

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Remarques sur les réductions symplectiques.*
Note (*) de Sergio Benenti et Włodzimierz M. Tulczyjew, présentée par André Lichnerowicz.

On fait des remarques sur une classe particulière de relations symplectiques utilisées en mécanique analytique.

MATHEMATICAL PHYSICS. — Remarks on the Symplectic Reductions.

Some remarks on a particular class of symplectic relations are collected with a view to their applications to analytical mechanics.

Une relation différentiable est un triplet $(P_1, P_2; R)$ où P_1, P_2 sont deux variétés différentiables et R est une sous-variété de $P_1 \times P_2[1]$.

DÉFINITION 1. — Une réduction est une relation différentiable $(P, P_0; R)$ telle que R est le graphe d'une submersion surjective $\pi : C \rightarrow P_0$ d'une sous-variété C de P sur P_0 : $R = \{(p, p_0) \in P \times P_0; p \in C, p_0 = \pi(p)\}$.

Remarques. — (1) Pour chaque sous-ensemble $F \subseteq P$, l'ensemble $R \circ F = \{p_0 \in P_0; \exists p \in P : (p, p_0) \in R\}$ est l'image de F selon la relation R . L'image réciproque selon R d'un sous-ensemble $S \subseteq P_0$ est l'image $R^t \circ S$ de S selon la relation transposée R^t . On a évidemment $R \circ P = P_0$, $R^t \circ P_0 = C$. L'image réciproque $R^t \circ \{y\}$ d'un élément $y \in P_0$ est une sous-variété de P que nous appelons fibre de R sur y ; sa dimension est $\dim C - \dim P_0$. (2) Pour chaque $(x, y) \in R$ la relation tangente $(T_x P, T_y P_0, T_{(x, y)} R)$ est un épimorphisme linéaire dans la catégorie des relations linéaires [2] avec image réciproque $T_x C$. (3) $R \circ R^t$ est la relation identique sur P . (4) Si S est une sous-variété de P_0 alors $R^t \circ S$ est une sous-variété de P . (5) La relation composée de deux (ou plus) réductions est une réduction.

Une relation symplectique (ou canonique) est un triplet $((P_1, \omega_1), (P_2, \omega_2); R)$ où $(P_1, \omega_1), (P_2, \omega_2)$ sont variétés symplectiques et R est une sous-variété Lagrangienne de la variété symplectique produit $(P_1, -\omega_1) \times (P_2, \omega_2) = (P_1 \times P_2, -\text{pr}_1^* \omega_1 + \text{pr}_2^* \omega_2)$ [3].

DÉFINITION 2. — Une réduction symplectique est une relation symplectique $((P, \omega), (P_0, \omega_0); R)$ telle que R est le graphe d'une application différentiable surjective $\pi : C \rightarrow P_0$.

Remarques. — On sait que l'image d'un sous-espace coisotrope (resp. isotrope, Lagrangien) par une relation symplectique linéaire est coisotrope (resp. isotrope, Lagrangien) ([2], [4]). Du fait que toute relation tangente $T_{(x, y)} R$ est un épimorphisme symplectique, par les résultats connus sur la représentation des épimorphismes linéaires [2], on déduit que : (6) $T_x C$ est coisotrope dans $(T_x P, \omega_x)$, $\forall x \in C$, donc C est une sous-variété coisotrope de (P, ω) . (7) L'espace $(T_x C)^\perp \subseteq T_x C$ ($\perp$ dénote l'orthogonal symplectique) est le noyau de $T_x \pi$ où $\pi : C \rightarrow P_0$ est l'application différentiable associée à R ; puisque $\dim (T_x C)^\perp = \text{codim } C$ et $T_x \pi$ est surjective, on voit que π est une submersion; donc la relation différentiable sous-jacente à une réduction symplectique (définition 2), est une réduction (définition 1) et $\dim P - \dim P_0 = 2 \text{ codim } C$. (8) Plus généralement si S est une sous-variété de P_0 , on a $1/2 \dim P - \dim R^t \circ S = 1/2 \dim P_0 - \dim S$ et si S est coisotrope (resp. isotrope, Lagrangienne) dans (P_0, ω_0) alors $R^t \circ S$ est coisotrope (resp. isotrope, Lagrangienne) dans (P, ω) . (9) De (5) et par le théorème sur la composition des relations symplectiques on a que la relation composée de deux (ou plus) réductions symplectiques est une réduction symplectique.

D'après la remarque (6) on peut reconnaître que plusieurs propriétés des réductions symplectiques sont liées à des propriétés bien connues des sous-variétés coisotropes que nous rappelons ici pour préciser nos notations.

Soit C une sous-variété coisotrope d'une variété symplectique (P, ω) ; l'ensemble $(TC)^\perp = \bigcup_{x \in C} (T_x C)^\perp$ est un sous-fibré intégrable du fibré TC de rang égal à $\text{codim } C$; nous

appelons $(TC)^\S$ la *distribution caractéristique* de C et *caractéristique* chaque variété intégrale connexe maximale. Si l'ensemble quotient $P_{[C]}$ a une structure différentiable telle que la projection naturelle $\pi : C \rightarrow P_{[C]}$ est une submersion on dit que C est *symplectiquement régulière* [5] ou que (P, ω) est (*globalement*) *réductible* par rapport à C . Il existe alors une forme symplectique $\omega_{[C]}$ (unique) sur $P_{[C]}$ telle que $\pi^* \omega_{[C]} = \iota^* \omega$ ($\iota : C \rightarrow P$ est l'injection) et $[C] = \{(x, q) \in P \times P_{[C]}; x \in q\} \subseteq P \times P_{[C]}$ définit une réduction symplectique de (P, ω) à la *variété symplectique réduite* $(P, \omega)_{[C]} = (P_{[C]}, \omega_{[C]})$ [6]; nous appelons $[C]$ la *réduction de* (P, ω) *par rapport à* C . Pour chaque sous-ensemble F de P on pose $F_{[C]} = [C] \circ F = \{q \in P_{[C]}; \exists x \in F : x \in q\}$.

Remarque. — (10) Chaque composante connexe d'une fibre d'une réduction symplectique $((P, \omega), (P_0, \omega_0); R)$ est une caractéristique de $R^t \circ P_0$. En effet, si $C_y = R^t \circ y$ est la fibre sur $y \in P_0$, on a $T_x C_y = (T_x C)^\S$ [voir remarques (1), (7)].

DÉFINITION 3. — Deux réductions symplectiques avec le même domaine $(P, \omega), ((P, \omega), (P_1, \omega_1); R_1)$ et $((P, \omega), (P_2, \omega_2); R_2)$, sont isomorphes s'il existe un difféomorphisme $\gamma : P_1 \rightarrow P_2$ tel que $R_1 = \Gamma \circ R_2$ (Γ = graphe de γ). On écrit alors $R_1 \cong R_2$.

Remarque. — (11) Si $R_1 \cong R_2$ alors γ est symplectique et unique : de (3) on a $\Gamma = R_1 \circ R_2^t$. En plus : $R_1^t \circ P_1 = R_2^t \circ P_2$.

LEMME 1. — Si les fibres d'une réduction symplectique $((P, \omega), (P_0, \omega_0); R)$ sont connexes, alors elle est isomorphe à la réduction $[C]$ de (P, ω) par rapport à $C = R^t \circ P_0$.

Démonstration. — Chaque fibre de R est une caractéristique de C : il y a une bijection $\gamma : P_0 \rightarrow P_{[C]}$ qui donne une structure différentiable pour laquelle (P, ω) est réductible par rapport à C .

De ce lemme, on tire, plus généralement, l'énoncé suivant :

PROPOSITION 1. — Si deux réductions symplectiques avec le même domaine ont des fibres connexes et la même image réciproque, elles sont isomorphes.

Nous examinons l'opération de réduction de sous-variétés. Soit $(P, P_0; R)$ une réduction différentiable et soit $\pi : C \rightarrow P_0$ la submersion associée, $C = R^t \circ P_0$. Soit F une sous-variété de P et soit $S = R \circ F = \pi(F \cap C) \subseteq P_0$ l'ensemble réduit. Nous considérons les hypothèses suivantes :

- (i) $F \cap C$ est une sous-variété;
- (ii) $\pi|_{F \cap C}$ est une subimmersion (c'est-à-dire à rang constant r);
- (iii) S est une sous-variété, $\dim S = r$.

Si (i) et (ii) sont satisfaites, par le théorème du rang, on sait que S est « localement » une sous-variété de P_0 , c'est-à-dire que chaque point de $F \cap C$ a un voisinage ouvert tel que l'image selon $\pi|_{F \cap C}$ est une sous-variété de P_0 . Donc, si (iii) n'est pas valable, les considérations suivantes ont une signification locale seulement.

Soit $\pi' : F \cap C \rightarrow S$ l'application obtenue par restriction de π . Elle est une submersion surjective. Soit $(x, y) \in R$, avec $x \in F \cap C : y = \pi(x) = \pi'(x)$. La relation tangente $T_{(x, y)} R$ est essentiellement un sous-espace de $T_x C \times T_y P_0$. Donc :

$$(\dagger) \quad T_{(x, y)} R \circ T_x F = T_{(x, y)} R \circ (T_x F \cap T_x C).$$

Soit $R' \subseteq (F \cap C) \times S$ le graphe de π' . Puisque π' est une submersion :

$$T_{(x, y)} R \circ T_x (F \cap C) = T_y S.$$

D'un autre côté, puisque π' est obtenue par restriction de π :

$$T_{(x, y)} R' \circ T_x (F \cap C) = T_{(x, y)} R \circ T_x (F \cap C).$$

Donc :

$$(\dagger\dagger) \quad T_{(x, y)} R \circ T_x (F \cap C) = T_y S.$$

En général on a $T_x(F \cap C) \subseteq T_x F \cap T_x C$. De $(\dagger)$ et $(\dagger\dagger)$ on tire alors :

$$(\star) T_y S \subseteq T_{(x,y)} R \circ T_x F.$$

Si on fait en plus l'hypothèse suivante :

(iv) $T_x F \cap T_x C = T_x(F \cap C)$, $\forall x \in F \cap C$ [on dit, avec (i), que F et C ont une *intersection propre*], on a l'égalité : $(\star\star) T_y S = T_{(x,y)} R \circ T_x F$.

Supposons que la réduction considérée est sous-jacente à une réduction symplectique. Par les propriétés des relations linéaires symplectiques déjà rappelées, en observant aussi qu'un sous-espace d'un espace isotrope est isotrope, de $(\star)$ et $(\star\star)$ on déduit l'énoncé suivant :

PROPOSITION 2. — Soit $((P, \omega), (P_0, \omega_0); R)$ une réduction symplectique, soit F une sous-variété de P et soit $S = R \circ F$ l'ensemble réduit. Si les hypothèses (i), (ii) et (iii) sont valables et si F est isotrope, alors S est isotrope. Si aussi l'hypothèse (iv) est valable et si F est coisotrope (resp. Lagrangienne) alors F est coisotrope (resp. Lagrangienne).

PROPOSITION 3. — Soit $((P, \omega), (P_0, \omega_0); R)$ une réduction symplectique et soit F une sous-variété coisotrope de (P, ω) à intersection propre avec $C = R^1 \circ P_0$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes : (a) le feuilletage caractéristique de C induit un feuilletage sur $F \cap C$; (b) le feuilletage caractéristique de F induit un feuilletage sur $F \cap C$. Dans ce cas la restriction $\pi|_{F \cap C}$ de la submersion π associée à R est une subimmersion [l'hypothèse (ii) est satisfaite].

Démonstration. — La condition (a) dit que $\Delta = T(F \cap C) \cap (TC)^\S$ est un sous-fibré de $T(F \cap C)$; mais Δ_x est le noyau de $T_x(\pi|_{F \cap C})$, pour chaque $x \in F \cap C$. Donc $\pi|_{F \cap C}$ a rang constant. Par l'hypothèse d'intersection propre on a :

$$\Delta = T(F \cap C) \cap (TC)^\S = TF \cap TC \cap (TC)^\S = TF \cap (TC)^\S.$$

Donc : $\Gamma_x = (T_x F + (T_x C)^\S)^\S = T_x C \cap (T_x F)^\S$

a dimension constante et : $\Gamma = TC \cap (TF)^\S = T(F \cap C) \cap (TF)^\S$ est un sous-fibré : alors (a) $\Rightarrow$ (b). Ce raisonnement est évidemment réversible.

Remarques. — (12) Si F est Lagrangienne la condition (b) est évidemment satisfaite; on retrouve alors un théorème bien connu sur la réduction des variétés Lagrangiennes [3]. Rappelons que toute variété Lagrangienne contenue dans une variété coisotrope C est une réunion de variétés intégrales de la distribution caractéristique de C (*principe d'absorption*). Soit $L_0 \subseteq C$ une sous-variété isotrope de (P, ω) telle que $R \circ L_0$ est une sous-variété Lagrangienne de (P_0, ω_0) . Il existe alors une unique sous-variété Lagrangienne maximale L de (P, ω) telle que $L_0 \subseteq L \subseteq C$ et composée par des caractéristiques sortantes de L_0 [voir (9)]. La condition sur L_0 est satisfaite si par exemple L_0 est transverse aux fibres de la réduction ($\forall x \in L_0, T_x L \cap (T_x C)^\S = 0, T_x L + (T_x C)^\S = T_x C$) et l'intersection avec chaque fibre est unique; on retrouve ainsi un théorème bien connu sur la *méthode des caractéristiques*.

DÉFINITION 4. — Nous disons que deux sous-variétés coisotropes F et C sont à intersection complète (resp. localement complète) si l'intersection de $F \cap C$ avec chaque caractéristique de F et de C est vide ou bien égale à la caractéristique même (resp. égale à une sous-variété ouverte de la caractéristique).

Remarques. — (14) Si F et C sont à intersection propre, alors l'intersection est localement complète si et seulement si $F \cap C$ est coisotrope. En effet on a intersection localement complète si et seulement si $(T_x C)^\S \subseteq T_x(F \cap C)$ et $(T_x F)^\S \subseteq T_x(F \cap C)$, $\forall x \in F \cap C$. Mais on a aussi l'identité $(T_x(F \cap C))^\S = (T_x F \cap T_x C)^\S = (T_x C)^\S + (T_x F)^\S$, d'où on tire l'assertion. (15) Soit (P, ω) globalement réductible par rapport à F et C ; si F et C sont à intersection propre et complète, les ensembles réduits $F_{[C]}$ et $C_{[F]}$ sont des sous-variétés (coisotropes) des espaces

symplectiques réduits $(P, \omega)_{[C]}$ et $(P, \omega)_{[F]}$ respectivement. En effet les hypothèses de la proposition 3 sont satisfaites puisque $F \cap C$ est composée par des caractéristiques de F et C . Ce dernier fait implique aussi que $F_{[C]}$ et $C_{[F]}$ sont des sous-variétés; on peut alors appliquer la proposition 2. (16) Soit (P, ω) réductible par rapport à deux sous-variétés coisotropes C et F à intersection propre et complète; si : (I) $(P, \omega)_{[C]}$ est réductible par rapport à $F_{[C]}$, ou si : (II) (P, ω) est réductible par rapport à $C_{[F]}$, alors (P, ω) est réductible par rapport à $F \cap C$ et $[F \cap C] \cong [F_{[C]}] \circ [C]$, ou respectivement $[F \cap C] \cong [C_{[F]}] \circ [F]$. En effet, depuis la remarque (10), sous la condition (I) on peut considérer la réduction composée $[F_{[C]}] \circ [C]$; l'image réciproque est $F \cap C$ et les fibres sont connexes, car elles sont les caractéristiques de $F \cap C$ par l'hypothèse d'intersection complète; on peut alors appliquer le lemme 1. Le même raisonnement s'applique si (II) est valable. Donc le diagramme de relations suivant est commutatif (on sous-entend deux symplectomorphismes sur $(P, \omega)_{[F \cap C]}$) :

$$\begin{array}{ccc} (P, \omega) & \xrightarrow{[C]} & (P, \omega)_{[C]} \quad \text{(I)} \\ & \searrow [F \cap C] & \downarrow [F \cap C] \\ [F] \downarrow & & \\ \text{(II)} \quad (P, \omega)_{[F]} & \xrightarrow{[C_{[F]}]} & (P, \omega)_{[F \cap C]} \end{array}$$

(17) Soient F et C définies par des équations $F^\alpha = 0$, $C^a = 0$ ($\alpha = 1, \dots, k$; $a = 1, \dots, l$; $k = \text{codim } F$, $l = \text{codim } C$) où (F^α) et (C^a) sont des fonctions réelles sur P . On sait que la coisotropie de F et C est caractérisée par : $\{F^\alpha, F^\beta\} | F = 0$, $\{C^a, C^b\} | C = 0$. En plus si la fonction $P \rightarrow \mathbb{R}^{k+l} : x \rightarrow (F^\alpha(x), C^a(x))$ a rang constant dans un voisinage de $F \cap C$, alors l'intersection est propre. Donc pour avoir aussi une intersection localement complète il faut et il suffit que $\{F^\alpha, C^a\} | F \cap C = 0$ [voir (14)]. Pour abrégé on omet la discussion sur la première de ces deux propositions. (18) De l'équation dimensionnelle (7) on tire :

$$\begin{aligned} \dim P_{[F \cap C]} &= \dim P - 2 \text{ codim } (F \cap C), \\ \dim P_{[F]} &= \dim P - 2 \text{ codim } F, \quad \dim P_{[F \cap C]} = \dim P_{[F]} - 2 \text{ codim } C_{[F]}. \end{aligned}$$

Donc : $\text{codim } C_{[F]} = \text{codim } (F \cap C) - \text{codim } F \leq \text{codim } C$.

Si $\text{codim } (F \cap C) = \text{codim } F + \text{codim } C$ (les fonctions (F^α) et (C^a) ci-dessus sont, toutes ensemble, indépendantes) alors : $\text{codim } C_{[F]} = \text{codim } C$.

Les remarques exposées ici trouvent des applications dans la formulation de la théorie d'Hamilton-Jacobi, déjà esquissée dans [6], pour la dynamique associée à une sous-variété coisotrope C d'un certain espace des phases (P, ω) ([5], [7]). Un feuilletage $\{F_e\}_{e \in E}$ de sous-variétés coisotropes à intersection propre et complète avec C est représentée par des intégrales premières en involution. Pour chaque $e \in E$, la sous-variété coisotrope $C_{[F_e]}$ de $(P, \omega)_{[F_e]}$ représente le système dynamique réduit. On reviendra sur ces questions dans un travail à paraître.

(*) Remise le 22 février 1982, acceptée le 8 mars 1982.

[1] Une relation sera souvent indiquée par son « graphe » R seulement. Toutes variétés, sous-variétés, applications sont supposées C^∞ .

[2] S. BENENTI, *Linear Symplectic Relations* [Proceedings « Journées Fermat », Toulouse 1981, Pitman (à paraître)].

[3] A. WEINSTEIN, *Lectures on Symplectic Manifolds*, C.B.M.S. Conf. Series, A.M.S., n° 29, 1977. *Symplectic Relations* [Proceedings « Journées Fermat », Toulouse 1981 (à paraître)].

[4] V. GUILLEMIN et S. STERNBERG, *Amer. J. Math.*, 101, 1979, p. 915-955.

[5] A. LICHNEROWICZ, *Comptes rendus*, 280, série A, 1975, p. 523.

[6] S. BENENTI et W. M. TULCZYJEW, *Lecture Notes in Math.*, 836, 1980, p. 9-21.

[7] M. R. MENZIO et W. M. TULCZYJEW, *Ann. Inst. H. Poincaré*, 28, 1978, p. 349-367.

Cette recherche a été menée avec le soutien du C.N.R.

*Istituto di Fisica Matematica « J.-L. Lagrange », Università di Torino,
Via Carlo Alberto 10, I-10123 Torino, Italie.*