PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur le théorème de Jacobi en mécanique analytique.*

Note (*) de **Sergio Benenti** et **Wlodzimierz M. Tulczyjew**, présentée par André Lichnerowicz.

On donne une formulation générale du théorème de Jacobi pour une dynamique définie par une variété coisotrope, en utilisant la notion de famille de Morse et certains résultats de [4] sur les réductions symplectiques.

MATHEMATICAL PHYSICS. — The Jacobi Theorem in Analytical Mechanics.

We give a general formulation of the Jacobi theorem for dynamics defined by a coisotropic manifold. Morse families and some results of [4] *concerning symplectic reductions are used.*

Si Q est une variété différentiable [1] on note $\pi_Q : T^*Q \to Q$ la projection cotangente, $\omega_Q = d\theta_Q$ la forme symplectique canonique sur T^*Q, où θ_Q est la 1-forme de Liouville. Une *famille de Morse sur* Q est une fonction $S : U \times \Lambda \to \mathbb{R}$ (U est un ouvert de Q, Λ une variété) telle que la matrice :

$$\left\| \frac{\partial^2 S}{\partial\lambda_A\,\partial\lambda_B}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial\lambda_A\,\partial q^i} \right\|, \qquad i=1, \ldots, n; \qquad A, B=1, \ldots, r, \tag{1}$$

a rang maximal $(=r)$ pour tout choix de coordonnées (q^i) sur U et (λ_A) sur Λ. Toute sous-variété Lagrangienne L de la variété symplectique canonique (T^*Q, ω_Q) est localement engendrée par une famille de Morse sur Q par les équations :

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}, \qquad 0 = \frac{\partial S}{\partial \lambda_A}, \tag{2}$$

où (q^i, p_i) sont les coordonnées canoniques sur T^*Q [2]. Une variété Lagrangienne L est dite *régulière* au point $p \in L$ si la restriction de π_Q à L a rang maximal au point p. Dans ce cas un voisinage de p est représentable par des équations du type (2) où $S : U \to \mathbb{R}$, U étant un voisinage de $\pi_Q(p)$. Plus en général, si K est une sous-variété de Q et G une fonction réelle sur K, l'ensemble $L = \{ p \in T^*Q ; q = \pi_Q(p) \in K, \langle u, p \rangle = \langle u, dG \rangle, \forall u \in T_q K \}$ est une sous-variété Lagrangienne de (T^*Q, ω_Q); on dit que L est *engendrée par la fonction* G *sur* K. Si $K = Q$ alors $L = dG(Q)$. Si K est donnée par des équations $K^A = 0$, où (K^A) sont r fonctions réelles indépendantes sur Q, alors L est engendrée, d'une façon équivalente, par la famille de Morse $F : Q \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R} : (q; \lambda_A) \mapsto \overline{G}(q) + \lambda_A K^A(q)$, où $\overline{G} : Q \to \mathbb{R}$ est une extension quelconque de G à Q.

Soient Q et A deux variétés. Une *relation symplectique* de T^*Q à T^*A est une sous-variété Lagrangienne R de la variété symplectique $(T^*Q \times T^*A, -\mathrm{pr}_Q^*\omega_Q + \mathrm{pr}_A^*\omega_A)$ où pr_Q et pr_A sont les projections de $T^*Q \times T^*A$ sur T^*Q et T^*A respectivement. R est alors localement engendrée par une famille de Morse $-S : U \times \Lambda \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert de $Q \times A$, avec des équations du type :

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}, \qquad b_\varkappa = -\frac{\partial S}{\partial a^\varkappa}, \qquad 0 = \frac{\partial S}{\partial \lambda_A}, \tag{3}$$

où (q^i, p_i) sont coordonnées canoniques de (P, ω) et $(q^i, p_i, \dot{q}^i, \dot{p}_i)$ sont les coordonnées correspondantes sur TP.

On appelle *système (dynamique) homogène* un triplet $(P, \omega; C)$ où (P, ω) est une variété symplectique et C une sous-variété coisotrope de (P, ω). Posons $\dot{\Delta}=(TC)^{\S}$ [$(\S)$ dénote l'orthogonal symplectique]. On sait que $\dot{\Delta}$ est un sous-fibré intégrable de TC. C'est convenable de regarder $\dot{\Delta}$ comme une sous-variété de TP. On voit alors que $\dot{\Delta}$ *est une sous-variété Lagrangienne de* $T(P, \omega)$ *engendrée par la fonction nulle sur* C [3]. Si C est localement définie par des équations $C^a=0$ $(a=1, \ldots, l;\ l=\text{codim } C)$, alors $\dot{\Delta}$ est représentée par les *équations d'Hamilton* :

$$(5) \qquad \dot{q}^i=\mu_a\frac{\partial C^a}{\partial p^i}, \qquad \dot{p}_i=-\mu_a\frac{\partial C^a}{\partial q^i}, \qquad C^a=0.$$

En effet $\dot{\Delta}$ est engendré par la famille de Morse $F(q^i, p_i, \mu_a)=\mu_a C^a(q^i, p_i)$, avec $(\mu_a)\in\mathbb{R}^l$ [*voir* (4)]. La coisotropie de C se traduit dans les conditions d'intégrabilité $\{C^a, C^b\}\mid C=0$ [$\{\ ,\ \}$ crochet de Poisson sur (P, ω)].

Soit $P_{[C]}$ l'espace quotient de C par rapport au *feuilletage caractéristique* de C (une *caractéristique* de C est une variété intégrale connexe maximale de $\dot{\Delta}$). Supposons pour simplicité que $P_{[C]}$ ait une structure différentiable telle que la projection naturelle $\rho : C \to P_{[C]}$ soit une submersion; on dit alors que (P, ω) est *globalement réductible* par C (s'il n'est pas ainsi les considérations à suivre sont locales) [4]. Dans ce cas on sait que $P_{[C]}$ est muni d'une forme symplectique $\omega_{[C]}$ telle que $\rho^*\omega_{[C]}=\iota_C^*\omega$ ($\iota_C : C\to P$ est l'injection de C dans P). Posons $(P, \omega)_{[C]}=(P_{[C]}, \omega_{[C]})$: c'est l'*espace symplectique réduit* de (P, ω) par rapport à C ou *espace des mouvements* du système homogène $(P, \omega; C)$. C'est convenable de regarder le graphe de ρ comme un sous-ensemble de $P\times P_{[C]}$. On sait alors que $[C]=\{(p, b)\in P\times P_{[C]},\ p\in b\}$ est une *réduction symplectique* de (P, ω) sur $(P, \omega)_{[C]}$ appelée *réduction de* (P, ω) *par rapport à* C ([4], [5]).

Appelons $\Delta=\{(x, y)\in C\times C;\ \rho(x)=\rho(y)\}$ la *relation intégrale* de $\dot{\Delta}$. C'est convenable de regarder Δ comme un sous-ensemble de $P\times P$. On voit alors que Δ *est une relation symplectique sur* (P, ω) et que $\Delta=[C]^t\circ[C]$ (composition de [C] par la relation transposée $[C]^t$) [5]. On peut déterminer la relation intégrale Δ par intégration des équations d'Hamilton (5) ou bien par une méthode indirecte : *la méthode de Jacobi*. Nous supposerons dans la suite $(P, \omega)=(T^*Q, \omega_Q)$.

Définition 1. — Nous disons que une famille de Morse $S : U\times\Lambda\to\mathbb{R}$ sur Q $(U\subseteqq Q)$ est une *solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi associée au système homogène* $(T^*Q, \omega_Q; C)$ si la variété Lagrangienne engendrée par S est contenue dans C. Une solution est dite *régulière* si elle est tout sumplement une fonction sur un ouvert U de Q, $S : U\to\mathbb{R}$.

Une telle fonction $S(q^i, \lambda_A)$ doit donc satisfaire les équations locales [*voire* (2)] :

$$(6) \qquad C^a\left(q^i, \frac{\partial S}{\partial q^i}\right)=0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \lambda_A}=0.$$

Plus généralement, soit la fonction S définie sur un ouvert $U \subseteq Q \times A \times \Lambda$, où A est une variété différentiable, telle que la projection de U sur A est surjective. Pour chaque $a \in A$ on considère l'ouvert $U_a = \{(q, \lambda) \in Q \times \Lambda; (q, a, \lambda) \in U\}$ de $Q \times \Lambda$ et la fonction $S_a : U_a \to \mathbb{R} : (q, \lambda) \mapsto S(q, a, \lambda)$.

Définition 2. — On appelle une telle fonction S une *intégrale* (*locale*) *complète* de l'équation d'Hamilton-Jacobi associée à $(T^*Q, \omega_Q; C)$ si :

(i) chaque fonction S_a est une famille de Morse sur Q;

(ii) les sous-variétés Lagrangiennes $\{L_a\}_{a \in A}$ engendrées par $\{S_a\}_{a \in A}$ donnent un feuilletage sur un ouvert $\tilde{C}$ de C;

(iii) les caractéristiques de C ont des intersections connexes avec les L_a. Si $C = C$ on dit que S est une *intégrale complète globale*.

Si $\dim Q = n$, $\operatorname{codim} C = l$, $\dim \Lambda = r$, on a nécessairement $l \leqq n$ et $\dim A = n - l$. Si (q^i), $(a^\varkappa)$, (λ_A) sont des coordonnées sur Q, A, Λ respectivement, les conditions (i) et (ii) sont localement traduites par la maximalité du rang $(= n - l + r)$ de la matrice suivante :

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial^2 S}{\partial q^i \, \partial a^\varkappa}, & \dfrac{\partial^2 S}{\partial q^i \, \partial \lambda_B}, \\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial \lambda_A \, \partial a^\varkappa}, & \dfrac{\partial^2 S}{\partial \lambda_A \, \partial \lambda_B}. \end{matrix} \right\| \tag{7}$$

Les équations (6) sont aussi satisfaites.

Théorème. — *Soit* S *une intégrale complète selon la définition donnée. Alors :* (*a*) *la fonction* $-S$, *interprétée comme famille de Morse sur* $Q \times A$, *engendre une réduction symplectique* $\tilde{R}$ *de* (T^*Q, ω_Q) *sur une sous-variété ouverte* B *de* T^*A; (*b*) *la réduction* $\tilde{R}$ *est isomorphe à la réduction de* (T^*Q, ω_Q) *par rapport à* $\tilde{C}$, *c'est-à-dire* (*voir* [4]) *il existe un symplectomorphisme* $\gamma : (B, \iota_B^* \omega_A) \to (T^*Q, \omega_Q)_{[C]}$ ($\iota_B : B \to T^*A$ *est l'injection*) *tel que* $\tilde{R} = \Gamma \circ [\tilde{C}]$ ($\Gamma =$ *graphe de* γ); (*c*) $\tilde{\Delta} = \tilde{R}^t \circ \tilde{R}$ *est une sous-relation ouverte de la relation intégrale* Δ.

Démonstration. — On voit aisément que S est une famille de Morse sur $Q \times A$. Donc des équations du type (3) définissent une sous-variété Lagrangienne $\tilde{R}$ de $T^*Q \times T^*A$. Pour chaque $p \in \tilde{C}$ il existe un $a \in A$ unique tel que $p \in L_a$ (hypothèse du feuilletage). $\tilde{R}$ est donc le graphe d'une application $\tilde{\rho} : \tilde{C} \to T^*A$. Pour la relation tangente $T\tilde{R}$ on a la représentation locale suivante [avec les équations (3)] :

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{p}_i &= \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial a^\lambda} \dot{a}^\lambda + \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial \lambda_B} \dot{\lambda}_B, \\ \dot{b}_\varkappa &= \frac{\partial^2 S}{\partial a^\varkappa \partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial^2 S}{\partial a^\varkappa \partial a^\lambda} \dot{a}^\lambda + \frac{\partial^2 S}{\partial a^\varkappa \partial \lambda_B} \dot{\lambda}_B, \\ 0 &= \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_A \partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_A \partial a^\lambda} \dot{a}^\lambda + \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_A \partial \lambda_B} \dot{\lambda}_B. \end{aligned} \right. \tag{8}$$

De $(8)_1$ on voit alors que dim Ker $T_p\tilde{\rho} = l$ en chaque point $p \in C$. Donc $\tilde{\rho}$ est une submersion et l'image $B = \tilde{\rho}(\tilde{C})$ est un ouvert de T^*A : (*a*) est démontré. La condition (iii) dans la définition 2 implique que la réduction $\tilde{R}$ a fibres connexes, donc (*b*) est une conséquence du lemme 1 de [4]. De $\Gamma \circ \tilde{R} = [\tilde{C}]$ on tire $\tilde{\Delta} = \tilde{R}^t \circ \tilde{R} = \tilde{R}^t \circ \Gamma^t \circ \Gamma \circ \tilde{R} = [\tilde{C}]^t \circ [\tilde{C}]$. Puisque les caractéristiques de C ont intersection connexe avec celles de $\tilde{C}$, on a $\tilde{\Delta} \subseteqq \Delta$. Des considérations locales montrent que $\tilde{\Delta}$ est ouvert dans Δ (Q.E.D.).

Remarques. — (9) L'espace symplectique réduit $(\tau^*Q, \omega_Q)_{[\tilde{C}]}$ s'identifie d'une manière naturelle avec une sous-variété ouverte de l'espace des mouvements $(T^*Q, \omega_Q)_{[C]}$. Une intégrale locale complète donne donc un symplectomorphisme d'un ouvert B du fibré cotangent T^*A sur un ouvert de $(T^*Q)_{[C]}$. Des coordonnées canoniques sont alors induites sur $(T^*Q, \omega_Q)_{[C]}$ par des coordonnées sur A. (10) Si l'on suppose qu'il existe une variété $\overline{A}$ telle que $(T^*Q, \omega_Q)_{[C]} = (T^*\overline{A}, \omega_{\overline{A}})$ on peut considérer la réduction [C] engendrée localement par une famille de Morse sur $Q \times \overline{A}$. L'étude qualitative de cette fonction nous conduit à formuler la définition 2, donc à concevoir la méthode de Jacobi dans sa généralité. (11) La connaissance d'une intégrale complète globale nous donne la relation intégrale Δ entièrement : si $\tilde{C} = C$, alors $\tilde{\Delta} = \Delta$. En général une telle intégrale n'existe pas; on peut alors construire Δ par morceaux, par la connaissance de plusieurs intégrales complètes locales (*voir* [5]). (12) Le théorème démontré est aussi valable dans le cas où T^*Q n'est pas globalement réductible par rapport à C [6].

(*) Remise le 22 mars 1982.

[1] Toutes variétés, sous-variétés, applications sont supposées C^∞.

[2] L. Hormander, *Acta Math.*, 127, 1971, p. 79-183; V. Guillemin et S. Sternberg, *Geometric Asymptotics*, *A.M.S. Math. Surveys*, 14, 1977; pour une approche globale, A. Weistein, *Lectures on Symplectic Manifolds*, *C.B.M.S. Regional Conference*, 29, 1977.

[3] Abus de langage : c'esr $\beta(\tilde{\Delta}) \subseteqq T^*P$ qui est engendrée par la fonction nulle sur C selon la définition donnée ci-dessus.

[4] S. Benenti et W. M. Tulczyjew, *Comptes rendus*, 294, série I, 1982, p. 561.

[5] S. Benenti et W. M. Tulczyjew, in *Lecture Notes in Math.*, 836, 1980, p. 9-21.

[6] Cette recherche a été menée avec le soutien du C.N.R.

Istituto di Fisica Matematica « J.-L. Lagrange »,
Università di Torino, Via Carlo Alberto 10, I-10123 *Torino.*