

MÉCANIQUE THÉORIQUE. — *Sur l'existence du potentiel pour les systèmes mécaniques avec des liaisons non holonomes.* Note (*) de Sergio Benenti et Włodzimierz M. Tulczyjew, présentée par M. André Lichnerowicz.

Sur une variété différentiable on considère les 1-formes définies sur des champs de p -directions et on donne une condition nécessaire et suffisante pour que une telle 1-forme soit fermée ou exacte selon une définition convenable qui généralise la définition ordinaire.

Generalized 1-forms, defined on a distribution in a differentiable manifold, are introduced. Necessary and sufficient conditions under which such a 1-form is closed or exact (in a suitable sense which generalizes the usual definitions) are given.

Soient Q une variété différentiable de dimension n , TQ et T^*Q les fibrés tangent et cotangent respectivement, $\mathcal{X}(Q)$ l'algèbre de Lie des champs vectoriels différentiables sur Q , $\mathcal{X}^*(Q)$ l'espace des 1-formes différentielles sur Q . Un champ différentiable ⁽¹⁾ de p -directions Γ sur Q est un sous-fibré de TQ ; on désignera avec le même symbole le sous-module de $\mathcal{X}(Q)$ des champs vectoriels contenus dans Γ , avec $\bar{\Gamma}$ l'algèbre dérivée de Γ , c'est-à-dire la plus petite sous-algèbre de $\mathcal{X}(Q)$ contenant Γ , avec Γ^* le sous-fibré dual de Γ . Une section différentiable $\varphi : Q \rightarrow \Gamma^*$ sera appelée 1-forme (définie) sur Γ ; on désignera avec $\Lambda(\Gamma)$ l'espace de ces formes.

A chaque $\mu \in \mathcal{X}^*(Q)$ on peut associer, d'une façon naturelle, un élément $\mu \mid \Gamma \in \Lambda(\Gamma)$ avec la restriction de μ à Γ . On dira que μ est nulle sur Γ si $\mu \mid \Gamma$ est nulle. Soit $\mathcal{N}(\Gamma)$ le sous-espace de $\mathcal{X}^*(Q)$ des formes nulles sur Γ .

PROPOSITION 1. — *L'espace quotient $\mathcal{X}^*(Q)/\mathcal{N}(\Gamma)$ est isomorphe à l'espace $\Lambda(\Gamma)$.*

Preuve. — (i) Soit $\varphi \in \Lambda(\Gamma)$ et Γ' un champ de $(n-p)$ -directions supplémentaire quelconque de Γ ⁽²⁾. Un élément $\tilde{\varphi} \in \mathcal{X}^*(Q)$ est uniquement déterminé par les deux conditions : $\tilde{\varphi} \mid \Gamma = \varphi$ et $\tilde{\varphi} \mid \Gamma' = 0$. La classe d'équivalence $[\tilde{\varphi}]$ est l'élément de $\mathcal{X}^*(Q)/\mathcal{N}(\Gamma)$ correspondant à φ . (ii) Si $\varphi_1, \varphi_2 \in \Lambda(\Gamma)$ et $[\varphi_1] = [\varphi_2]$, alors $\varphi_1 \mid \Gamma = \varphi_2 \mid \Gamma$, donc à chaque classe on peut associer, d'une façon unique, l'élément $\varphi = \varphi_1 \mid \Gamma \in \Lambda(\Gamma)$ indépendamment de l'élément représentatif choisi; en plus on peut voir que l'élément φ ainsi déterminé est tel que $[\tilde{\varphi}] = [\varphi_1]$ quelque soit Γ' .

Q.E.D.

Soit $\mathcal{C}(\varphi)$ la classe correspondante à la 1-forme $\varphi \in \Lambda(\Gamma)$; chaque élément de $\mathcal{C}(\varphi)$ sera une 1-forme sur Q représentative de φ ; par définition on a :

$$(1) \quad \mu \in \mathcal{C}(\varphi) \Leftrightarrow \langle \mathbf{a}, \mu \rangle = \langle \mathbf{a}, \varphi \rangle, \quad \forall \mathbf{a} \in \Gamma.$$

DÉFINITION. — Une 1-forme φ définie sur Γ est dite fermée s'il existe une 1-forme $\mu \in \mathcal{C}(\varphi)$ telle que $d\mu = 0$; une 1-forme φ définie sur Γ est dite exacte si il existe une fonction différentiable $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $du \in \mathcal{C}(\varphi)$ ⁽³⁾.

On veut donner un critère apte à éprouver si une 1-forme φ définie sur un champ de p -directions est fermée ou, en particulier, exacte.

Considérons la variété produit $Q \times \mathbb{R}$ et les deux projections canoniques $h : Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : Q \times \mathbb{R} \rightarrow Q$. Un vecteur $\mathbf{v} \in T(Q \times \mathbb{R})$ sera dit horizontal (resp. vertical) si $Th(\mathbf{v}) = 0$ (resp. $Tv(\mathbf{v}) = 0$). Soit ∂_h le champ de vecteurs verticaux unitaires [c'est-à-dire tel que

$\langle \partial_h, dh \rangle = 1$ ⁽⁴⁾]; à chaque $t \in \mathbf{R}$ est associée l'application $\tau_t : Q \times \mathbf{R} \rightarrow Q \times \mathbf{R}$, $(q, r) \mapsto (q, r+t)$; on a défini ainsi un groupe à un paramètre de difféomorphismes sur $Q \times \mathbf{R}$ qu'on appellera *translations verticales*; ce groupe est généré par le champ ∂_h .

Sur $Q \times \mathbf{R}$ nous allons à considérer une classe particulière de champs de p -directions, notée par $\mathcal{S}$. Nous disons que un champ de p -directions Δ appartient à $\mathcal{S}$ (ou est du type $\mathcal{S}$) s'il est : (1) *transverse* (par rapport au champ vertical) : en tout point ne contient pas des directions verticales; (2) *invariant par translations verticales* : $T \tau_t(\Delta) = \Delta, \forall t \in \mathbf{R}$ ⁽⁵⁾.

PROPOSITION 2. — Il existe une bijection entre la classe $\mathcal{S}$ et les 1-formes définies sur les champs de p -directions sur Q . Si l'on note avec Δ_φ le système correspondant à la forme $\varphi \in \Lambda(\Gamma)$, Δ_φ a la même dimension que Γ .

Preuve. — (i) Soit $\varphi \in \Lambda(\Gamma)$; en tout point $(q, r) \in Q \times \mathbf{R}$ prenons l'espace $\Delta_\varphi|_{(q, r)} \subset T_{(q, r)}(Q \times \mathbf{R})$ défini par

$$(2) \quad \Delta_\varphi|_{(q, r)} = \{v \in T_{(q, r)}(Q \times \mathbf{R}) : Tv(v) \in \Gamma, \langle v, dh \rangle = \langle Tv(v), \varphi \rangle\}.$$

Le sous-fibré $\Delta_\varphi = \bigcup_{(q, r) \in Q \times \mathbf{R}} \Delta_\varphi|_{(q, r)}$ est évidemment du type $\mathcal{S}$ et de la même dimension que Γ . (ii) Soit $\Delta \in \mathcal{S}$; pour chaque $(q, r) \in Q \times \mathbf{R}$ considérons l'espace $Tv(\Delta_{(q, r)}) \subseteq T_q Q$; la condition (2) implique $Tv(\Delta_{(q, r)}) = Tv(\Delta_{(q, r')})$, donc on peut définir un champ de p -directions Γ sur Q de la manière suivante : $\Gamma = \bigcup_{q \in Q} \Gamma_q, \Gamma_q = Tv(\Delta_{(q, r)}), \forall r \in \mathbf{R}$.

Puisque par les conditions (1) et (2) on a $\langle v, dh \rangle = \langle v', dh \rangle$ pour des vecteurs $v, v' \in \Delta$ tels que $Tv(v) = Tv(v')$, on peut définir une 1-forme sur Γ avec l'égalité :

$$\langle v, dh \rangle = \langle Tv(v), \varphi \rangle, \quad \forall v \in \Delta,$$

et on vérifie que $\Delta_\varphi = \Delta$.

Q.E.D.

Considérons d'abord le cas où $\Gamma = \mathcal{X}(Q)$.

LEMME. — Une 1-forme $\mu \in \mathcal{X}^*(Q)$ est fermée si et seulement si Δ_μ est intégrable; une 1-forme fermée $\mu \in \mathcal{X}^*(Q)$ est exacte si et seulement si la restriction de la projection verticale v à chaque feuille de Δ_μ ⁽⁶⁾ est une bijection.

Preuve. — (i) La 1-forme $\hat{\mu} \in \mathcal{X}^*(Q \times \mathbf{R})$ définie par $\hat{\mu} = v^* \mu - dh$ est la 1-forme caractéristique de Δ_μ ; pour $\forall v \in \Delta_\mu$ on a en effet

$$\langle v, \hat{\mu} \rangle = \langle v, v^* \mu \rangle - \langle v, dh \rangle = \langle Tv(v), \mu \rangle - \langle v, dh \rangle = 0,$$

en tenant compte de la définition (2). Donc de l'identité

$$d\hat{\mu} \wedge \hat{\mu} = v^*(d\mu \wedge \mu) - v^*d\mu \wedge dh,$$

par le théorème de Frobenius, la première partie de l'énoncé est démontrée. (ii) Si Δ_μ est intégrable et si la projection d'une feuille F sur Q est une bijection, alors, comme Δ_μ est transverse, F est le graphe d'une fonction différentiable $u : Q \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $\mu = du$. Par la condition (2) définissant $\mathcal{S}$ toute feuille a la même propriété et est le graphe d'une fonction du type $u + \text{Cte}$ ⁽⁷⁾.

Q.E.D.

Considérons le cas, plus général du précédent, d'une 1-forme définie sur un champ de p -directions Γ tel que $\bar{\Gamma} = \mathcal{X}(Q)$. Pour cela on doit d'abord remarquer les propriétés suivantes.

(a) $\forall \mu \in \mathcal{C}(\varphi)$ on a $\Delta_\varphi \subseteq \Delta_\mu$, donc $\bar{\Delta}_\varphi \subseteq \bar{\Delta}_\mu$;
si $\mu \notin \mathcal{C}(\varphi)$ on a $\Delta_\varphi \not\subseteq \Delta_\mu$, donc $\bar{\Delta}_\varphi \not\subseteq \bar{\Delta}_\mu$.

(b) Si $\Delta \in \mathcal{S}$ alors $\bar{\Delta}$ est invariant par translations verticales.

(c) Si $\bar{\Gamma} = \mathcal{X}(Q)$ la dimension de $\bar{\Delta}_\varphi$ en chaque point est $\geq n = \dim Q$; dans le point où $\bar{\Delta}_\varphi$ contient des vecteurs verticaux $\dim \bar{\Delta}_\varphi = n+1 = \dim(Q \times \mathbf{R})$.

THÉOREME. — Si $\bar{\Gamma} = \mathcal{X}(Q)$ la 1-forme φ est fermée si et seulement si $\bar{\Delta}_\varphi$ est un champ de n -directions.

Preuve. — (i) Soit φ fermée : il existe $\mu \in \mathcal{C}(\varphi)$ tel que $d\mu = 0$; par le lemme Δ_μ est intégrable : $\bar{\Delta}_\mu = \Delta_\mu$, donc de (a) (première partie) on a $\bar{\Delta}_\varphi \subseteq \bar{\Delta}_\mu$; mais, comme Δ_μ a dimension n par la première partie de (c) il est nécessairement $\bar{\Delta}_\varphi = \bar{\Delta}_\mu = \Delta_\mu$; donc $\bar{\Delta}_\varphi$ est un champ de n -directions. (ii) Soit $\bar{\Delta}_\varphi$ un champ de n -directions; par la deuxième partie de (c) n'a pas de vecteurs verticaux et pour (b) il est invariant par translations verticales, donc $\bar{\Delta}_\varphi \in \mathcal{S}$. Par la proposition 2 il existe (et il est unique) un élément $\mu \in \mathcal{X}^*(Q)$ tel que $\bar{\Delta}_\varphi = \bar{\Delta}_\mu$. Puisque $\bar{\Delta}_\mu = \bar{\Delta}_\varphi = \bar{\Delta}_\mu = \Delta_\mu$, Δ_μ est intégrable, donc par le lemme on a $d\mu = 0$. D'autre part $\mu \in \mathcal{C}(\varphi)$ par la deuxième partie de (a).

Q.E.D.

INTERPRÉTATION MÉCANIQUES ET REMARQUES. — Q est l'espace des configurations d'un système mécanique avec des liaisons non holonomes caractérisables par un champ différentiable de p -directions Γ sur Q : les déplacements virtuels sont les vecteurs de Γ . Localement Γ est donné par p champs de vecteurs différentiables X_α ($\alpha = 1, 2, \dots, p$) ou bien par $(n-p)$ 1-formes différentielles θ^a ($a = 1, 2, \dots, n-p$) telles que $\langle X_\alpha, \theta^a \rangle = 0$. Le travail virtuel est une forme linéaire φ définie sur Γ , localement déterminée par les fonctions réelles sur Q : $\varphi_\alpha = \langle X_\alpha, \varphi \rangle$.

On se pose la question de l'existence, au moins localement, d'un *potentiel* (ou *fonction de forces*), c'est-à-dire de l'existence pour tout point de Q d'un voisinage ouvert $U \subseteq Q$ et d'une fonction différentiable $u : U \rightarrow \mathbf{R}$ telle que

$$(3) \quad \langle \mathbf{a}, du \rangle = \langle \mathbf{a}, \varphi \rangle, \quad \forall \mathbf{a} \in \Gamma|U,$$

ou bien, à l'aide d'une représentation locale de Γ :

$$\langle X_\alpha, du \rangle = \langle X_\alpha, \varphi \rangle.$$

Si (q^i) ($i = 1, 2, \dots, n$) est un système de coordonnées locales de Q , le problème est localement réduit au système d'équations différentielles linéaires du premier ordre et non homogène suivant :

$$\xi_\alpha^i \partial_i u = \varphi_\alpha \quad \left(\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial q^i} \right),$$

ou ξ_α^i sont les fonctions composantes des vecteurs X_α .

L'existence d'un potentiel local équivaut [voir (1) et (3)] à l'existence d'une 1-forme $\mu \in \mathcal{C}(\varphi) \subseteq \mathcal{X}^*(Q)$ telle que $d\mu = 0$, donc, par notre définition, à que φ soit fermée.

Le théorème établi donne un critère d'intégrabilité et, dans le même temps, une méthode pour la construction du potentiel. On a considéré le cas, assez général, où $\bar{\Gamma} = \mathcal{X}(Q)$: cela signifie que la classe d'accessibilité de tout point de Q est la variété Q toute entière [théorème de Chow ⁽⁸⁾, voir aussi ⁽⁹⁾] : deux points quelconques peuvent se joindre par une courbe différentiable à vecteurs tangents appartenants à Γ ⁽¹⁰⁾. Il s'agit de construire dans la variété $Q \times \mathbf{R}$ le champ de p -directions $\bar{\Delta}_\varphi$, localement représenté par les vecteurs $\hat{X}_\alpha = \xi_\alpha^i \partial_i + \varphi_\alpha \partial_h$ ensuite l'algèbre dérivée (ce qu'on peut faire, localement, par le calcul d'un nombre fini de crochets de Lie en partant des vecteurs $\hat{X}_\alpha$), et de vérifier si $\bar{\Delta}_\varphi$ est un champ de n -directions, c'est-à-dire s'il a en tout point dimension constante et égale à n . S'il est ainsi, l'expression locale $h = u(q^i)$ d'une feuille de $\bar{\Delta}_\varphi$ fournit le potentiel cherché. D'autre part, comme $\bar{\Delta}_\varphi$ est de classe $\mathcal{S}$, on prend la 1-forme $\mu \in \mathcal{X}^*(Q)$ fermée associée à $\bar{\Delta}_\varphi$; on doit alors intégrer le système

$$\partial_i u = \mu_i,$$

où $\hat{\mu}_i$ sont les composantes de μ .

(*) Séance du 3 octobre 1977.

⁽¹⁾ Tous les champs que nous allons considérer seront supposés de classe C^∞ .

⁽²⁾ J. DIEUDONNÉ, *Élément d'Analyse*, Gauthier-Villars, Paris, 1970.

⁽³⁾ Si $\Gamma = \mathcal{X}(Q)$ on a la définition usuelle; dans ces cas $\mathcal{C}(\varphi)$ se réduit à un seul élément : φ même.

⁽⁴⁾ La projection horizontale h est une fonction réelle différentiable sur $Q \times \mathbf{R}$, donc dh est bien défini.

⁽⁵⁾ Cette condition peut s'écrire aussi : $[\partial_h, \Delta] \subseteq \Delta$.

⁽⁶⁾ Par *feuille* d'un champ de p -directions on entend une variété intégrale connexe maximale.

⁽⁷⁾ Ce procédé est valable localement aussi dans le cas le plus général d'une forme fermée : on retrouve ainsi le lemme de Poincaré pour les 1-formes.

⁽⁸⁾ W. L. CHOW, *Math. Ann.*, 117, 1940, p. 98-105.

⁽⁹⁾ R. HERMANN, *Differential Geometry and the Calculus of Variations*, Academic Press, 1968, sect. 18.

⁽¹⁰⁾ Un exemple est donné par le système mécanique formé par une sphère roulant sans glisser sur un plan fixe. Une preuve « constructive » de l'accessibilité pour ce système est donnée dans : L. A. PARS, *A Treatise on Analytical Dynamics*, Heinemann, 1968, sect. 5.10.

Università di Torino,
Istituto di Fisica Matematica,
Via Carlo Alberto, 10
10123 Torino,
Italia.