GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Sur un feuilletage coisotrope du fibré cotangent d'un groupe de Lie.* Note de **Sergio Benenti** et **Wlodzimierz M. Tulczyjew,** présentée par André Lichnerowicz.

On construit un feuilletage généralisé coisotrope du fibré cotangent d'un groupe de Lie, dont les feuilles correspondent aux orbites de la représentation coadjointe.

DIFFERENTIAL GEOMETRY. — On a Coisotropic Foliation of the Cotangent Bundle of a Lie Group.

A coisotropic generalized foliation of the cotangent bundle of a Lie group is constructed. Leaves of this foliation correspond to the orbits of the coadjoint representation.

1. Le relèvement canonique d'un difféomorphisme $\psi: M \to M$ est le difféomorphisme $\hat{\psi}: T^*(M) \to T^*(M)$ défini par l'équation :

$$\langle v, \hat{\psi}(p) \rangle = \langle T(\psi^{-1})(v), p \rangle, \qquad p \in T^*(M), \quad v \in T_{\psi(p)}(M). \tag{1}$$

L'identité

$$(\psi^* \mu)(m) = \hat{\psi}^{-1}(\mu(\psi(m))) \tag{2}$$

est valable pour chaque $m \in M$ et chaque 1-forme $\mu: M \to T^*(M)$. Le relèvement canonique d'un champ de vecteurs (différentiable) K sur la variété M est le champ de vecteurs $\hat{K}$ sur $T^*(M)$ défini par l'équation $i_K d\theta_M = -dH_K$ où $H_K: T^*(M) \to \mathbf{R}: p \mapsto \langle K, p \rangle$ et θ_M est la 1-forme de Liouville sur le fibré cotangent $T^*(M)$. On a les identités bien connues :

$$[\hat{K}_1, \hat{K}_2] = [K_1, K_2]\hat{}, \qquad \langle \hat{K}_1 \wedge \hat{K}_2, d\theta_M \rangle = \{ H_{K_1}, H_{K_2} \} = H_{[K_1, K_2]}, \tag{3}$$

où $\{ \ , \ \}$ est le crochet de Poisson sur $T^*(M)$ associé à la forme symplectique $d\theta_M$. On sait que le flot (local ou global) de $\hat{K}$ est le relèvement canonique du flot de K. Si $\varphi: G \times M \to M: (g, m) \mapsto (g, m)$ est une action (différentiable) d'un groupe de Lie G sur la variété M on pose $\varphi_g: M \to M: m \mapsto \varphi(g, m)$, $\varphi^m: G \to M: g \mapsto \varphi(g, m)$. Les générateurs infinitésimaux de φ sont les champs de vecteurs X sur M définis par $X(m) = T(\varphi^m)(v)$, où v est un élément fixé de $T_e(G)$, e étant l'identité de G. Le relèvement canonique de l'action φ est l'action $\hat{\varphi}: G \times T^*(M) \to T^*(M)$ de G sur $T^*(M)$ définie par $\hat{\varphi}_g = (\varphi_g)\hat{}$. Les générateurs de $\hat{\varphi}$ sont les relèvements canoniques des générateurs de φ.

2. Soit G un groupe de Lie connexe de dimension finie. Considérons les trois actions gauches suivantes sur G : l'*action à gauche* $\lambda: G \times G \to G: (g, g') \mapsto gg'$, l'*action à droite* $\rho: G \times G \to G: (g, g') \mapsto g' g^{-1}$, l'*action composée :*

$$\chi: (G \times G) \times G \to G: ((g_1, g_2), g) \mapsto g_1 g g_2^{-1}$$

du produit direct $G \times G$ sur G. Notons l (resp. r) l'algèbre de Lie des générateurs de λ (resp. ρ) : $X \in l \Leftrightarrow T(\rho_g) \circ X = X \circ \rho_g$, $\forall g \in G$; $Y \in r \Leftrightarrow T(\lambda_g) \circ Y = Y \circ \lambda_g$, $\forall g \in G$. L'espace dual l^* de l (resp. r^* de r) est l'espace des 1-formes différentiables $\mu: G \to T^*(G)$ telles que $\rho_g^* \mu = \mu$ (resp. $\lambda_g^* \mu = \mu$), $\forall g \in G$; l^* et r^* sont donc les espaces des 1-formes *invariantes à droite* et *invariantes à gauche* respectivement. Avec (2) on voit que : $\mu \in l^* \Leftrightarrow \hat{\rho}_g \circ \mu = \mu \circ \rho_g$, $\forall g \in G$; $\nu \in r^* \Leftrightarrow \hat{\lambda}_g \circ \nu = \nu \circ \lambda_g$, $\forall g \in G$. Les images $\mu(G)$ des formes $\mu \in l^*$ (resp. $\nu \in r^*$) sont les orbites du relèvement $\hat{\rho}$ (resp. $\hat{\lambda}$) engendrées par les relèvements $\hat{X}$ avec $X \in r$ (resp. $X \in l$); ces images forment donc un feuilletage, que nous appelons le *feuilletage droit* (resp. le *feuilletage gauche*) sur $T^*(G)$. Nous appelons les projections $J_r: T^*(G) \to l^*$, $J_l: T^*(G) \to r^*$ définies par ces deux feuilletages, le *moment droit* et le *moment gauche* respectivement.

0249-6321/85/3000119 $ 2.00

On considère sur $T^*(G)$ la forme symplectique $d\theta_G$, où θ_G est la 1-forme de Liouville sur $T^*(G)$, et la structure de Poisson correspondante. Puisque tout relèvement canonique des transformations de G préserve cette structure on voit que si f_1 et f_2 sont deux fonctions (réelles, différentiables) sur $T^*(G)$ constantes sur le feuilletage gauche (ou droit), alors $\{ f_1, f_2 \}$ est constante sur le même feuilletage. Par conséquent on a une structure naturelle de Poisson, induite par la structure symplectique de $T^*(G)$, sur les espaces l^* et r^*. Les moments correspondants sont évidemment des morphismes de Poisson.

Nous avons deux représentations de G sur l^* et r^* (*représentations coadjointes*) : $G \times l^* \to l^* : (g, \mu) \mapsto \lambda^*_{g^{-1}} \mu$; $G \times r^* \to r^* : (g, \nu) \mapsto \rho^*_{g^{-1}} \nu$. On note : $o(\mu)$ et $o(\nu)$ les orbites de $\mu \in l^*$ et $\nu \in r^*$ dans ces représentations; $G_\mu = \{ g \in G;\ \lambda^*_g \mu = \mu \}$ et $G_\nu = \{ g \in G;\ \rho^*_g \nu = \nu \}$ les *groupes d'isotropie* de μ et ν respectivement. On voit que :

(4) $$G_\mu = \{ g \in G; \hat{\lambda}_g \circ \mu = \mu \circ \lambda_g \}, \qquad G_\nu = \{ g \in G; \hat{\rho}_g \circ \nu = \nu \circ \rho_g \}.$$

3. On a les propriétés suivantes : (*a*) *Chaque orbite* $\mathcal{O}(p_0) = \hat{\chi}(G \times G, p_0)$ $[p_0 \in T^*(G)]$ *du relèvements de l'action composée* χ *est une sous-variété coisitrope de* $T^*(G)$ *constituée par les images des formes de l'orbite* $o(\mu)$ *de la forme* $\mu \in l^*$ *telle que* $p_0 \in \mu(G)$, *ou bien de l'orbite* $o(\nu)$ *de la forme* $\nu \in r^*$ *telle que* $p_0 \in \nu(G)$. (*b*) *La caractéristique* $\mathcal{I}(p_0)$ *par* p_0 *de la variété coisotrope* $\mathcal{O}(p_0)$ *est la composante connexe de* $\mu(G) \cap \nu(G)$ *et*

(5) $$\mu(G) \cap \nu(G) = \hat{\lambda}(G_\nu, p_0) = \hat{\rho}(G_\mu, p_0).$$

Par conséquent,

(6) $$\pi_G(\mu(G) \cap \nu(G) = g_0 G_\mu = G_\nu g_0,$$

où $\pi_G : T^*(G) \to G$ *est la projection cotangente et* $g_0 = \pi_G(p_0)$. (*c*) *La variété symplectique réduite de* $T^*(G)$ *par rapport à la sous-variété coisotrope* $\mathcal{O}(p_0)$ [*c'est-à-dire le quotient caractéristique de* $\mathcal{O}(p_0)$] *est le produit des orbites* $o(\mu) \times o(\nu) \subset l^* \times r^*$ (répété plusieurs fois si G_μ ou G_ν n'est pas connexe) *où la structure de Poisson régulière réduite coïncide avec le produit des restrictions à chaque orbite des structures de Poisson naturelles sur* l^* *et* r^*.

Considérons sur $T^*(G)$ les distributions [sous-fibrés de $T(T^*(G))$] $L = \bigcup_{\substack{X \in l \\ p \in T^*(G)}} \hat{X}(p)$ et $R = \bigcup_{\substack{Y \in r \\ p \in T^*(G)}} \hat{Y}(p)$, qui engendrent le feuilletage gauche et le feuilletage droit respectivement. Les implications :

$$X \in l,\ Y \in r \quad \Rightarrow \quad [X, Y] = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{[X, Y]} = \langle X \wedge Y, d\theta_G \rangle = 0$$

montrent que $L^\S = R$ ou bien que $R^\S = L$ (on note § l'opérateur orthogonal symplectique). Introduisons les distributions (au sens généralisé [1]) $\Delta = R + L$ et $\Gamma = R \cap L$. Puisque $\Delta^\S = (R + L)^\S = R^\S \cap L \cap R = \Gamma \subset \Delta$, la distribution Δ est coisotrope et Γ est sa distribution caractéristique. Puisque l'action $\hat{\chi}$ est engendrée par les champs de la forme $\hat{X} + \hat{Y}$ avec $X \in l$ et $Y \in r$, les orbites de $\hat{\chi}$ sont les variétés intégrales de Δ, donc la première partie de (*a*) est démontrée. La deuxième partie est une conséquence de la propriété (2) et du fait que $\hat{\chi}_{(g_1, g_2)} = \hat{\lambda}_{g_1} \circ \hat{\rho}_{g_2}$. La définition (4) nous montre que le sous-groupe $G_\mu (\mu \in l^*)$ est formé par les éléments $g \in G$ tels que la sous-variété $\mu(G)$ est invariante dans $\hat{\lambda}_g$. Donc l'espace des générateurs de l'action $\hat{\lambda}(G_\mu, .)$ sur $T^*(G)$ est donné par les relèvements $\hat{X}$, $X \in l$, tels que $\hat{X}$ soit tangent à $\mu(G)$. D'autre part, en chaque point $p \in \mu(G)$, ces vecteurs engendrent l'espace $\Gamma_p = \Gamma \cap T_p(T^*(G))$. En effet, pour tout $X' \in l$, $H_{X'}$ est constante sur $\mu(G)$; comme X est tangent à $\mu(G)$, on a [voir $(3)_2$] : $\langle \hat{X} \wedge \hat{X}', d\theta_G \rangle | \mu(G) = \langle \hat{X}, dH_{X'} \rangle | \mu(G) = 0$. Donc $\hat{X}(p) \in L_p$, pour tout point $p \in \mu(G)$, c'est-à-dire $\hat{X}(p) \in \Gamma_p$. Puisque ce raisonnement est réversible, on voit que l'espace tangent à l'orbite $\hat{\lambda}(G_\mu, p_0)$ au point p coïncide avec Γ_p. Donc chaque composante connexe de cette orbite est une caractéristique. Des considérations précédentes on tire l'inclusion (♯) $\hat{\lambda}(G_\mu, p_0) \subset \mu(G) \cap \nu(G)$. Inversement, si $\bar{p} = \mu(\bar{g}) = \nu(\bar{g})$ et $p_0 = \mu(g_0) = \nu(g_0)$, l'égalité $\hat{\lambda}_g(\nu(g_0)) = \nu(\bar{g})$ avec $\bar{g} = g g_0$ [$\nu(G)$ est invariante dans $\hat{\lambda}$] donne $\hat{\lambda}_g(\mu(g_0)) = \mu(\bar{g})$; donc [voir (2)] : $((\lambda_g^{-1})^* \mu)(\bar{g}) = \mu(\bar{g})$. Alors $\mu = (\lambda_g^{-1})^* \mu$ (puisque ces deux formes sont invariantes à gauche avec même valeur en un point) et $g \in G_\mu$. L'inclusion inverse de (♯) est donc démontrée avec la proposition (*b*). Rappelons finalement que la structure symplectique de la variété des caractéristiques d'une sous-variété coisotrope d'une variété symplectique est définie par la restriction de la structure de Poisson sur les fonctions constantes sur les caractéristiques. On voit ainsi que (*c*) est une conséquence directe de (*a*) et (*b*).

La submersion associée à la réduction symplectique définie par l'orbite $\mathcal{O}(p_0)$ *est la restriction* $J \,|\, \mathcal{O}(p_0)$ à cette orbite du *moment composé* :

$$J : T^*(G) \to l^* \times r^* : p \mapsto (J_r(p), J_l(p)).$$

Remarquons que si $\{f, h\} = 0$ pour toute fonction h constante sur le feuilletage gauche (resp. droit) alors f est constante sur le feuilletage droit (resp. gauche). En effet les champs hamiltonien engendrés par les fonctions h donnent lieu à la distribution droite R (resp. gauche L).

Si l'on applique cette propriété à une fonction f constante sur le feuilletage gauche (resp. droit) [au moins sur la partie du feuilletage contenu dans l'orbite $\mathcal{O}(p_0)$] on constate que la structure symplectique sur $o(\mu) \times o(\nu)$ considérée dans (*c*) se restreint sur chaque composante $o(\mu)$ et $o(\nu)$ en une structure symplectique, qui est d'ailleurs la structure symplectique bien connue des orbites des représentations coadjointes (voir [2] et les travaux cités).

4. On a vu que le fibré cotangent d'un groupe de Lie G admet une partition en variétés coisotropes : les orbites du relèvement de l'action composée de $G \times G$ sur G, en correspondence biunivoque avec les orbites d'une représentation coadjointe. Notons C_μ l'orbite coisotrope $\mathcal{O}(p_0)$ si $p_0 \in \mu(G)$. On a [après (*a*), (*b*), (*c*)] : $C_\mu = C_{\mu'} \Leftrightarrow \mu' \in o(\mu)$; $C_\mu = C_\nu$, $\mu \in l^*$, $\nu \in r^* \Leftrightarrow \mu(G) \cap \nu(G) \neq \varnothing$.

Comme toute sous-variété coisotrope, chaque orbite C_μ donne un système dynamique homogène [3], dont la relation infinitésimale symplectique est la sous-variété lagrangienne $\dot{D}_\mu = \Delta \,|\, C_\mu \subset T\,T^*(G))$. Par l'isomorphisme $T(T^*(G)) \to T^*(T(G))$ [4] la dynamique $\dot{D}_\mu$ est engendrée (au moins localement) par une *lagrangienne* L_μ, qui est en général une famille de Morse sur $T(G)$ [5].

La relation intégrale D_μ correspondante à $\dot{D}_\mu$ et définie par $D_\mu = \{(p, p') \in T^*(G) \times T^*(G);\ p$ et p' sont sur la même caractéristique de $C_\mu\}$ est une relation symplectique sur $T^*(G)$ engendrée par une *fonction principale d'Hamilton* W_μ qui en général est une famille de Morse sur $G \times G$.

La relation infinitésimale symplectique $\dot{D}_\mu$ est invariante par le *relèvement tangent* $\hat{\chi}'$ de l'action $\hat{\chi}$, défini par : $\hat{\chi}'_{(g_1, g_2)} = T\,\hat{\chi}_{(g_1, g_2)}$. La relation intégrale D_μ est invariante par l'action produit $\chi \times_{G \times G} \chi : ((g_1, g_2), (g, g')) \mapsto (\chi_{(g_1, g_2)}(g), \chi_{(g_1, g_2)}(g'))$.

5. *Exemple.* — Soit $M(2, \mathbf{C})$ l'espace des matrices complexes 2×2. Soit $G = SU(2, \mathbf{C}) = \{g \in M(2, \mathbf{C});\ \bar{g}^t g = e,\ \det(g) = 1\}$ ($\bar{g}$ est la conjuguée, g^t la transposée de g, e la matrice identité). Un élément de $T_g G$ est donné par une couple $(g, \dot{g})$ où $\dot{g} \in M(2, \mathbf{C})$ est telle que $v = \dot{g} g^{-1} \in \mathfrak{g} = \{v \in M(2, \mathbf{C});\ \bar{v}^t = -v,\ \operatorname{tr}(v) = 0\}$. La forme quadratique de Killing k est définie par $k(\dot{g}) = -(1/2) \operatorname{tr}(v^2) = \det(v) = \det(\dot{g})$; elle est positive. Avec cette forme on peut identifier l'espace dual $\mathfrak{g}^*$ avec $\mathfrak{g}$ [si $v \in \mathfrak{g}$ et $a \in \mathfrak{g}^*$ on pose $\langle v, a \rangle = -(1/2) \operatorname{tr}(va)$], donc $T^*(G)$ avec $T(G)$. On a les isomorphismes suivants de $\mathfrak{g}$

dans l, r, l^* et r^* respectivement :

$$v \in \mathfrak{g} \mapsto X \in l : X(g) = (g, vg), \qquad v \in \mathfrak{g} \mapsto Y \in r : Y(g) = (g, gv),$$
$$a \in \mathfrak{g} \mapsto \mu \in l^* : \mu(g) = (g, g^{-1} a), \qquad a \in \mathfrak{g} \mapsto \nu \in r^* : \nu(g) = (g, ag^{-1}).$$

Par conséquent, pour les groupes d'isotropie et pour les orbites coadjointes on pose : $G_\mu = G_\nu = G_a = \{ g \in G;\ ga = ag \}$, $o(a) = \{ a' \in \mathfrak{g}^*;\ \exists g \in G : a' = gag^{-1} \}$. Les orbites coisotropes dans $T^*(G)$ sont les variétés $C_m = \{ (g, p) \in T^*(G);\ \|p\| = m \}$ avec $m \in \mathbf{R}$, $m \geqq 0$, et $\|p\| = \sqrt{k(p)}$. En particulier C_0 est la section nulle de $T^*(G)$. Pour $m > 0$ les caractéristiques de C_m *se projettent sur les géodésiques de* G *pour la métrique de Killing*. La relation symplectique infinitésimale $\dot{D}_m$ qui correspond à C_m est engendrée par la famille de Morse :

$$H_m : \quad T^*(G) \times \mathbf{R} \to \mathbf{R} : (g, p, \lambda) \mapsto \lambda(\|p\| - m)$$

définie sur les fibres de la projection canonique $T^*(G) \times \mathbf{R} \to T^*(G)$. La lagrangienne correspondante est la famille de Morse :

$$L_m : \quad T(G) \times_G T^*(G) \times \mathbf{R} : (g, \dot{g}, p, \lambda) \mapsto \mathrm{tr}(\dot{g}p) - \lambda(\|p\| - m)$$

définie sur les fibres de la projection canonique $T^*(G) \times_G T^*(G) \times \mathbf{R} \to T(G)$. On peut se borner au cas $\lambda > 0$; cela correspond à choisir une orientation des caractéristiques. La famille de Morse L_m se réduit à une fonction sur $T(G)$ privé de la section nulle,

$$L_m^+ : \quad T^0(G) \to \mathbf{R} : (g, \dot{g}) \mapsto m \|\dot{g}\|,$$

qui engendre la partie ouverte $\dot{D}_m^+$ de $\dot{D}_m$ des vecteurs non nuls tangents aux caractéristiques orientées. La relation intégrale correspondante est une partie ouverte D_m^+ de la relation intégrale D_m de $\dot{D}_m$:

$$D_m^+ = \{ (p_0, p_1) \in D_m;\ \exists \text{ une courbe integrale } j : \mathbf{R} \to T^*(G) \text{ de } D_m^+ \text{ telle que } j(0) = p_0 \text{ et } j(1) = p_1 \}.$$

L'ouvert contenu dans D_m^+ donné par les couples (p_0, p_1) telles que la longueur de l'arc de la caractéristique orientée de p_0 à p_1 est contenue dans l'intervalle ouvert $(0, \pi)$, est engendré par la fonction principale d'Hamilton :

$$W_m^+ : \quad \{ (g_0, g_1) \in G \times G;\ g_1 g_0^{-1} \neq \pm e \} \to \mathbf{R} : (g_0, g_1) \mapsto m \arccos\left(\frac{1}{2} \mathrm{tr}(g_1 g_0^{-1}) \right).$$

On remarque que la fonction L_m est invariante par rapport à l'action χ' tangente de χ ($\chi'_{(g_1, g_2)} = T\chi_{(g_1, g_2)}$) et que W_m^+ est invariante par l'action produit $\chi \times_{G \times G} \chi$, conformément à l'invariance de $\dot{D}_m$ et D_m.

Recherche menée avec le soutien du C.N.R., Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica.

Remise le 5 novembre 1984, acceptée le 19 novembre 1984.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] H. SUSSMANN, Orbits of Families of Vector Fields and Integrability of Distributions, *Bull. Am. Math. Soc.*, 180, 1973, p. 171-188.

[2] C.-M. MARLE, Moment de l'action hamiltonienne d'un groupe de Lie; quelques propriétés, *Proc. « Geometry and Physics »*, Florence, 1982, Pitagora Editrice Bologna, 117-133.

[3] S. BENENTI et W. M. TULCZYJEW, The Geometrical Meaning and Globalization of the Hamilton-Jacobi Method, dans *Springer Lecture Notes in Math.*, 836, 1980, p. 484-497.

[4] W. M. TULCZYJEW, Les sous-variétés lagrangiennes et la dynamique lagrangienne, *Comptes rendus*, 283, série A, 1976, p. 675-678.

[5] A. WEINSTEIN, Lecture on Symplectic Manifolds, *C.B.M.S. Conf. Series A.M.S.*, 29, 1977.

Istituto di Fisica Matematica « J.-L. Lagrange »,
Università di Torino, Torino, Italia.