S. Benenti Instituto di Fisica Matematica "J.-L. Lagrange", Università di Torino

Fibrés affines canoniques et mécanique newtonienne

1. Mécanique analytique newtonienne.

On appelle <u>espace-temps</u> <u>de</u> <u>Galilée</u> l'espace affine M de dimension 5, pseudo-euclidien de signature (+---), muni d'un champ de vecteurs Z, uniforme et isotrope. Sur cet espace-temps on peut donner une formulation intrinsèque (indépendante du choix des repères) de la dynamique newtonienne d'une particule et de l'équation de Schrödinger [1] [2] [3].

Soient $\zeta: \mathbb{R} \times \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ l'action du groupe \mathbb{R} sur \mathbb{M} engendrée par \mathbb{Z} , \mathbb{N} l'espace des orbites de ζ , $\eta: \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ la projection canonique. On peut regarder η comme un fibré principal de groupe structural \mathbb{R} . On trouve que \mathbb{N} est l'espace-temps de Newton, espace affine de dimension 4, à métrique dégénérée.

Soit F le groupe des isométries de M qui laissent Z invariant. Considérons le sous-groupe $\epsilon(R)$ (isomorphe à R) des translations de M selon le champ constant Z. On trouve que le groupe quotient $G = F/\epsilon(R)$ est le groupe de Galilée. Nous appellons F le groupe de Galilée étendu (ou bien le groupe de Bargmann "classique").

L'espace des phases de la mécanique newtonienne d'une particule est le fibré cotangent T*M de M. La dynamique d'une particule de masse m est définie par des <u>contraintes</u> représentées par des sous-variétés de T*M de codimension l. La première, fondamentale, est la <u>contrainte</u> <u>de masse</u>:

(1)
$$K_m = \{k \in T^*M; \langle Z, k \rangle = m\},$$

où le nombre réel m est la masse de la particule. La deuxième, que on peut appeller la <u>contrainte</u> <u>de l'énergie</u>, est l'ensemble suivant:

(2)
$$E_m = \{k \in T + M; (g'(k), k) + 2m\overline{U}(y) = 0, y = \pi_M(k)\},$$

où $g': T^*M \to TM$ est la métrique contravariante, $U: N \to R$ le potentiel, $\bar{U} = U \cdot \eta: M \to R$, $\pi_M: T^*M \to M$ la fibration cotangente.

L'intersection $C_m = K_m \cap E_m$ est une sous-variété coisotrope de T*M définissant un <u>système dynamique homogène</u> [4] [5]. La distribution caractéristique $D_m' \subset T(T^*M)$ de C_m est l'<u>équation du premier ordre</u> de la dynamique de la particule. Puisque C_m est de codimension 2, les variétés intégrales de sa distribution

caractéristique (que nous appellons simplement <u>caractéristiques</u> de C_{m}) ont la dimension 2 et D_{m} est localement representée par deux équations différentielles du premier ordre, homogènes.

Un repère (inertial) est un champ de vecteurs \bar{X} sur M, uniforme et isotrope, tel que $\bar{X} \cdot Z = 1$ (le point · dénote ici le produit scalaire des vecteurs). Le choix d'un repère nous permet:

(i) de donner une <u>décomposition</u> relative de l'impulsion absolue $k \in T*M$, k = (p,e,m) = (impulsion relative, énergie relative, masse absolue), en posant:

$$k = p + e g(Z) + m g(\overline{X}), \quad m = \langle Z, k \rangle, \quad e = \langle \overline{X}, k \rangle,$$

étant g:TM → T*M la métrique covariante.

- (ii) de donner un repere X dans l'espace-temps N de Newton par la projection η :
- (iii) de donner, pour chaque $m \in R$, une réduction (submersion surjective) $\kappa_m \colon K_m \to T \star N$. La sous-variété $\kappa_m(C_m) \subset T \star M$ est coisotrope et représente la dynamique homogène de la particule de masse m observée du repère X.

on a ainsi deux modèles pour la dynamique d'une particule: (I) un modèle <u>absolu</u> basé sur T*M (dimension 10), (II) un
modèle <u>relatif</u> basé sur T*N (dimension 8), avec le choix d'un
repère.

On peut d'ailleurs considérer un troisième modèle, que l'on peut appeler <u>affine absolu</u>, basé sur l'espace P_m des caractéristiques de la sous-variété coisotrope K_m . On trouve

que cet espace (de dimension 8) est un fibré affine sur N. Il admet aussi une forme symplectique canonique ω_m telle que

(3)
$$\chi_{\mathbf{m}} \star \omega_{\mathbf{m}} = d\theta_{\mathbf{M}} | K_{\mathbf{m}}$$

où $\chi_m: K_m \to P_m$ est la projection canonique et θ_M est la 1-forme de Liouville sur T*M (la barre | dénote la restriction d'une forme sur une sous-variété). Dans ce modèle les impulsions ont un caractère "affine" et non "vectoriel" comme dans les deux précédents.

Pour comprendre la nature d'une telle description affine on a étudié la structure abstraite de ce modèle, qu'on retrouve d'ailleurs en plusieurs questions de physique mathématique, et qui est construite sur un fibré principal $\eta:M\to N$. Cela nous a conduit à introduire la notion de fibré affine canonique.

2. Fibrés affines canoniques.

$$\delta(a'',a') + \delta(a',a) = \delta(a'',a)$$

pour tout sous-ensemble (a,a',a") de A sur la même fibre de π , et telle que pour chaque a \in A_S = $\pi^{-1}(s)$ l'application

$$\delta_a: A_s \to T_s^*S$$

est une bijection. On dit que $\pi:A\to S$ est un <u>fibré affine</u> model<u>é sur</u> T $\star S$.

Soient $\sigma_{\alpha} : U_{\alpha} \to A$ et $\sigma_{\beta} : U_{\beta} \to A$ deux sections locales (différentiables) de π , telles que $U_{\alpha\beta} = U_{\alpha} \cap U_{\beta} \neq \emptyset$. La différence de σ_{α} et σ_{β} est la section du fibré cotangent T*S (c'est-à-dire la l-forme sur S) définie par

$$\sigma_{\beta} - \sigma_{\alpha} : U_{\alpha\beta} \to T \star S : x \to \delta(\sigma_{\beta}(x), \sigma_{\alpha}(x)).$$

Soit Σ = $\{\sigma_{\alpha}: U_{\alpha} \to A; \alpha \in I\}$ une famille de sections locales de Σ telles que

(i)
$$\bigcup_{\alpha \in I} U_{\alpha} = S$$
.

(ii) $d(\sigma_{\beta} - \sigma_{\alpha}) = 0$ (les différences sont fermées).

Nous appelons <u>fibré</u> <u>affine</u> <u>canonique</u> (modelé sur T*S) tout triplet (π, δ, Σ) satisfaisant au conditions précédentes.

Il existe une correspondance bijective naturelle entre les sections $\sigma\colon S\to A$ de π et les isomorphismes basiques de fibrés $\sigma\colon A\to T^*S$, définie par la formule

(1)
$$\sigma(a) = \delta(a, \sigma(\pi(a))).$$

On voit que l'image $\sigma(S) \subset A$ est identifiée par σ avec la "section nulle" de T $\star S$.

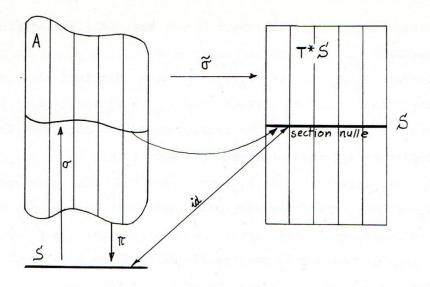


Figure 1

A chaque fibré affine canonique sont associés deux objets: (i) une <u>forme</u> <u>symplectique</u> <u>canonique</u> w sur A définie par

(2)
$$\omega | \pi^{-1}(U_{\alpha}) = \tilde{\sigma}_{\alpha} \star d\theta_{S}, \quad \alpha \in I,$$

où θ_S est la l-forme de Liouville sur T*S, (ii) une <u>classe de cohomologie de de-Rham</u> de degré 2 sur S (dans le cas où π admet des sections globales différentiables). En effet à toute section différentiable $\sigma:S \to A$ de π est associée une 2-forme Θ_{σ} sur S, fermée, définie par

(3)
$$\Theta_{\sigma} | U_{\alpha} = d(\sigma - \sigma_{\alpha}).$$

Si σ et σ' sont deux sections, alors on a

(4)
$$\Theta_{\sigma} - \Theta_{\sigma'} = d(\sigma - \sigma')$$
.

On démontre que

(5)
$$\omega = \sigma \star (d\theta_S + \pi_S \star \theta_\sigma),$$

où $\pi_S: T \star S \to S$ est la fibration cotangente. Cette formule montre que l'isomorphisme basique σ est un symplectomorphisme par rapport à la forme symplectique canonique ω de A et à la forme symplectique canonique de T $\star S$ "corrigée" par le 2-cocycle Θ_{σ} relevé à T $\star S$.

Nous avons deux exemples élémentaires de fibré affine canonique: (I) A = T * S, $\pi = \pi_S$, Σ formée par une seule section $\sigma : S \to T * S$. On a $\omega = d(\theta_S + \pi_S * \sigma)$ et la classe de cohomologie nulle. (II) A = T * S, $\pi = \pi_S$, Σ formée par les sections locales $\sigma : U \to T * S$ telles que $\theta | U = -d\sigma$, étant θ une 2-forme fermée donnée sur S. On a $\omega = d\theta_S + \pi_S * \theta$ et la classe de cohomologie est celle déterminée par θ .

Il faut remarquer que, étant donné un fibré affine canonique (π, δ, Σ) , on peut ajouter à Σ des sections locales à différence nulle avec les éléments de Σ . On obtient ainsi un fibré canonique <u>équivalente</u>: il aura la même forme symplectique canonique et la même classe de cohomologie. On est conduit, d'une telle manière, à considérer la famille complète (ou maximale) $\bar{\Sigma}$ de toutes les sections à différence nulle avec Σ . Des deux exemples donnés, le premier peut être vu comme cas particulier du deuxième.

3. Automorphismes affines canoniques.

Soit (π, δ, Σ) un fibré affine canonique (notations du §2). Soient $(\xi, \overline{\xi})$ un automorphisme de π et $\sigma: U \to A$ une section de π . L'application

$$(\xi,\bar{\xi})\!\star\!\sigma\!:\!\xi^{-1}(\mathtt{U})\to\mathtt{A}\!:\!\mathtt{x}\to(\bar{\xi}^{-1}\!\cdot\!\sigma\!\cdot\!\xi)(\mathtt{x})$$

est une section de π que nous appelons l'<u>image</u> <u>réciproque</u> de σ par $(\xi,\bar{\xi})$. On dit que une section globale σ est <u>invariante</u> par $(\xi,\bar{\xi})$ si $(\xi,\bar{\xi})$ * σ = σ , c'est-à-dire si $\bar{\xi}$ • σ = σ • ξ .

On dit que $(\xi,\bar{\xi})$ est un <u>automorphisme</u> <u>canonique</u> de (π,δ,Σ) si

(i)
$$\langle \mathbf{v}, \delta(\mathbf{a}, \mathbf{a}') \rangle = \langle \mathrm{T}\xi(\mathbf{v}), \delta(\bar{\xi}(\mathbf{a}), \bar{\xi}(\mathbf{a}')) \rangle$$

avec $v \in T_X^S$ et a. $a' \in \pi^{-1}(x)$, et si (ii) $(\pi, \delta, \Sigma \cup \Sigma')$, où $\Sigma' = (\xi, \bar{\xi}) \star (\Sigma)$ est la famille des images réciproques de Σ , est un fibré affine canonique (équivalent à (π, δ, Σ)).

On peut démontrer que: <u>un automorphisme</u> $(\xi,\bar{\xi})$ <u>est</u> <u>canonique si et seulement si $\bar{\xi}$ est symplectique</u>, c'est-à-dire $\bar{\xi}$ * $\omega = \omega$, ω étant la forme symplectique canonique du fibré. On trouve aussi que <u>si</u> σ <u>est une section invariante par rapport à un automorphisme canonique</u> $(\xi,\bar{\xi})$, <u>alors la 2-forme</u> Θ_{σ} <u>associée est invariante par rapport à</u> ξ : ξ * $\Theta_{\sigma} = \Theta_{\sigma}$.

Si $(\xi, \bar{\xi})$ est un automorphisme canonique on dit que $\bar{\xi}$ est un relèvement canonique de ξ .

4. Fibrés affines canoniques associés à un fibré principal.

Bien que les résultats illustrés dans la suite s'étendent au cas d'un groupe structural abelien quelconque, nous considérons pour simplicité (c'est d'ailleurs le cas qui nous intéresse, d'après ce qu'on a vu au $\S 1$) un fibré principal $\eta:M\to N$ de groupe structural R. Des questions similaires, aussi pour le cas non-abelien, mais ne concernant pas les fibrés principaux, sont traitées par exemple dans [6].

Soient $\zeta: \mathbb{R} \times \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ l'action du groupe sur \mathbb{M} , \mathbb{Z} le champ fondamental engendré par ζ , $\hat{\zeta}: \mathbb{R} \times \mathbb{T}^*\mathbb{M} \to \mathbb{T}^*\mathbb{M}$ le relèvement canonique de l'action ζ . $\mathbb{P} = \mathbb{T}^*\mathbb{M}/\hat{\zeta}$ l'ensemble des orbites de $\hat{\zeta}$, $\chi: \mathbb{T}^*\mathbb{M} \to \mathbb{P}$ la projection canonique. On démontre que \mathbb{P} est une variété de Poisson; la structure de Poisson est induite de celle de $\mathbb{T}^*\mathbb{M}$ par la projection χ . La projection canonique χ est aussi un fibré principal de groupe structural \mathbb{R} .

Pour chaque $m \in R$ l'ensemble K_m (définition (1) du §1) est une sous-variété coisotrope de T*M; les caractéristiques de K_m sont les orbites de la restriction de $\hat{\zeta}$ à K_m . L'ensemble quotient $P_m = K_m/\hat{\zeta}$ est une variété symplectique: il admet une forme symplectique ω_m caractérisée par la proprieté (3) du §1, où $\chi_m:K_m \to P_m$ est la projection canonique. Le feuilletage symplectique $\{(P_m,\omega_m): m \in R\}$ de P est le feuilletage caractéristique de la structure de Poisson.

Pour chaque $m \in \mathbb{R}$ nous introduisons les trois objects suivants:

4. Fibrés affines canoniques associés à un fibré principal.

Bien que les résultats illustrés dans la suite s'étendent au cas d'un groupe structural abelien quelconque, nous considérons pour simplicité (c'est d'ailleurs le cas qui nous intéresse, d'après ce qu'on a vu au $\S 1$) un fibré principal $\eta:M\to N$ de groupe structural R. Des questions similaires, aussi pour le cas non-abelien, mais ne concernant pas les fibrés principaux, sont traitées par exemple dans [6].

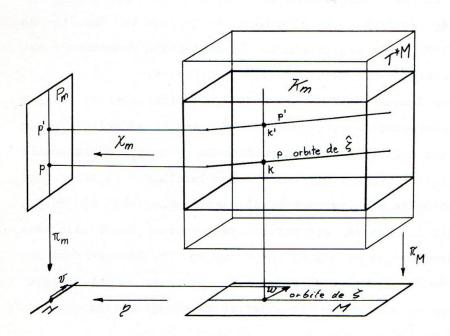
Soient $\zeta: \mathbb{R} \times \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ l'action du groupe sur \mathbb{M} , \mathbb{Z} le champ fondamental engendré par ζ , $\hat{\zeta}: \mathbb{R} \times \mathbb{T}^*\mathbb{M} \to \mathbb{T}^*\mathbb{M}$ le relèvement canonique de l'action ζ . $\mathbb{P} = \mathbb{T}^*\mathbb{M}/\hat{\zeta}$ l'ensemble des orbites de $\hat{\zeta}$, $\chi: \mathbb{T}^*\mathbb{M} \to \mathbb{P}$ la projection canonique. On démontre que \mathbb{P} est une variété de Poisson; la structure de Poisson est induite de celle de $\mathbb{T}^*\mathbb{M}$ par la projection χ . La projection canonique χ est aussi un fibré principal de groupe structural \mathbb{R} .

Pour chaque $m \in R$ l'ensemble K_m (définition (1) du §1) est une sous-variété coisotrope de T*M; les caractéristiques de K_m sont les orbites de la restriction de $\hat{\zeta}$ à K_m . L'ensemble quotient $P_m = K_m/\hat{\zeta}$ est une variété symplectique: il admet une forme symplectique ω_m caractérisée par la proprieté (3) du §1, où $\chi_m:K_m \to P_m$ est la projection canonique. Le feuilletage symplectique $\{(P_m,\omega_m): m \in R\}$ de P est le feuilletage caractéristique de la structure de Poisson.

Pour chaque $m \in \mathbb{R}$ nous introduisons les trois objects suivants:

- (i) l'application $\pi_m: P_m \to N$, définie par l'équation $\pi_m(p) = \eta(\pi_M(k)), \ k \in p,$
- (ii) l'application $\delta_m: P_m \times_N P_m \to T \star N$, définie par l'équation $\langle v, \delta_m(p,p') \rangle = \langle w, k' k \rangle$, $T \eta(w) = v$.
- (iii) l'ensemble $\boldsymbol{\Sigma}_m$ des sections locales de $\boldsymbol{\pi}_m$ correspondant aux trivialisations locales de $\eta.$

On peut avoir une idée de la définition de $\pi_{_{\mbox{\scriptsize m}}}$ et de $\delta_{_{\mbox{\scriptsize m}}}$ avec la Fig.2:



On démontre que ces deux définitions sont cohérentes et que: $(\pi_{\rm m}, \delta_{\rm m}) \ \underline{\rm est} \ \underline{\rm un} \ \underline{\rm fibré} \ \underline{\rm affine} \ {\rm modell\'e} \ {\rm sur} \ {\rm T+N}.$

Il est convenable de fonder la définition de Σ_m sur la notion de connexion d'un fibré principal. Dans notre cas, une connexion α de η est identifiée avec une l-forme α sur M telle que

$$(1) d_Z\alpha = 0, i_Z\alpha = 1$$

(on denote d_Z et i_Z la derivée de Lie et le produit intérieur par rapport à Z). A toute connexion α est associée une 2-forme fermée B sur N, la <u>courbure</u> de α , telle que

(2)
$$d\alpha = \eta *B$$
.

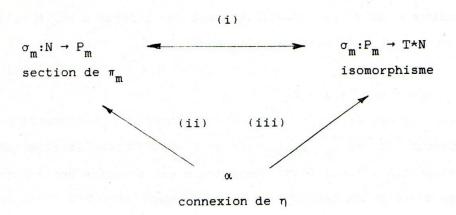
Si B = 0, la connexion α donne lieu à un feuilletage de codimension l de M, transverse à η . Si chaque feuille est l'image d'une section globale de η , on dit que la connexion est <u>plate</u>. Une trivialisation de η est une application $\tau:M \to R$ telle que

(3)
$$(\tau \cdot \zeta_t)(\mathbf{x}) = \tau(\mathbf{x}) + t.$$

Si τ est une trivialisation, alors α = $d\tau$ est une connexion plate. Un fibré principal admet, dans le cas général, seulement des trivialisations locales. Toutefois, dans notre cas, R étant le groupe structural, le fibré admet aussi des trivialisations globales.

Cela posé, on voit qu'il existe une correspondance entre les sections de $\pi_{\rm m}$, les isomorphismes basiques de P sur T*N et

les connexions de n:



On a dejà considéré la correspondance bijective (i) au §2 (on a dejà vu que $(\pi_{\rm m}, \delta_{\rm m})$ est un fibré affine). Les correspondances (ii) et (iii) sont définies par les équations

(4)
$$\sigma_{\mathbf{m}}(\mathbf{y}) = \chi_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}\alpha(\mathbf{x})), \quad \mathbf{y} = \eta(\mathbf{x}),$$

(5)
$$\langle v, \sigma_m(p) \rangle = \langle w, k - m\alpha(x) \rangle,$$

où k p, $x = \pi_M(k)$, $w \in T_x M$, $v = T\eta(w)$. L'existence de sections globale différentiables du fibré π_m résulte du théorème d'existence de connexions sur un fibré principal.

On peut finalement donner la définition de $\Sigma_{\rm m}$: c'est l'ensemble des sections (locales) de $\pi_{\rm m}$ associées aux connexions plates correspondantes aux trivialisations (locales) de η . On démontre alors le théorème suivant: (a) <u>le triplet</u> $(\pi_{\rm m}, \delta_{\rm m}, \Sigma_{\rm m})$ <u>est un fibré affine canonique</u>; (b) <u>la forme symplectique</u>

(6)
$$\omega_{\rm m} = \widetilde{\sigma}_{\rm m} \star (d\theta_{\rm N} + m \pi_{\rm N}^* B)$$

(rappelons que $\pi_N: T \star N \to N$ est la fibration cotangente et θ_N est la 1-forme de Liouville sur $T \star N$).

Pour ce qui concerne la classe de cohomologie du fibré affine canonique ainsi construit, on démontre qu'elle est m[B], où [B] est la classe des courbures. Comme la différence de deux courbures est une 2-forme exacte et un fibré principal de groupe R (ou \mathbb{R}^n) admet des connections plates (puisqu'il admet des trivialisations), on a [B] = 0: la classe de cohomologie associée à $(\pi_m, \delta_m, \Sigma_m)$ est donc triviale.

Considérons enfin un automorphisme (ψ,ϕ) du fibré principal $\eta:M\to N$. L'automorphisme φ est tel que

(7)
$$\zeta_{+} \cdot \varphi = \varphi \cdot \zeta_{+}$$
.

Cette condition est équivalente à la "conservation de la masse", c'est-à-dire à la conservation de chaque sous-variété $K_{\overline{m}}$ par le relèvement canonique $\hat{\phi}$ de ϕ :

$$\hat{\phi}(K_m) = K_m$$
.

Par conséquent, $\hat{\phi}$ induits un automorphisme ϕ_m de l'espace P_m des

caractéristiques de K_m . On démontre que (ψ, ϕ_m) <u>est un automorphisme canonique de</u> $(\pi_m, \delta_m, \Sigma_m)$.

On peut "transférer" l'automorphisme (ψ, ϕ_m) sur le fibré cotangent de N à l'aide d'un isomorphisme $\overset{\sim}{\sigma_m}$ associé à une connection α . Cela veut dire considérer l'automorphisme de T*N

$$\phi_{\mathbf{m}}^{\alpha} = \widetilde{\sigma}_{\mathbf{m}} \cdot \phi_{\mathbf{m}} \cdot \widetilde{\sigma}_{\mathbf{m}}^{-1}.$$

Puisque ϕ_m^{α} est la composition de trois symplectomorphismes, c'est un automorphisme symplectique par rapport à la forme symplectique

$$\omega_{m}^{\alpha} = d\theta_{N} + m \pi_{N} + B.$$

On démontre alors que: (i) <u>il existe une l-forme</u> y <u>sur N telle que</u>

(8)
$$\eta \star \gamma = \phi \star^{-1} \alpha - \alpha;$$

(ii) <u>le symplectomorphisme</u> ϕ_m^{α} <u>est la composition</u>

(9)
$$\phi_{\mathbf{m}}^{\alpha} = \hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{m}} \cdot \hat{\boldsymbol{\psi}}.$$

 $\frac{du \ rel \`{e}vement}{\gamma_m : T + N \ \to \ T + N} \ \frac{defini}{defini} \ \frac{de}{defini} \ \frac{de}{$

(10)
$$\gamma_{m}(h) = h + m \gamma(\pi_{N}(h)).$$

En particulier, si τ est une trivialisation globale et α = $d\tau$, il existe une fonction $U:N\to R$ telle que

(11)
$$U \cdot \eta = \tau \cdot \phi^{-1} - \tau,$$

et $\gamma = dU$.

On voit donc que l'automorphisme (ψ, ϕ_m^α) diffère de l'automorphisme canonique $(\psi, \hat{\psi})$ de T^*N par une translation sur chaque fibre, qui depends de γ (c'est-à-dire de la connection α), proportionnelle à la "masse" m. La transformation $\tilde{\gamma}_m$ est de "jauge" (i.e. symplectique) si m = 0 ou bien si la courbure B est ψ -invariante (nulle en particulier).

* * *

Si l'on veut adapter les résultats précédents au modèle de la mécanique newtonienne proposé au §1, on remarquera que tout repère \bar{X} définit une connexion plate α , caractérisée par la distribution des vecteurs orthogonaux à \bar{X} . A toute transformation ϕ de M conservant la métrique et le champ Z, correspond une transformation symplectique ϕ_m^α de T^*M . L'usage des formules générales (9), (10), (11) nous permet d'expliciter directement cette transformation: on trouvera alors les relations bien connues entre les impulsions et les energies relatives a deux repères (le repère \bar{X} et le repère transformé par ϕ).

5. Fibrés affines canoniques sur un groupe de Lie.

Considérons un fibré affine canonique $(\pi:A\to S,\delta,\Sigma)$ où S est un groupe de Lie. On notera λ et ρ les actions à gauche et à droite de S sur lui même:

$$\lambda_{\mathbf{S}}(\mathbf{s}') = \mathbf{s}\mathbf{s}' \quad , \quad \rho_{\mathbf{S}}(\mathbf{s}') = \mathbf{s}'\mathbf{s}^{-1}.$$

Les algèbres de Lie des générateurs de λ et de ρ seront notées respectivement $\iota_{\rm S}$ et $r_{\rm S}$.

Considérons un groupe de transformations affines canoniques $\bar{\mathbb{R}}=\{(\rho_S,\bar{\rho}_S);\ s\in S\}$, relèvement du groupe $\mathbb{R}=\{\rho_S;\ s\in S\}$, et supposons que π admet des sections globales invariantes par $\bar{\mathbb{R}}$. Ces sections donnent lieu (voir les formules (3) et (4) du §2) à une classe de cohomologie [0] de 2-formes 0 sur S invariantes à droite, c'est-à-dire à une classe de cohomologie de degré 2 de l'algèbre de Lie l_S à valeurs dans R. Soit $\Sigma(\bar{\mathbb{R}})$ l'espace des sections de π $\bar{\mathbb{R}}$ -invariantes. L'isomorphisme $\sigma: A \to T*S$ correspondant à une section $\sigma \in \Sigma(\bar{\mathbb{R}})$ transforme $\Sigma(\bar{\mathbb{R}})$ dans l'espace l_S* des l-formes invariantes à droite sur S.

Sans entrer dans les détails concernant la structure envisagée (l'étude preliminaire du cas d'un fibré cotangent d'un groupe de Lie muni d'une 2-forme fermée est en cours de publication [7]), considérons par exemple une extension centrale d'un groupe de Lie G par R, c'est-à-dire une suite exacte d'homomorphismes $1 \to R \to F \to G \to 1$. On considère $\xi \colon F \to G$ comme fibré principal de groupe structural R. On peut donc appliquer les résultats du paragraphe précédent. Pour chaque $m \in R$ on a un

fibré affine canonique $\pi_m': A_m \to G$ modelé sur T*G. Une translation à droite ρ_f (resp. à gauche λ_f) de F ($f \in F$), avec le processus illustré dans la dernière partie du §4, se réduit à un automorphisme canonique $(\rho_g, \bar{\rho}_g)$ (resp. $(\lambda_g, \bar{\lambda}_g)$) de A_m , où $g = \xi(f)$. La classe de cohomologie de A_m associée au groupe des automorphismes canoniques ainsi déterminés est la classe m[B] où B c'est la courbure d'une connexion invariante à droite (resp. à gauche) de ξ . On doit remarquer à ce propos que, si X est le champ fondamental du fibré principal ξ et si μ est une 1-forme invariante sur F telle que $(X,\mu) = m \neq 0$, alors $\alpha = \frac{\mu}{m}$ est une connexion invariante.

6. Relations "moment" et actions hamiltoniennes.

Les fibrés affines canoniques nous permettent de construire un modèle dynamique homogène pour les actions hamiltoniennes (modèle qui étend la formulation homogène de la mécanique classique, comme action hamiltonienne du groupe R, au cas d'un groupe de Lie quelconque).

Soient (P,ω_P) une variété symplectique connexe, $(\pi:A\to S,\delta,\Sigma)$ un fibré affine canonique sur un groupe de Lie S connexe, ω_A la forme symplectique canonique sur A. On appelle relation moment toute sous variété $J\subset A\times P$ telle que:

- (i) Jest l'image d'une section de la projection $\pi \times id_p$: $A \times P \to S \times P;$
- (ii) J est coisotrope par rapport à la forme symplectique $\omega_{\mathtt{A}} \ni \omega_{\mathtt{P}};$

- (iii) J est complète (voir dans la suite);
- (iv) J est invariante par rapport au groupe des transformations $\bar{R} \times id_p \quad \text{où } \bar{R} \quad \text{est un relèvement canonique du groupe}$ $R = \{\rho_{_{S}}; \ s \in S\} \ \text{des multiplications à droite sur S.}$

On démontre que: J est un système dynamique homogène qui représente une action hamiltonienne de S sur (P, ω_P) dont la classe de cohomologie est celle déterminée par les sections \overline{R} -invariantes de π (voir la première partie du §5).

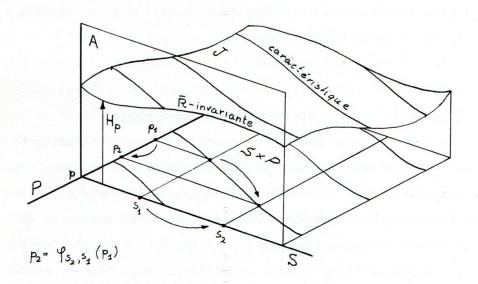


Figure 3

On voit en effet que les caractéristiques de J sont projetées par $A \times P \to S \times P$ sur des sous-variétés de $S \times P$ transversales à la projection $S \times P \to S$ (voir Fig.3). Si ces sous-variétés sont des sections globales (on dit dans ce cas que

J est complète: hypothèse (iii)), alors à tout couple (s_1, s_2) d'éléments de S est associé un difféomorphisme $\phi_{s_2, s_1}: P \to P$. On démontre à l'aide de la theorie des réductions symplectiques que le graphe de ϕ_{s_2, s_1} est une sous-variété lagrangienne; donc ϕ_{s_2, s_1} est un symplectomorphisme. La condition d'invariance ϕ_{s_2, s_1} (iv) implique que le symplectomorphisme ϕ_{s_3, s_0} ne depend pas du choix de $s_0 \in S$. Si l'on pose

$$\phi_s = \phi_{ss_0,s_0}, s \in S,$$

on voit alors que $\phi: S \times P \to P: (s,p) \to \phi_S(p)$ est une action symplectique de S sur (P, ω_p) .

D'après l'hypothèse (i), il existe une application $H{:}S \,\times\, P \,\to\, A \ \text{telle que}$

$$J = \{(a,p) \in A \times P; a = H(s,p), s = \pi(a)\}.$$

Nous appellons H l'hamiltonienne absolue de J (ou de l'action ϕ). Pour chaque p \in P la section

$$H_p:S \rightarrow A:s \rightarrow H(s,p)$$

de π est \bar{R} -invariante (hypothèse (iv)). L'application (notation du §5)

$$j:P \to \Sigma(\bar{R}):p \to H_p$$

est le moment absolu de J (ou de φ).

A toute section invariante $\sigma \in \Sigma(\bar{R})$ sont associés un isomorphisme $\sigma: A \to T + S$ et une 2-forme Θ_{σ} sur S, fermée et invariante à droite, c'est-à-dire un 2-cocycle, telle que

$$\omega_{A} = \tilde{\sigma} \star (d\theta_{S} + \pi_{S} \star \theta_{\sigma}).$$

Nous appelons l'application

$$H_{\sigma} = \sigma \cdot H: S \times P \rightarrow T*S,$$

qui est identifiée avec la fonction

$$H_{\sigma}^{} : TS \times P \rightarrow R : (u,p) \rightarrow \langle u, H_{\sigma}^{}(s,p) \rangle,$$

l'hamiltonienne de J (ou de ϕ) relative à σ . Chaque section H p est transformée par $\overset{\sim}{\sigma}$ dans une l-forme sur S invariante à droite,

$$H_{p,\sigma} = \overset{\sim}{\sigma} \cdot H_{p} : S \rightarrow T \star S.$$

Par conséquent, on a une application

$$j_{\sigma}:P \rightarrow l_{S}^{\star}:P \rightarrow H_{p,\sigma}$$

que nous appelons <u>moment</u> <u>relatif</u> à σ . On remarque enfin que la sous-variété

$$J_{\sigma} = \sigma(J) \subset T \times S \times P$$

est coisotrope par rapport à la forme symplectique

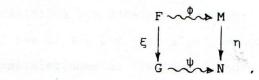
$$(d\theta_S + \pi_S \star \Theta_\sigma) \odot \omega_P.$$

Etant donnée une action symplectique $\phi: S \times P \rightarrow P$ d'un groupe de Lie S sur une variété symplectique (P, ω_p) , on peut construire une relation moment de la manière suivante. On prend la distribution Γ des vecteurs tangents au feuilletage des orbites de l'action composée $\hat{\lambda} \times_S \phi$ sur T*S x P $(\hat{\lambda}$ est le relèvement de l'action à gauche λ sur S). On considère la distribution $\Xi = \Gamma^{\S}$, où \S est l'opérateur polaire symplectique par rapport à la forme symplectique naturelle $d\theta_{S} \ominus \omega_{p}$. On démontre que E est complètement intégrable et complémentaire à la distribution verticale associée à la projection $T*S \times P \rightarrow S \times P$. Si chaque feuille de E est l'image d'une section de cette projection on dit que l'action φ est <u>hamiltonienne</u>. Dans ce cas toute variété intégrale connexe maximale J_{Ω} de Ξ est une relation moment qui représente l'action φ. Comme fibré affine canonique sur S on prend le fibré cotangent T*S muni d'une 2-forme fermée Θ_{O} (voir l'exemple (II) au §2), invariante à droite, déterminée d'une facon unique à partir de Jo.

7. Réductions par rapport à la "masse".

Soit $\eta:M\to N$ un fibré principal de groupe R (notations du

§3) et $\phi: F \times M \to M$ une action d'un groupe de Lie F sur M. Supposons qu'il existe un monomorphisme de groupes $\epsilon: R \to F$ tel que l'action du sous-groupe $\epsilon(R)$ sur M coincide avec l'action ζ de R sur M. On a par conséquent une action ψ du groupe quotient $G = F/\epsilon(R)$ sur N. Noton $\xi: F \to G$ la projection canonique. Comme on a fait au §5, on interprète ξ comme fibré principal. On remarquera que le cadre ici envisagé, qui peut être résumé dans le diagramme suivant



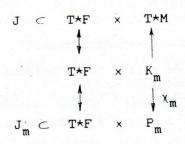
est l'abstrait du cadre de la mécanique newtonienne presenté au §1.

L'action $\hat{\phi}: F \times T \star M \to T \star M$, relèvement canonique de ϕ , est représentée d'une manière canonique par une relation moment $J \subset T \star F \times T \star M$, où comme fibré affine canonique on prend tout simplement le fibré cotangent $T \star F$. La classe de cohomologie associée à cette action est triviale. C'est la classe correspondante au groupe des transformations $\hat{R} = \{(\rho_f, \hat{\rho}_f); f \in F\}$, relèvement canonique de l'action à droite sur F.

Etant fixé un nombre réel m, on opère sur la relation moment J avec deux réductions. On obtiendra une relation moment, notée J_m , qui représente une action hamiltonienne du groupe G sur le fibré affine canonique P_m .

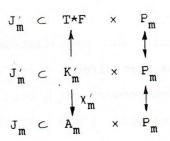
(i) <u>Réduction</u> <u>à</u> <u>droite</u>: par rapport à la sous-variété

coisotrope $T*F \times K_m \subset T*F \times P$ (notation du §4).



On trouve que la sous-variété réduite $J_m' = (id_{T*F} \times \chi_m)(J)$ (rappelons que $\chi_m: K_m \to P_m$ est la projection canonique de K_m sur l'espace P_m de ses caractéristiques) est une relation moment. D'après ce qu'on a vu aux paragraphes précédents, l'action représentée par J_m' est une action hamiltonienne àffine sur le fibré affine canonique P_m , dont la partie linéaire est le relèvement canonique $\hat{\psi}$ de l'action $\hat{\psi}$. Cette action est fortement hamiltonienne (c'est-à-dire la classe de cohomologie associée est nulle), comme l'action $\hat{\phi}$, puisqu'on a rien changé du côté de T*F (à gauche).

(ii) Réduction à gauche: par rapport à la sous-variété coisotrope $K_m' \times P_m \subset T^*F \times P_m$, où K_m' est la contrainte de masse m sur T^*F (définition analogue à (1), §1).



On note A_m la variété des caractéristiques de K_m' et $\chi_m':K_m' \to A_m$ la projection canonique. A_m est un fibré affine canonique sur le groupe G. On démontre que la sous-variété réduite $J_m = (\chi_m' \times \mathrm{id}_{P_m})(J_m')$ est une relation moment. L'action représentée par J_m est donc une action hamiltonienne affine de G sur P_m . La classe de cohomologie de cette action est (comme on a vu au §5) m[B], étant [B] la classe de cohomologie des courbures invariantes à droite du fibré $\xi:F \to G$.

Dans le cas du modèle de la dynamique newtonienne, on retrouve ainsi l'interprétation de la masse d'une particule (les considérations précédentes s'appliquent aussi à un système de particules) comme classe de cohomologie symplectique du groupe de Galilée, comme nous l'a montré, d'une manière directe, J.M. Souriau [8].

* * *

Les arguments exposés ici sont actuellement des "travaux en cours" à l'Institut de Physique Matématique de Turin, dans le cadre d'un programme de recherche sur les fondaments géométriques de la mécanique, conduit avec W.M.Tulczyjew et avec le soutien du Consiglio Nazionale delle Ricerche. Les résultats enoncés sont susceptibles de variations et améliorations. Ils seront probablement présentés pour publication à l'Académie des Sciences de Turin.

Tous mes remerciements aux organisateurs, N.Desolneux-Moulis et P.Dazord, et aux participants à ce Colloque. Je suis reconnaissant à M. A. Lichnerowicz qui a bien voulu prêter son attention, en plusieurs occasions, a mon travail de recherche.

Références

- C.Duval, G.Burdet, H.P.Künzle, M.Perrin, Phys.Rev.D,1985, 31, p.1841.
- 2. W.M.Tulczyjew, <u>Mécanique ondulatoire dans l'espace-temps</u> newtonien, C.R. Acad. Sci. Paris, 1985, <u>301</u>, p.419.
- 3. W.M.Tulczyjew, <u>An intrinsic formulation of non-relativistic</u>
 analytical mechanics and wave mechanics, Journal of Geometry
 and Physics, (submitted).
- M.R.Menzio, W.M.Tulczyjew, <u>Infinitesimal symplectic relations and generalized Hamiltonian dynamics</u>, Ann. Inst. H. Poincaré, 1978, 28, p.349.
- 5. S.Benenti, W.M.Tulczyjew, The geometrical meaning and globalization of the Hamilton-Jacobi method, in Lecture Notes in
 Math., Springer, (1980), 836, p.9.

 Momentum Relations for Hamiltonian Actions, in "Géomètrie
 Symplectique et Mécanique", Seminaire Sud-Rhodanien de
 Géométrie, Balaruc 14-15 Mai 1984, J.P. Dufour Ed., Hermann,
 Paris (1985), p.12.
- R.Abraham, J.E.Marsden, <u>Foundations of Mechanics</u>, Benjamin-Cummings, 1978.
- 7. S.Benenti, W.M.Tulczyjew, <u>Cocycles of the coadjoint representation of a Lie group interpreted as differential forms</u>, Acc. Sci. Torino, (in print).
- 8. J.M.Souriau, <u>Structures des systèmes dynamiques</u>, Dunod, Paris, 1970.