$$R_i = B_i^j(\mathbf{x})\, p_j \;. \tag{14}$$

Autrement on dit que x^i est de *deuxième classe*. En particulier une coordonnée *ignorable*, i.e. telle que $\partial_i H = 0$, est de première classe.

Il se révèle très pratique d'adopter la convention suivante sur les indices [8]:

Convention. Pour les indices des coordonnées de deuxième classe on utilise les premières lettres latines *a, b, c,* ...; pour les indices des coordonnées de deuxième classe on utilise les lettres grecques α, β, γ, ...; si la distinction en classes n'est pas nécessaire, on utilise toujours les lettres latines *h, i, j,* ... Pour abreger le langage on dira que *a, b, c,* ... sont *indices de deuxième classe*, etc. On supposera: $a, b, c, \ldots = 1, \ldots, m$ ($m =$ nombre des coordonnées de deuxième classe dans le système $\mathbf{x}$ donné); $\alpha, \beta, \gamma, \ldots = m+1, \ldots, n$. On notera $r = n - m$ le nombre des coordonnées de première classe.

5. Note historique

Dans [27] Levi-Civita met en evidence qu'avec cette classification des coordonnées, les équations du première ordre suivantes sont nécessaires pour la séparation:

$$\begin{aligned}
&\partial_\alpha g_{ij} = 0 \quad (i,\, j \neq \alpha) \\
&g^{ai}\partial_i g_{jh} = 0 && \\
& && i,\, j,\, h \neq a \\
&g^{ak}\partial_i g_{jk} - g^{ai}\partial_i g_{ij} = 0 && i,\, j \neq h \\
&g^{ak}\partial_i g_{ik} - \frac{1}{2} g^{ai}\partial_i g_{ii} = 0 && i,\, j,\, h \text{ n.s.}
\end{aligned}$$

mais il s'aperçoit que la solution du Problème 1, bien que facilitée par la classification des coordonnées en deux classes, ne peut pas être achevée si non à l'aide d'un «artificio sintetico», inconnu. Aujourd'hui nous savons que cet artifice est lié, paradoxalement, à sa théorie des connexions (comme on verra dans le prochain paragraphe). En tout cas, Levi-Civita obtient des résultats complèts pour $n = 2$ et, comme nous avons déjà observé, pour le cas $m=0$ (n quelconque). La démonstration de l'orthogonalité des coordonnées de deuxième classe, pour le cas $n=m=2$, qui est un des noeuds du problème, est remarquable. En 1908, Dall'Acqua [14] donne une discussion complète du cas $n=3$ et, en 1912, la solution complète du Problème 1, pour une variété proprement riemannienne et une hamiltonienne avec potentiel V, en suivant un processus purement «analytique» très astucieux [15]. La solution est en effet en forme «implicite», puisqu'elle donne l'expression générale des moments p_i tandis que les expressions des composantes de la métrique. Dall'Acqua démontre que les p_i ont nécessairement la forme suivante (avec la convention que nous avons adoptée):

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} p_a = \xi_a^\beta c_\beta + \sqrt{\phi_a^{(b)} c_b + \zeta_a^{\alpha\beta} c_\alpha c_\beta + V_a} \\ p_\alpha = \xi_\alpha^{(\beta)} c_\beta \ , \end{cases}$$

où les c_i sont des costantes, $(\xi_\alpha^{(\beta)})$ et $(\phi_\alpha^{(b)})$ sont des matrices de Stäckel, et ξ_a^β, $\zeta_a^{\alpha\beta}$, V_a fonctions de x^a seulement, c'est-à-dire de la variable correspondante à l'indice du bas. Burgatti [11] avait précédemment remarqué que ces expressions sont suffisantes. On peut obtenir l'expression du tenseur métrique et du potentiel si l'on résout le systéme (1) par rapport aux constantes $\mathbf{c}=\mathbf{c}(\mathbf{x},\mathbf{p})$, si l'on prend une relation opportune entre la constante de l'énergie h et les $\mathbf{c}$, $h=h(\mathbf{c})$, et si l'on ecrit l'identité polynômiale $h(\mathbf{c}(\mathbf{x},\mathbf{p}))=\frac{1}{2}g^{ij}p_ip_j+V$. Dall'Acqua même propose la relation

$$\text{(2)} \qquad 2h = \Sigma_a c_a + \Sigma_\alpha c_\alpha^2 \ ,$$

mais il n'explicite pas les calculs. La suggestion de Dall'Acqua a été reprise par Havas [19]. En effet on peut prendre d'autres relations que (2). Dans [4] on considère la relation

$$\text{(3)} \qquad 2h = \zeta^a c_a + \zeta^{\alpha\beta} c_\alpha c_\beta \ ,$$

avec des constantes ζ^a et $\zeta^{\alpha\beta}$, et dans [8], plus simplement,

$$\text{(4)} \qquad 2h = c_m.$$

Paradoxalement tous ces choix sont équivalents, bien qu'il semble que la relation (3) soit plus générale que (2) et que (4) soit très particulière.

La (4) a le privilège de conduire à une solution formalement plus simple:

$$(5)\qquad \begin{cases} g^{aa}=\phi^{a}_{(m)}, \quad g^{ab}=0 \quad (a\neq b), \\ g^{a\alpha}=-\phi^{a}_{(m)}\,\xi^{\beta}_{a}\,\xi^{\alpha}_{(\beta)} \quad (a \text{ n.s.}) \\ g^{\alpha\beta}=\phi^{a}_{(m)}\,(\zeta^{\mu\nu}_{a}+\xi^{\mu}_{a}\,\xi^{\nu}_{a})\,\xi^{\alpha}_{(\mu)}\,\xi^{\beta}_{(\nu)}\,. \end{cases}$$

Le paradoxe vient du fait que la solution du Probléme 1 est une «intégrale générale» d'un système d'équations aux dérivées partielles (les conditions de séparation de Levi-Civita), qui s'exprime donc avec un certain degré d'arbitrage. Cette arbitrage se manifeste surtout par la présence de matrices de Stäckel. Il se vérifie, par exemple, qu'une combinaison linéaire du type $c^j\phi^i_{(j)}$, avec c^j constantes et $\phi^i_{(j)}$ inverse d'une matrice de Stäckel $n\times n$, peut être mise sous la forme «plus simple» $\sigma^i_{(n)}$, étant $\sigma^i_{(j)}$, l'inverse d'une matrice de Stäckel. Dans [7] on montre que pour chaque entier $N\geqslant n$ on a des solutions du Problème 1 apparemment de plus en plus «générales», qui contiennent des matrices de Stäckel d'ordre N, dont $N-n$ lignes sont données par des constantes arbitraires.

La solution du Problème 1 pour le cas d'une hamiltonienne quadratique, avec potentiel et terme linéaire dans les moments, dépendante aussi du temps, est due à Iarov-Iarovoi [20] et à Cantrijn [12], qui en donne une démonstration rigoureuse inspirée par la méthode de Dall'Acqua. Dans ces travaux on fait toujours l'hypothèse que la métrique est définie positive et la méthode est purement «analytique». Pour des métrique quelconques, la solution pour le cas purement géodésique se trouve dans [8] et pour le cas avec potentiel dans [10]. L'approche «géométrique» s'est révélée essentielle pour comprendre la nature du problème et pour simplifier conceptuellement sa solution.

Une première contribution aux aspects géométriques de la séparation est le théorème déjà cité de Levi-Civita (cas $m=0$)). Agostinelli [1] étend ce théorème au cas m quelconque. Il calcule le tenseur de Riemann sur la base des équations de séparation de Levi-Civita, et il montre que s'il existe un système de coordonnées séparables dont $r=n-m$ sont de première classe, alors la variété est feuilletée par des sous-variétés euclidiennes de dimension r. Ce fait est utilisé dans le même mémoire pour résoudre le Problème 1, mais la solution n'est pas complète (on peut voir que les solutions d'Agostinelli sont équivalentes, au sens que nous préciserons par la suite, à des systèmes de Stäckel [5]). Plus tard (1975), Agostinelli [3] montre, à partir des expressions de la métrique trouvée dans [1] et [2], l'existence de r intégrales premières linéaires et de $m=n-r$

intégrales quadratiques (un résultat analogue est obtenu par Havas [19] en même temps). On généralise donc les résultats de Stäckel et Eisenhart. En effet, puisque ces intégrales premières sont les constantes de l'intégrale complète séparée, elles sont toutes en involution. Les intégrales linéaires correspondent à des vecteurs de Killing commutant, qui engendrent le feuilletage euclidien trouvé dans [1]. Cette interprétation géométrique a inspiré les travaux [5] et [8] où l'existence des vecteurs de Killing est établie diréctement à partir des conditions de séparation de Levi-Civita et utilisée ensuite pour introduire des coordonnées ignorables. Cette méthode est reprise et revisée dans les paragraphes suivants.

6. Systèmes séparables équivalents et solution du Problème 1 pour une métrique quelconque

Sur l'ensemble des systèmes de coordonnées séparables autour d'un point d'une variété riemannienne (M_n, g) considérons la relation d'équivalence suivante: $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}'$ si les deux systèmes sont séparables pour la même intégrale complète Γ. On a appelé les classes d'équivalence *structures de séparabilité* [8]. Par exemple, le plan euclidien admets localement quatre «espèces» de structures de séparabilité, données respectivement par les coordonnées cartesiennes, polaires, elliptyque-hyperboliques homofocales et paraboliques homofocales; sur l'espace euclidien à trois dimensions on a onze espèces de structures de séparabilité (les coordonnées séparables «normales» correspondantes, au sens que nous préciserons dans la suite, sont classifiées dans [16] et [28]).

La propriété suivante a apporté une considérable simplification au traitement de la séparation de l'équation d'Hamilton-Jacobi [8]:

Lemme 1 (*existence des coordonnées distinguées*) - Les coordonnées de première classe sont équivalentes à des coordonnées ignorables, c'est-à-dire: étant donné un système séparable $\mathbf{x}$ par rapport à une hamiltonienne H, on peut déterminer un système équivalent $\mathbf{y}$ avec les mêmes coordonnées de deuxième classe et les coordonnées de première classe ignorables. On appelle ces systèmes de coordonnées séparables *distingués* (dans [8] *quasi-normaux*).

Démonstration. La condition d'intégrabilité $R_{\alpha\alpha\alpha}=0$ (voir § 4) donne l'équation

$$R_a B^a_\alpha + \partial_a B^i_{\ \alpha} p_i = 0 \ .$$

Si $B^a_\alpha \neq 0$ on voit que R_a est linéaire en $\mathbf{p}$: absurde, puisque x^a est par hypothèse de deuxième classe. Donc:

$$(1) \qquad B^a_\alpha = 0, \quad \partial_a B^\beta_\alpha = 0.$$

Le système complètement intégrable (6), § 4 se coupe alors en deux parties:

$$(2) \qquad \partial_\alpha \xi_\alpha = B^\beta_\alpha \xi_\beta, \quad \partial_\alpha \xi_\gamma = 0 \quad (\alpha \neq \gamma),$$

et

$$(3) \qquad \partial_a \xi_a = R_a, \quad \partial_a \xi_i = 0 \quad (a \neq i), \quad \partial_\alpha \xi_a = 0 \ ,$$

dont la première, qui entraine les ξ_α et les coordonnées de première classe seulement, est séparée de l'autre. Comme ce sous-système est complètement intégrable et linéaire, on a r solutions indépendantes $\xi^{(\beta)}_\alpha$ (qui donnent donc une matrice régulière). Prenons un système de coordonnées $\mathbf{y}$ défini Par

$$(4) \qquad dy^a = dx^a, \quad dy^\alpha = \xi^{(\alpha)}_\beta \, dx^\beta \ .$$

Ce système est séparable et équivalent à $\mathbf{x}$. En effet, si l'on prend la formule de transformation des coefficients de la connexion Γ (3), § 4 (avec $\mathbf{x}' = \mathbf{y}$), on voit que $\Gamma_{a'a'} = \Gamma_{aa}$ et que tous les autres coefficients, dans les coordonnées $\mathbf{y}$, sont identiquement nuls. De la formule (5), § 4 il suit que $\partial H / \partial y^\alpha = 0$: les y^α sont ignorables. ■

La connexion Γ se réduit, sur chaque sous-variété intégrale de la distribution engendrée par les vecteurs ∂_α (donc d'équations $x^a = \text{const.}$) à une connexion linéaire symétrique plate, d'une telle façon qu'on a r formes indépendantes $\xi^{(\alpha)} = \xi^{(\alpha)}_\beta \, dx^\beta$ dont les pull-back à chaque feuille sont invariantes et qui sont fermées grâce à la condition $(1)_2$. Les nouvelles coordonnées y^α sont les fonctions intégrales de ces formes. La distribution Γ résulte engendrée par les vecteurs $D_a = \partial_a + \Gamma_{aa}\partial^a$ et les vecterus $X_\alpha = \partial / \partial y^\alpha$, canoniquement relevés à T^*M_n. Ces relèvements canoniques, qui commutent, donnent une action abelienne libre (locale) sur T^*M_n qui laisse invariante la connexion Γ et l'hamiltonienne H. Comme nous n'avons pas examiné la notion de *réduction d'une connexion* (par rapport à une sous-variété, à un feuilletage, ou à une fibration) nous ne pouvons pas entrer dans le détail de ce point de vue géométrique.

On constate que si au lieu des relations (4) on prend:

$$(5) \qquad dy^a = dx^a, \quad dy^\alpha = \xi_\beta^{(\alpha)}\, dx^\beta + \xi_a^{(\alpha)}\, dx^a \ ,$$

avec $\xi_a^{(\alpha)}$ fonctions arbitraires de la coordonnée x^a correspondante à l'indice du bas, on obtient le même résultat, c'est-à-dire que le système $\mathbf{y}$ ainsi défini est équivalent à $\mathbf{x}$ et les y^α sont ignorables. En effet, une analyse plus detaillée, basée sur la formule de changement des coefficients d'une connexion, montre que:

Lemme 2. (i) Les nombres (r, m) des coordonnées de première et deuxième classe sont des invariants dans une classe d'équivalence. (ii) la relation la plus générale entre des coordonnées séparables $\mathbf{x}$ et des coordonnées équivalentes distinguées est du type (5) (un changement d'echelle près pour chaque coordonnée de deuxiéme classe, qui restent donc, comme on voit de $(5)_1$, essentiellement invariantes).

Appelons le couple de nombres entiers (r, m) le *type* de la structure de separabilité. Dans [23] les coordonnées de deuxième classe sont appelées *essentielles*.

Les lemmes précédents s'appliquent à une hamiltonienne quelconque. Considérons maintenant le cas de l'hamiltonienne géodésique sur une variété riemannienne (M_n, g). La variété M_n est (localement) feuilletée par des variétés eucliediennes, qui sont les orbites d'un groupe abelien d'isométries de dimension r, engendré par les vecteurs de Killing X_α, en involution (on retrouve ainsi le résultat d'Agostinelli). Les coordonnées ignorables y^α sont cartesiennes sur chaque feuille. On peut les choisir d'une telle manière qu'elle soient orthogonales sur une feuille, mais en général il n'est pas possible de les rendre orthogonales sur chaque feuille.

Dans le cas d'une métrique indéfinie il faut distinguer les coordonnées de deuxième classe encore en deux classes: *non-isotropes* et *isotropes* (de type 1 et 2, respectivement, dans [23]), selon qu'il soit $g^{aa} \neq 0$ ou bien $g^{aa} = 0$ (le gradient de la fonction coordonnée x^a est un vecteur isotrope). Une structure de séparabilité est donc caractérisée par un triplet (r, m_1, m_2) de nombres entiers: $r =$ nombre des coordonnées de première classe, $m_1 =$ nombre des coordonnées de deuxième classe non-isotropes, $m_2 =$ nombre des coordonnées de deuxième classe isotropes, avec $m_1 + m_2 = m$, $r + m_1 + m_2 = n$.

Dans le cas géodésique on a les propriétés remarquables suivantes:

Lemme 3. Pour chaque couple (a, b) d'indices différents de deuxième classe on a

$$(6) \qquad g^{ab} = 0 \quad (a \neq b).$$

La démonstration de cette propriété, pour le cas proprement riemannien (où il n'y a pas des coordonnées isotropes), a été donnée par Dall'Acqua [15] et reprise par Cantrijn [12]. Une démonstration a été donnée par Agostinelli [1] et reprise dans [8], mais on s'aperçoit qu'elle n'est pas complète (pour une démonstration complète de ce lemme, que nous omettons ici pour brevité, on peut voir [9]).

Lemma 4. Si $g^{aa} \neq 0$ (x^a est de deuxième classe, non-isotrope), alors il existe un système équivalent distingué tel que

$$g^{a\alpha} = 0. \tag{7}$$

La démonstration de ce lemme est basée sur l'identité

$$g^{ai}\partial_b g^{aj} = g^{aj}\partial_b g^{ai} \quad (a \neq b) , \tag{8}$$

déduite des conditions de séparation de Levi-Civita grâce aux lemmes précédents. Si l'on prend en particulier $(i, j) = (a, \alpha)$ on trouve:

$$\partial_b \frac{g^{a\alpha}}{g^{aa}} = 0 \quad (a \neq b) .$$

Cela signifie que les fonctions $g^{a\alpha}/g^{aa}$ ne dépendent que de la variable x^a (les coordonnées de première classe sont supposées ignorables). Considérons une transformation du type (5): $dy^a = dx^a$, $dy^\alpha = dx^\alpha + \xi_a^{(\alpha)}\, dx^a$, avec $\xi_a^{(\alpha)} = -g^{a\alpha}/g^{aa}$. Les nouvelles coordonnées $\mathbf{y}$ sont équivalentes et distinguées. On voit que $dy^a \cdot dy^\alpha = 0$, donc, pour les composantes selon les coordonnées $\mathbf{y}$, on a $g^{a\alpha} = 0$.

D'après ces lemmes on conclut que dans une structure de séparabilité du type (r, m) sur une variété riemannienne (M_n, g) il existe des systèmes de coordonnées distinguées $\mathbf{x}$ tels que les coordonnées de première classe x^α ($\alpha = m+1, \ldots, n$) sont ignorables, et tels que les composantes non identiquement nulles de la métrique sont seulement: g^{aa} ($a = 1, \ldots, m_1 \leqslant m$), $g^{c\alpha}$ ($c = m_1 + 1, \ldots, m_1 + m_2 = m$), $g^{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = m+1, \ldots, n$), où $m_1 + m_2 = m$ et m_2 est le nombre de coordonnées isotropes de deuxième classe. On dit alors que la métrique est mise en *forme standard*:

$$(g^{ij}) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \delta_{ab} g^{aa} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & g^{c\alpha} \\ \hline 0 & g^{\alpha c} & g^{\alpha\beta} \\ \hline \end{array}$$

Cette forme standard, qui est la base pour une discussion de la séparation en forme très simplifiée, a été indépendamment introduite par Kalnins et Miller [23]. Nous l'avons démontrée comme conséquence de le définition générale de séparation (additive) selon Levi-Civita. Les coordonnées séparables **x** pour les quelles la métrique prend la forme standard sont appelées *coordonnées séparables normales* dans [8]. Si l'on écrit l'équation d'Hamilton-Jacobi pour une métrique séparée en forme standard on arrive, avec des considérations que nous omettons ici pour brévité (on peut voir [8] et [23]), à la conclusion suivante:

Théorème. Dans une structure de séparabilité de type (r, m) sur une variété riemannienne (M_n, g) il existe un système de coordonnées **x**, où les coordonnées $x^\alpha (\alpha = m+1, \ldots, n)$ sont ignorables, et tel que les composantes contravariantes de la métrique ont la forme suivante:

$$
(9) \qquad \begin{cases} g^{ab} = 0 \quad (a \neq b) & (a, b = 1, \ldots, m) \\ g^{aa} = \phi^a_{(m)}, \quad g^{a\alpha} = 0 & (a = 1, \ldots, m_1 \leqslant m) \\ g^{aa} = 0, \quad g^{a\alpha} = \theta^\alpha_a \, \phi^a_{(m)} & (a = m_1 + 1. \ldots, m; \text{ n.s.}) \\ g^{\alpha\beta} = \zeta^{\alpha\beta}_a \phi^a_{(m)} & (a = 1, \ldots, m), \end{cases}
$$

où $\phi^a_{(m)}$ est l'm-ième ligne d'une matrice carrée $m \times m$ régulière $\phi^a_{(b)}$ dont l'inverse est une matrice de Stäckel (dans les variables x^a), et θ^α_a et $\zeta^{\alpha\beta}_a$ sont des fonctions de la coordonnée x^a correspondante à l'indice du bas.

De la forme standard on tire aussi les limitations

$$
(10) \qquad m_2 \leqslant r, \quad m_2 \leqslant \min(p, q), \qquad (m_2 = m - m_1)
$$

où (p, q) est la signature de la métrique. En effet, si $(10)_1$ n'est pas satisfaite on a $det(g^{ij}) = 0$: absurde. La $(10)_2$ vient du fait que le nombre m_2 est la dimension d'un sous-espace totalement isotrope. Si l'on applique enfin les lois des transformations du type (5) aux composantes du type (9) de la métrique, on trouve la forme générale des composantes contravariantes d'un tenseur métrique en coordonnées séparables [8]. On a donc résolu le Problème 1 pour une métrique de signature quelconque.

7. Caractérisation géométrique de la séparation

On cherche, comme on a fait pour le cas orthogonal, une caractérisation de l'existence de coordonnées séparables en termes de tenseurs de Killing et, dans ce cas, de vecteurs de Killing. En effet l'existence de coordonnées ignorables correspond à l'existence de vecteurs de Killing en involution. D'autre part, si l'on considère les expressions (9) du paragraphe précédent, étendues à toutes les «lignes» de la matrice de Stäckel $\phi^a_{(c)}$, on a les composantes de m tenseurs contravariants K_c (avec $K_m = G$):

$$(1)\quad \begin{cases} K^{ab}_c = 0 \quad (a \neq b) & \\ K^{aa}_c = \phi^a_{(c)}, \quad K^{a\alpha}_c = 0 & (a = 1, \ldots, m_1 \leqslant m) \\ K^{aa}_c = 0, \quad K^{a\alpha}_c = \theta^\alpha_a \phi^a_{(c)} & (a = m_1 + 1, \ldots, m;\ \text{n.s.}) \\ K^{\alpha\beta}_c = \zeta^{\alpha\beta}_a \varphi^a_{(c)}\ . & \end{cases}$$

Ces tenseurs sont de Killing et en involution, puisqu'ils correspondent aux constantes de l'intégrale complète séparée.

La caractérisation géométrique de la séparation a été etudiée par Kalnins et Miller [23]. Nous proposons ici une caractérisation des structures de séparabilité valable pour le cas où il n'y pas de coordonnées de deuxième classe isotropes, donc valable sans aucune exception sur une variété proprement riemannienne.

Théorème. Une variété riemannienne (M_n, g) admet localement une structure de séparabilité si et seulement si:

(i) il existe r vecteurs de Killing X_α et $m = n - r$ 2-tenseurs de Killing K_a, indépendants (comme fonctions sur T^*M);

(ii) les vecteurs de Killing sont en involution entre eux et avec les tenseurs de Killing:

$$[X_\alpha, X_\beta] = 0, \quad [X_\alpha, K_a] = 0.$$

(iii) Les tenseurs de Killing ont m vecteurs propres réels orthogonaux en commun X_a, et orthogonaux aux vecteurs de Killing:

$$X_a \cdot X_\alpha = 0\ .$$

Si un tel système existe, alors:

(iv) les vecteurs propres peuvent être normalisés d'une telle façon que

$$[X_a, X_\alpha] = 0, \quad [X_a, X_b] = 0 \ ,$$

et le système de coordonnées $\mathbf{x}$ défini par les vecteurs (X_a, X_α), c'est-à-dire tel que $X_i = \partial_i$, est séparable.

(v) Les tenseurs de Killing sont en involution:

$$[K_a, K_b] = 0 \ .$$

(vi) Le tenseur métrique contravariant G est une combinaison (à coefficients constants) des tenseurs K_a; on peut considérer $G = K_m$.

(vii) Il existe une matrice de Stäckel $\phi_b^{(c)}$ telle que les composantes des K_a sont données par les formules (1) (avec $m_2 = 0$).

(viii) Si les vecteurs propres X_a ne peuvent pas être normalisés à des vecteurs de Killing (avec (iv) valable), alors la structure de séparabilité est effectivement du type (r, m) et les coordonnées $\mathbf{x}$ sont séparables normales.

Démonstration. La nécessité des conditions (i)-(ii)-(iii) suit de la discussion précédente. On doit alors démontrer que des conditions (i)-(ii)-(iii) on tire les autres (spécialement la condition (vii)). Les orbites des vecteurs X_α définissent une fibration (submersion surjective) $\pi : M_n \to \bar{M}_m$ où $\bar{M}_m$ est la variété des orbites. (On identifie ici, pour simplicité, la variété M_n avec le domaine de définition des vecteurs). Les orbites sont des sous-variétés localement euclidiennes (plates). Les tenseurs contravariants G et K_a se réduisent à des tenseurs contravariants $\bar{G}$ et $\bar{K}_a$ sur $\bar{M}_m$, tels que $\bar{G}$ est une métrique et les $\bar{K}_a$ sont de Killing et indépendents. Cette réduction est définie par l'équation $\bar{G}(\mu, \nu) = G(\pi^*\mu, \pi^*\nu)$ où μ et ν sont 1-formes sur $\bar{M}_m$ (analoguement pour les tenseurs K_a). Cette définition est cohérente parce que G est invariante par rapport aux vecteurs X_α qui engendrent la fibration π. On vérifie que cette réduction conserve les équations de Killing $[G, K_a] = 0$ et l'indépendance des tenseurs. Soient ϕ^a les formes propres correspondantes aux vecteurs X_a. Les formes ϕ_a sont réductibles à la variété $\bar{M}_m$ si et seulement si $\langle X_\alpha, \phi^a \rangle = 0$ et si la dérivée de Lie par rapport à tous les X_α est nulle. La première de ces conditions est équivalente à $X_\alpha \cdot X_a = 0$; la deuxième peut être satisfaite avec une normalisation des ϕ^a, puisque K_a et G sont invariants par rapport aux X_α. Supposons alors que les ϕ^a soient déjà réductibles: il existe des formes $\bar{\phi}^a$ sur $\bar{M}$ telles que $\phi^a = \pi^*\bar{\phi}^a$. Les $\bar{\phi}^a$ sont des formes propres communes des tenseurs de Killing reduits $\bar{K}_a$. Pour ce qu'on a vu au § 3, elle peuvent être normalisées d'une telle façon que $d\bar{\phi}^a = 0$. On trouve alors des coordonnées locales $\bar{x}^a$ telles que

$d\bar{x}^a = \bar{\phi}^a$, donc des fonctions x^a telles que $dx^a = \phi^a$ sont des formes propres communes des tenseurs de Killing K_a. Les vecteurs propres X_a correspondants aux dx^a et les vecteurs de Killing X_α forment un repère. De l'équation de Killing de K_a écrite dans ce repère on déduit la condition $\Omega_{ab\alpha} = 0$, c'est-à-dire que les vecteurs X_a forment une distribution complètement intégrable orthogonale au feuilletage euclidien (fibres de π) engendré par les X_α. On prend une variété intégrale Σ_0 des X_a. On peut alors définir des fonctions x^α telle que $x^\alpha(p)$ est la coordonnée cartesienne determinée par X_α avec origine au point d'intersection de Σ_0 avec la sous-variété euclidienne contenant le point p. Il suit que les fonctions (x^a, x^α) donnent un système de coordonnèes tel que $X_\alpha = \partial/\partial x^\alpha = \partial_\alpha$ et $X_a = g^{aa}\partial/\partial x^a = g^{aa}\partial_a$. On normalise encore une fois chaque vecteur X_a en le divisant par g^{aa} et on obtient $X_a = \partial_a$. Il nous reste à démontrer que ces coordonnées sont séparables. Ecrivons

$$K_a = K_a^{bb}\partial_b \otimes \partial_b + K_a^{\alpha\beta}\partial_\alpha \otimes \partial_\beta$$

et l'expression analogue pour G. Puisque les ∂_α sont del Killing et $[\partial_\alpha, K_a] = 0$, l'équation $[K_a, G] = 0$ nous donne simplement:

$$K_a^{bb}\partial_b g^{cc} = g^{bb}\partial_b K_a^{cc} \qquad (b \text{ n.s.}), \tag{2}$$

$$K_a^{bb}\partial_b g^{\alpha\beta} = g^{bb}\partial_b K_a^{\alpha\beta} \qquad (b \text{ n.s.}). \tag{3}$$

Ces équations, avec le même processus qu'on a vu pour le cas orthogonal, impliquent:

$$K_a^{bb}\partial_b K_d^{cc} = K_d^{bb}\partial_b K_a^{cc} \qquad (n \text{ n.s.}), \tag{2'}$$

$$K_a^{bb}\partial_b K_d^{\alpha\beta} = K_d^{bb}\partial_b K_a^{\alpha\beta} \qquad (b \text{ n.s.}). \tag{3'}$$

Mais les (2′)-(3′) montrent que $[K_a, K_d] = 0$, donc que les tenseurs de Killing sont en involution, plus particulièrement qu'il sont en involution séparée (voir la Remarque 1, § 4) par rapport aux coordonnées $\mathbf{x} = (x^a, x^\alpha)$. Les vecteurs X_α et les tenseurs K_a sont aussi, trivialement, en involution séparée. Donc l'intégrale complète determinée par les intégrales premières correspondantes aux vecteurs X_α et aux tenseurs K_a est séparable par rapport aux $\mathbf{x}$. Pour compléter la démonstration il faut encore remarquer qu'aux tenseurs K_a on peut ajouter des combinaisons (à coefficient constant) de produits symétriques des vecteurs de Killing X_α sans rien changer. On répète alors le raisonnement de la démonstration de la Proposition 5, § 2 et on trouve que le tenseur métrique contravariant peut être un des tenseurs de Killing. Le point (vii) se démontre d'une façon analogue à la Proposition 4 du § 2: les équations (2′) impliquent que $K_b^{aa} = \phi^a_{(b)}$; les équations (3′) sont du type

$$\phi^a_{(b)}\partial_a f_c = \phi^a_{(c)}\partial_a f_b \qquad (a \text{ n.s.}).$$

Si l'on multiplie par $\phi^{(b)}_d$ avec $d \neq a$ on trouve $0 = \phi^a_{(c)}\partial_a(\phi^{(b)}_d f_b)$, donc $\partial_a(\phi^{(b)}_d f_b) = 0$; cela signifie que $\phi^{(b)}_d f_b = \xi_d =$ fonction de la seule variable x^d, donc que f_b est du type $f_b = \xi_a \phi^a_{(b)}$. Une dernière remarque: pour qu'une coordonnée x^a soit effectivement de deuxième classe il faut et il suffit que cette coordonnée ne soit pas ignorable à un changement d'echelle près, i.e. que le vecteur X_a ne soit pas, à un facteur près, de Killing. ■

Ce théorème modifie un enoncé donné dans [8] (voir aussi [4], [6] et [7]), où aux conditions (i)-(ii)-(iii), suffisantes pour l'existence d'une structure de séparabilité, on a ajouté les conditions

$$[X_a, X_b] = 0, \quad [X_a, X_\alpha] = 0, \quad [K_a, K_b] = 0,$$

qui sont en effet redondantes. Le fait que les deux premières de ces conditions soient redondantes est déjà considéré par Kalnins et Miller dans [22]. Le fait que la troisième, c'est-à-dire la commutabilité des tenseurs de Killing, soit également redondante n'est pas, à mon avis, un fait si bien connu, comme pour le cas orthogonal.

REFERENCES

[1] Agostinelli C., *Sopra l'integrazione per separazione delle variabili dell'equazione dinamica di Hamilton-Jacobi*, Mem. Ac. Sci. Torino, **69** (1937), 3-54.

[2] Agostinelli C., *Su nuovi casi di integrabilità per separazione di variabili dell'equazione dinamica di Hamilton-Jacobi*, Rend. Acad. Naz. Lincei, **57** (1974), 391-398, 619-623.

[3] Agostinelli C., *Su alcune proprietà dei sistemi dinamici integrabili per separazione di variabili*, Rend. Acad. Naz. Lincei, **58** (1975), 738-745.

[4] Benenti S., *Strutture di separabilità su varietà riemanniane,* Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, **34** (1975-76), 431-463

[5] Benenti S., *Proprietà intrinseche dei sistemi dinamici separabili e condizioni necessarie per l'integrabilità dell'equazione di Hamilton-Jacobi mediante separazione delle variabili*, Proceedings «III Congresso Nazionale AIMETA» (1976), I - 10.1-10.11.

[6] Benenti S., *Integrabilità per separazione delle variabili delle equazioni alle derivate parziali lineari del secondo ordine interessanti la fisica matematica*, Rend. Accad. Naz. Lincei, **62** (1977), 51-60.

[7] Benenti S., *Separable dynamical systems: characterization of separability structures on Riemannian manifolds*, Resp. Math. Phys., **12** (1977), 311-316.

[8] Benenti S., *Separability structures on Riemannian manifolds,* L. N. Math., **863** (1980), 512-538.

[9] Benenti S., *On the orthogonality of second class coordinates in the separation of the Hamilton-Jacobi equation*, Atti Accad. Sci. Torino (à paraître).

[10] Benenti S., Pidello G., *Separability structures corresponding to conservative dynamical systems,* Meccanica, **19** (1984), 275-281.

[11] Burgatti P., *Determinazione dell'equazioni di Hamilton-Jacobi integrabili mediante la separazione delle variabili,* Rend. R. Ac. Lincei Roma, **20** (1911), 108-111.

[12] Cantrijn F., *Separation of variables in the Hamilton-Jacobi equation for non-conservative systems*, J. Phys. A: Math. Gen. **10** (1977), 491-505.

[13] Carter B., *Hamilton-Jacobi and Schrödinger separable solutions of Einstein equations*, Comm. Math. Phys. **10** (1968), 280-310.

[14] Dall'acqua F.A., *Sulla integrazione delle equazioni di Hamilton-Jacobi per separazione di variabili*, Math. Ann., **66** (1908), 398-415.

[15] Dall'acqua F.A., *Le equazioni di Hamilton-Jacobi che si integrano per separazione di variabili*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **33** (1912), 341-351.

[16] Eisenhart L.P., *Separable systems of Stäckel*, Ann. Math., **35** (1934), 284-305.

[17] Eisenhart L., *Stäckel systems in conformal Euclidean space*, Ann. Math., **36** (1935), 57-70.

[18] Eisenhart L.P., *Riemannian Geometry*, Princeton Univ. Press (1950).

[19] HAVAS P., *Separation of variables in the Hamilton-Jacobi, Schödinger, and related equations. I. Complete separation. II. Partial separation*, J. Math. Phys., **16** (1975), 1461-1468, 2476-2489.

[20] IAROV-IAROVOI M.S., *Integration of the Hamilton-Jacobi equation by the method of separation of variables*, J. Appl. Math. Mech., **27** (1964), 1499-1519.

[21] KALNINS E.G., *Separation of Variables for Riemannian Spaces of Constant Curvature,* Pitman Monographs **28** (1986).

[22] KALNINS E.G., MILLER W. Jr., *Killing tensors and variable separation for Hamilton-Jacobi and Helmholtz equations*, SIAM J. Math. Anal., **11** (1980), 1011-1020.

[23] KALNINS E.G., MILLER W. Jr., *Killing tensors and nonorthogonal variable separatio for Hamilton-Jacobi equations*, SIAM J. Math. Anal., **12** (1981), 617-629.

[24] KALNINS E.G., MILLER W. Jr., *Conformal Killing tensors and variable separation for Hamilton-Jacobi equations*, SIAM J. Math. Anal., **14** (1983), 126-137.

[25] KALNINS E.G., MILLER W. Jr., *Intrinsic characterization of variable separation for the partial differential equations of mechanics,* Proceedings IUTAM-ISIMM Symposium on Modern Developments in Analytical Mechanics, Torino, June 7-11, 1982, Acta Academiae Scientiarum Taurinensis **117** (1983), 511-533.

[26] KATZIN H., LEVINE J., *Quadratic first integrals of the geodesics in spaces of constant curvature*, Tensor, **10** (1965), 97-104.

[27] LEVI-CIVITA T., *Sulla integrazione della equazione di Hamilton-Jacobi per separazione di variabili*, Math. Ann., **59** (1904), 383-397.

[28] MORSE P.M., FESHBACH H., *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill (1953).

[29] WOODHOUSE N.M.J., *Killing tensors and the separation of the Hamilton-Jacobi equation*, Commun. Math. Phys., **44** (1975), 29-44.

Ricerca effettuata con fondi erogati dal Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica e Tecnologica.

Sergio BENENTI - Istituto di Fisica Matematica «J.L. Lagrange» - Università di Torino, Via Carlo Alberto 10, 10123 TORINO.