GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Structures de séparabilité sur une variété riemannienne de signature quelconque.* Note (*) de **Sergio Benenti,** présentée par André Lichnerowicz.

Par une méthode basée sur la notion de structure de séparabilité on trouve l'expression générale d'une métrique telle que l'équation d'Hamilton-Jacobi des géodésiques est intégrable par séparation des variables.

By a method based on the notion of separatibility structure we find the general expressions of a metric such that the Hamilton-Jacobi equation of the geodesics is integrable by separation of variables.

L'étude des cas où les géodésiques d'une variété riemannienne peuvent être localement déterminées par séparation des variables dans l'équation d'Hamilton-Jacobi

$$g^{ij}\partial_i W \partial_j W = c \tag{1}$$

peut être basée sur la notion de *structure de séparabilité* qu'on a introduit d'une façon naïve dans [1]. On veut ici en esquisser une définition plus précise et les propriétés les plus significatives [2].

Définition 1. — *Une carte* $(U, (x^i))$ *d'une variété riemannienne* (V_n, g) *est dite séparable si l'équation* (1) *admet une intégrale complète* $W = W(x^i; a_j)$ *telle que* $\partial_i \partial_j W = 0$ *pour* $i \neq j$, *c'est-à-dire telle que*

$$W(x^i, a_j) = W_1(x^1; a_j) + W_2(x^2; a_j) + \ldots + W_n(x^n; a_j).$$

Cette intégrale est appelée intégrale séparée associée à la carte.

Une intégrale complète est donnée par un feuilletage local de sous-variétés lagrangiennes de $T^* V_n$ (avec la structure symplectique canonique donnée par la forme $dp_i \wedge dx^i$) dont les feuilles sont des sections contenues dans les sous-variétés d'équation $g^{ij} p_i p_j = c$. Un tel feuilletage est déterminé par une fonction réelle locale W sur un produit $V_n \times A$ où A est une variété de paramètres de dimension n, satisfaisant l'équation (1) pour des valeurs admissibles de c; les feuilles sont définies par les équations $p_j = \partial_j W$ [3].

Définition 2. — *Deux cartes* $[U, (x^i)$ *et* $U', (x^{i'})]$ *autour d'un point* $x_0 \in V_n$ *sont dites* S-*compatibles en* x_0 *si elles sont séparables et si les feuilletages engendrés par les intégrales séparées correspondantes coïncident sur un ouvert* $U'' \subset U \cap U'$, *tel que* $x_0 \in U''$.

La S-compatibilité est une relation d'équivalence dans la famille des cartes séparables au point x_0.

Définition 3. — *Une structure de séparabilité* (*ou* S-*structure*) *au point* $x_0 \in V_n$ *est une classe d'équivalence de cartes* S-*compatibles en* x_0.

L'étude systématique des S-structures est facilité par des classifications convenables. Une première classification est donnée par la *classe*, une deuxième par l'*indice*.

Définition 4. — *Une* S-*structure est de classe r si r est le nombre maximal de coordonnées ignorables* [4] *qu'on peut trouver dans chaque carte représentative.*

La classe est un entier contenu dans l'interval fermé $[0, n]$. On peut reconnaître la classe d'une S-structure à partir de la définition et du théorème suivants :

Définition 5. — *Une coordonnée* x^i *d'une carte* $(U, (x^i))$ *est dite de première classe* (*ou quasi-ignorable*) *au point* x_0 *si autour de* x_0 *on a* $\partial_i g_{jh} = 0$ *pour* $j, h \neq i$. *Sinon elle est de deuxième classe.*

Théorème 1. — *La classe d'une* S-*structure est égale au nombre des coordonnées quasi-ignorables d'une carte séparable représentative quelconque.*

La preuve de ce théorème est basée sur des lemmes qui sont aussi intéressants pour autres applications.

LEMME 1. — *Si* $(U, (x^i))$ *est une carte séparable à* r *coordonnées quasi-ignorables au point* $x_0 \in U$, *il existe une carte* S-*compatible en* x_0 *à* r *coordonnées ignorables.*

Preuve. — On voit que les conditions de séparabilité de l'équation (1) (déf. 1) sont les conditions d'intégrabilité du système :

$$(2)\qquad \partial_i \pi_j = 0 \quad (i \neq j), \qquad \partial_i \pi_i = -\frac{1}{2}(g^{ij}\pi_j)^{-1}\partial_i g^{hk}\pi_h\pi_k, \qquad \text{où} \quad \pi_i = \partial_i W.$$

On adopte la convention suivante pour les indices; $\alpha, \beta, \ldots = n-r+1, \ldots, n$ de première classe; $a, b, \ldots = 1, \ldots, n-r$ de deuxième classe; $h, i, j, \ldots = 1, \ldots, n$. Si l'on pose

$$B^j_\alpha = g^{ji}\partial_\alpha g_{\alpha i} - \frac{1}{2}g^{j\alpha}\partial_\alpha g_{\alpha\alpha} \quad (\alpha \text{ n. s. [5]})$$

les équations $(2)_2$ pour $i = \alpha$ donnent $\partial_\alpha \pi_\alpha = B^j_\alpha \pi_j$. En dérivant cette équation par rapport à x^a on trouve, selon (2) :

$$\partial_a B^i_\alpha g_{ij}\pi^j = -B^a_\alpha \partial_a g_{hk}\pi^h\pi^k(\pi^a)^{-1} \quad (a \text{ n. s.}). \qquad \text{où} \quad \pi^j = g^{ji}\pi_i.$$

Puisque cette relation doit être une identité en les (π^i), on a nécessairement $B^a_\alpha = 0$ autour de x_0, de sorte qu'on a aussi $\partial_a B^\beta_\alpha = 0$. Donc dans un voisinage de x_0 le système (2) conduit à un sous-système contenant les (π_α) seulement :

$$(3)\qquad \partial_\beta \pi_\alpha = 0 \quad (\alpha \neq \beta), \qquad \partial_\alpha \pi_\alpha = B^\beta_\alpha \pi_\alpha,$$

où les (B^β_α) contiennent des variables de première classe seulement; autour de x_0 toute solution est du type $\pi_\alpha = c_\beta \overset{\beta}{\xi}_\alpha$ où les c_β sont des constantes et $(\overset{\beta}{\xi}_\alpha)$ des solutions indépendantes $(\det \| \overset{\beta}{\xi}_\alpha \| \neq 0)$. On vérifie que les équations

$$(4)\qquad dy^\beta = \overset{\beta}{\xi}_\alpha dx^\alpha, \qquad dy^a = dx^a$$

définissent des coordonnées d'une carte S-compatible et que les (y^β) sont ignorables.

Q.E.D.

LEMME 2. — *Soit* $(U, x^i))$ *une carte séparable avec* (x^a) *et* (x^α) *coordonnées de deuxième et première classe respectivement, au point* x_0. *Une carte sur* x_0 $(U', (x^{i'}))$ *est* S-*compatible si et seulement si dans un voisinage de* x_0 *on a :*

$$(5)\qquad dx^a = \delta^a_{a'}\xi_{a'}dx^{a'}, \qquad dx^\alpha = \xi^\alpha_{i'}dx^{i'},$$

où $(\xi_{a'})$ *et* $(\xi^\alpha_{i'})$ *sont des fonctions satisfaisant aux conditions :*

$$(6)\qquad \partial_{i'}\xi_{a'} = 0 \quad (i' \neq a'), \qquad \partial_{j'}\xi^\alpha_{i'} + \xi^\beta_{j'}\xi^\beta_{i'}B^\alpha_\beta = 0 \quad (j' \neq i').$$

Preuve. — Soient W et W′ les intégrales séparées associées aux deux cartes. S'il y a S-compatibilité on a

$$\partial_j \partial_i W = 0 \quad (i \neq j); \qquad \partial_{j'}\partial_{i'}W' = 0 \quad (i' \neq j'); \qquad \partial_{i'}W' = \xi^i_{i'}\partial_i W,$$

où $\xi^i_{i'} = \partial_{i'}x^i$; donc par (2) et (3) :

$$\partial_{j'}\xi^k_{i'}\pi_k + \xi^\beta_{j'}\xi^\beta_{i'}B^\alpha_\beta\pi_\alpha - \frac{1}{2}\xi^a_{j'}\xi^a_{i'}\partial_a g^{hk}\pi_h\pi_k(g^{ai}\pi_i)^{-1} = 0 \qquad (i' \neq j');$$

le dernier terme ne peut pas être linéaire en les (π_i), donc il doit s'annuler séparément, d'où (5) et (6).

LEMME 3. — *Deux cartes S-compatibles ont le même nombre de coordonnées de deuxième classe; elles coïncident à un changement d'échelle près.*

Preuve. — De $(5)_1$ et $(6)_1$ on voit que toute carte S-compatible avec $(U, (x^i))$ a n-r coordonnées qui coïncident, à un changement d'échelle près, avec les coordonnées de deuxième classe (x^a). L'hypothèse que deux cartes S-compatibles ont un nombre différent de coordonnées de deuxième classe implique contradiction.

Preuve du théorème 1. — Soit r le nombre de coordonnées de première classe d'une carte d'une S-structure de classe r'. Le lemme 1 implique : $r \leqq r'$. D'autre part il y a r coordonnées de première classe dans toute carte de la S-structure (lemme 3), donc $r' \leqq r$ puisque toute coordonnée ignorable est de première classe.

DÉFINITION 6. — *L'indice d d'une S-structure au point x_0 est le nombre de coordonnées de deuxième classe (x^a) d'une carte représentative telle que $g^{aa}=0$ dans un voisinage de x_0.*

Le lemme 3 rend valide cette définition [6]. *Une* S-*structure de classe r et indice d est dite une* $S_{r/d}$-*structure*. Dans une variété riemannienne propre l'indice est toujours zéro.

Adoptons la convention suivante pour les indices de deuxième classe :

$$\tilde{a}, \tilde{b}, \ldots = 1, \ldots, m-d \quad \text{pour } g^{\tilde{a}\tilde{a}} \neq 0, \ldots \ (m = n-r);$$

$$\bar{a}, \bar{b}, \ldots = m-d+1, \ldots, m \quad \text{pour } g^{\bar{a}\bar{a}} = 0.$$

THÉORÈME 2. — *Pour une* $S_{r/d}$-*structure il existe des cartes* $(V, (y^i))$, *dites séparables normales, où les coordonnées de première classe* (y^α) *sont ignorables et telles que les composantes* $(\overset{ij}{g})$ *de la métrique satisfont les conditions :* (i) $\overset{\tilde{a}i}{g} = 0$ (*pour* $i \neq \tilde{a}$) *et* $\overset{\bar{a}\bar{b}}{g} = 0$; (ii) $\overset{\bar{a}[\alpha}{g}\, \partial_b \overset{\beta]\bar{a}}{g} = 0$ *pour* $b \neq \bar{a}$.

LEMME 4. — *Dans toute carte d'une* S_r-*structure on a :*

$$g^{ab} = 0 \quad et \quad g^{a[i}\, \partial_b g^{j]a} = 0 \qquad pour \quad a \neq b. \tag{7}$$

Les conditions $(7)_1$ (qui est bien connue) et $(7)_2$ résultent des conditions de séparabilité données par Levi-Civita [7].

Preuve du théorème 2. — Soit $(U, (x^i))$ une carte d'une $S_{r/d}$-structure. On peut supposer que les coordonnées (x^α) de première classe sont ignorables (lemme 1). Puisque $g^{\tilde{a}\tilde{a}} \neq 0$ il vient de $(7)_2$: $\partial_b (g^{\tilde{a}\alpha}/g^{\tilde{a}\tilde{a}}) = 0\,(b \neq \tilde{a})$, donc $g^{\tilde{a}\alpha} = \underset{\tilde{a}}{\theta}{}^{\alpha}\, g^{\tilde{a}\tilde{a}}$ ($\tilde{a}$ n. s.) où chaque $\underset{\tilde{a}}{\theta}{}^{\alpha}$ est au plus fonction de $x^{\tilde{a}}$. Les équations : $dy^a = dx^a$, $dy^\alpha = dx^\alpha - \underset{\tilde{a}}{\theta}{}^{\alpha}\, dx^{\tilde{a}}$ définissent une carte séparable normale.

THÉORÈME 3. — *Dans toute carte séparable normale,* $(V, (y^i))$ *d'une* $S_{r/d}$-*structure, les composantes non nulles du tenseur métrique ont la forme suivante* [8] *:*

$$\overset{\tilde{a}\tilde{a}}{g} = \underset{m}{u}{}^{\tilde{a}}, \quad \overset{\bar{a}\alpha}{g} = \overset{\alpha}{\theta}_{\bar{a}}\, \underset{m}{u}{}^{a} \quad (\bar{a}\ \text{n. s.}), \qquad \overset{\alpha\beta}{g} = \overset{\alpha\beta}{\zeta}_{a}\, \underset{m}{u}{}^{a}, \tag{8}$$

où : (i) $(\underset{m}{u}{}^a)$ *est la m-ième ligne d'une matrice* $m \times m$ $(\underset{b}{u}{}^a)$ *partout régulière, d'inverse* $(\overset{b}{u}_a)$, (ii) $\overset{b}{u}_a$, $\overset{\alpha}{\theta}_{\bar{a}}$, $\overset{\alpha\beta}{\zeta}_a$ *sont fonctions au plus de la coordonnée correspondant à l'indice inférieur.*

Preuve. — De la condition (ii) du théorème 2, on a

$$\overset{\bar{a}\alpha}{g} = \overset{\alpha}{\theta}_{\bar{a}}\, J^{\bar{a}} \quad (\bar{a}\ \text{n. s.}) \tag{9}$$

où $\overset{\alpha}{\theta}_{\bar a}$ est fonction de $y^{\bar a}$ au plus. L'équation d'H.-J. donne

$$\overset{\tilde a\tilde a}{g}\, u_{\tilde a} + j^{\bar a}\, u_{\bar a} + \overset{\alpha\beta}{g}\, c_\alpha c_\beta = c \tag{10}$$

où

$$u_{\tilde a} = (\partial_{\tilde a} W)^2, \qquad u_{\bar a} = 2\, c_\alpha \overset{\alpha}{\theta}_{\bar a} \partial_{\bar a} W \qquad \text{et} \qquad c_\alpha = \partial_\alpha W = \text{Cte}.$$

On peut choisir les paramètres (a_j) dans l'intégrale complète W de sorte que $a_\alpha = c_\alpha$ et $a_m = c$. Par définition de (10) par rapport aux paramètres a_b on obtient : $\overset{\tilde a\tilde a}{g}\, \overset{b}{u}_{\tilde a} + j^{\bar a}\, \overset{b}{u}_{\bar a} = \delta^b_m$. On vérifie que $(\overset{b}{u}_a)$ est une matrice régulière telle que $\partial_i \overset{b}{u}_a = 0$ pour $i \neq a$. Donc, si $(\underset{b}{u}^a)$ est l'inverse, on a $(8)_1$ et $(8)_2$ [par (9)]. Par dérivation de (10) par rapport à a_α et a_β on obtient pour $\overset{\alpha\beta}{g}$ une expression du type $(8)_3$.

THÉORÈME 4. – *Dans toute carte séparable d'une* $S_{r/d}$*-structure les composantes de la métrique ont la forme suivante* [8] :

$$g^{\tilde a\tilde a} = \underset{m}{u}^{\tilde a}, \qquad g^{\bar a\bar a} = 0, \qquad g^{ab} = 0 \qquad (a \neq b), \tag{11}$$

$$g^{a\alpha} = \underset{\beta}{\xi}^{\alpha}\, \overset{\beta}{\theta}_a\, \underset{m}{u}^a \quad (\text{n. s.}), \qquad g^{\alpha\beta} = \underset{\mu}{\xi}^{\alpha}\, \underset{\nu}{\xi}^{\beta}\, \overset{\mu\nu}{\eta}_a\, \underset{m}{u}^a,$$

où : (i) $(\underset{m}{u}^a)$ *sont des fonctions du type du théorème* 3; (ii) $(\underset{\mu}{\xi}^{\alpha})$ *est une matrice* $r \times r$ *partout régulière, d'inverse* $(\overset{\mu}{\xi}_\alpha)$; (iii) *les fonctions* $\overset{\mu}{\xi}_\alpha$, $\overset{\beta}{\theta}_a$, $\overset{\mu\nu}{\eta}_a$ *dépendent au plus de la coordonnée correspondant à l'indice inférieur.*

Preuve. – Si (y^i) sont des coordonnées séparables normales, on a (lemme 2) : $dy^a = dx^a$, $dy^\alpha = \overset{\alpha}{\xi}_i\, dx^i$ où $\partial_j \overset{\alpha}{\xi}_i = 0$ pour $j \neq i$. Les formes (11) se déduisent de (8) par une simple transformation des composantes, avec les substitutions :

$$\overset{\beta}{\theta}_{\tilde a} = -\overset{\beta}{\xi}_{\tilde a}, \qquad \overset{\mu\nu}{\eta} = \overset{\mu\nu}{\zeta}_{\tilde a} + \overset{\mu}{\xi}_{\tilde a}\overset{\nu}{\xi}_{\tilde a}, \qquad \overset{\mu\nu}{\eta}_{\bar a} = \overset{\mu\nu}{\zeta}_{\bar a} - \overset{\mu}{\xi}_{\bar a}\overset{\nu}{\theta}_{\bar a} - \overset{\nu}{\xi}_{\bar a}\overset{\mu}{\theta}_{\bar a}.$$

Ce théorème généralise aux métriques de signature quelconque des résultats connus pour des métriques positives. Dans la littérature on considère souvent des métriques séparables du type (8); le théorème 3 dit qu'il n'y a pas perte de généralité en utilisant des coordonnées séparables « normales ».

Il résulte de (8), que les tenseurs $(\underset{b}{K})$, de composantes

$$\underset{b}{\overset{\tilde a\tilde a}{K}} = \underset{b}{u}^{\tilde a}, \quad \underset{b}{\overset{\bar a\alpha}{K}} = \overset{\alpha}{\theta}_{\bar a}\, \underset{b}{u}^{\bar a} \quad (\bar a\ \text{n. s.}), \qquad \underset{b}{\overset{\alpha\beta}{K}} = \overset{\alpha\beta}{\zeta}_a\, \underset{b}{u}^a, \qquad \underset{b}{\overset{\tilde a i}{K}} = 0\ (i \neq \tilde a), \qquad \underset{b}{\overset{\bar a\bar b}{K}} = 0;$$

sont des tenseurs de Killing permutables (avec $\underset{m}{K} = g$).

(*) Remise le 29 octobre 1979.

[1] S. BENENTI, *Comptes rendus*, 283, série A, 1976, p. 215; *Rep. Math. Phys.*, 12, 1977, p. 311-316; *Rend. Semin. Matem. Univ. Polit. Torino*, 34, 1975/1976, p. 431-463.

[2] Pour simplifier on supposera que tout est C^∞. Un article plus détaillé paraîtra dans *Proceedings of the Conference on Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics*, Salamanca, septembre 1979.

[3] *Voir* S. BENENTI et W. M. TULCZYJEW, *The Geometrical Meaning and the Globalization of the Hamilton-Jacobi Method* (à paraître).

[4] Une coordonnée x^i est *ignorable* (au point x_0), si (autour de x_0) : $\partial_i g_{jh} = 0$.

[5] La convention d'Einstein est adoptée sauf indication contraire « n. s. » (non sommé).

[6] On exclut ici les cas où un g^{aa} est nul sur une sous-variété fermée contenant x_0.

[7] LEVI-CIVITA, *Math. Ann.*, 59, 1904, p. 383-397.

[8] Bien entendu dans un voisinage de x_0 au moins.

Istituto di Mecanica Razionale, Università di Torino, via Carlo Alberto 10, 10123 *Torino, Italie.*