ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Estratto dai *Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali*
Serie VIII, vol. LXII, fasc. 1 - Gennaio 1977

Fisica matematica. — *Integrabilità per separazione delle variabili delle equazioni alle derivate parziali lineari del secondo ordine interessanti la fisica–matematica* (*). Nota di SERGIO BENENTI, presentata (**) dal Socio C. AGOSTINELLI.

SUMMARY. — We state a local characterization of the Riemannian manifolds upon which second order linear partial differential equations of mathematical physics are integrable by separation of the variables. Among the results we have a generalizazion of a classical theorem of Eisenhart on the separability of the Schrödinger equation in orthogonal coordinates.

1. INTRODUZIONE

In tre brevi Note [1], [2] e [3], di recente pubblicazione, il cui contenuto è stato successivamente sviluppato con maggiori dettagli in [4], si è trattato dell'integrazione per separazione delle variabili dell'equazione di Hamilton-Jacobi, almeno nel caso di sistemi dinamici olonomi a vincoli indipendenti dal tempo e conservativi, ricercando, prima di ogni altra cosa, le proprietà intrinseche delle varietà riemanniane delle configurazioni di tali sistemi, facendo ovviamente uso delle tecniche della geometria differenziale. L'attacco al problema da questo punto di vista geometrico-intrinseco si è presentato, almeno concettualmente, assai semplice ed ha consentito di ottenere facilmente la forma generale dei coefficienti dell'energia cinetica e del potenziale evitando trattazioni più complesse, precedentemente usate nella vasta letteratura (cfr. [5], [6], [7]).

Non solo per comodità di linguaggio ma anche per esigenze concettuali, ulteriormente confermate nel presente lavoro, è parso conveniente introdurre la nozione di *struttura di separabilità* (*locale*) su di una varietà riemanniana. L'esistenza di una tale struttura equivale, per definizione, alla possibilità di integrare l'equazione di Hamilton–Jacobi delle geodetiche per separazione (completa) delle variabili. Se n è la dimensione delle varietà possono aversi $n + 1$ tipi di strutture di separabilità; esse sono state indicate col simbolo $\mathcal{S}_{n,r}$ dove r è un intero compreso tra 0 ed n. Una struttura di separabilità trova la sua caratterizzazione geometrica nel seguente:

TEOREMA ([2]). *C.n.s. affinchè una varietà riemanniana* V_n *ammetta una struttura di separabilità* (*locale*) $\mathcal{S}_{n,r}$ *è che* (*localmente*) *esistano* r *vettori di*

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica–Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1976.

Killing $\underset{\alpha}{X}$ *indipendenti ed* $n-r$ *tensori doppi di Killing* $\underset{a}{K}$ *indipendenti, permutabili nell'algebra di Lie dei tensori simmetrici*:

$$[\underset{\alpha}{X}, \underset{\beta}{X}] = 0 \quad , \quad [\underset{\alpha}{X}, \underset{a}{K}] = 0 \quad , \quad [\underset{a}{K}, \underset{b}{K}] = 0 \text{ (1)},$$

tali che i tensori abbiano in comune $n-r$ *autovettori* $\underset{a}{X}$ *ortogonali agli* $\underset{\alpha}{X}$, *permutabili con questi e fra loro*:

$$[\underset{i}{X}, \underset{h}{X}] = 0 \text{ (2)}.$$

L'esistenza di una struttura di separabilità si presenta come requisito fondamentale per l'integrazione per separazione delle variabili di altre equazioni alle derivate parziali interessanti la fisica matematica, quali l'equazioni di Laplace, di Poisson, di Helmholtz, di Schrödinger. In questo lavoro viene dimostrato il seguente Teorema, riguardante l'equazione del tipo di Helmholtz omogenea, che costituisce la premessa comune alla trattazione di tutti gli altri tipi di equazioni:

TEOREMA. *C.n.s. affinchè l'equazione*

$$\Delta\Psi + k\Psi = 0 \text{ (3)} \tag{1}$$

sia integrabile per separazione delle variabili (4), *cioè ammetta in un certo sistema di coordinate* (x^i) *un integrale del tipo*

$$\Psi = \prod_{i=1}^{n} \Psi_i(x^i), \tag{2}$$

è che la varietà V_n *ammetta una struttura di separabilità in cui i vettori* $\underset{a}{X}$ *siano autovettori del tensore di Ricci.*

La dimostrazione del Teorema, che generalizza fra l'altro un classico risultato di Eisenhart [9] relativo all'equazione di Schrödinger in coordinate ortogonali, è basata su di una tecnica già utilmente sviluppata in [4] e [3]

(1) Per qualche ragguaglio sulla definizione del prodotto [,] fra tensori simmetrici e di tensore di Killing si veda per esempio [8]. Ricordiamo soltanto brevemente che ad un tensore di Killing di ordine s corrisponde un integrale primo omogeneo di ordine s dell'equazione delle geodetiche; due integrali sono in involuzione, cioè la loro parentesi di Poisson è nulla, se e solo se i corrispondenti tensori di Killing commutano.

(2) I primi indici latici $a, b, c, \cdots$ s'intenderanno sempre variabili da 1 ad $m = n-r$, quelli greci da $m+1$ ad n; gli indici latini $h, i, \cdots$ s'intenderanno variabili da 1 ad n. La somma rispetto agli indici ripetuti, nel rispettivo campo di variabilità, è generalmente sottintesa a meno che non compaia esplicitamente l'indicazion « n.s. » (non sommato).

(3) k è una costante, Δ è il *laplaciano*: $\Delta\Psi = \delta d\Psi = g^{ij}\nabla_i \partial_j \Psi$.

(4) In tal caso diremo brevemente che l'equazione è *separabile*.

che si avvale del riferimento fornito dai vettori $\underset{i}{X}$. Questa consente di stabilire in maniera assai rapida le condizioni sulle componenti del tensore metrico.

2. Condizioni di separabilità

Ponendo $\Psi = e^{\psi}$ l'equazione in esame è equivalente, in un sistema di coordinate (x^i), alla seguente:

$$g^{ij}(\partial_{ij}\psi + \partial_i\psi\partial_j\psi) - C^h\partial_h\psi = k \qquad \left(\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}\right), \tag{3}$$

dove

$$C^h = g^{ij}\,\Gamma^h_{ij}, \tag{4}$$

essendo g^{ij} le componenti contravarianti del tensore metrico di V_n e Γ^h_{ij} i coefficienti della connessione riemanniana.

Supponiamo dunque che l'equazione (3) ammetta nelle coordinate (x^i) un integrale del tipo

$$\psi = \sum_{i=1}^{n}\psi_i(x^i). \tag{5}$$

Scritta la (3) nella forma:

$$g^{ij}\partial_i\psi\partial_j\psi - V(\partial^2\psi, \partial\psi, x) = k \quad , \quad V \equiv C^h\partial_h\psi - g^{ij}\partial_{ij}\psi, \tag{6}$$

e considerata l'equazione (del tipo di Hamilton–Jacobi)

$$g^{ij}\partial_i W\partial_j W - U = k \quad , \quad U(x) \equiv V|_{\psi=\Sigma\psi_i(x^i)}, \tag{7}$$

è ovvio che questa ammetterà come integrale proprio la funzione $W = \psi = \sum_{i=1}^{n}\psi_i(x^i)$; con ciò concludiamo immediatamente, in virtù anche di quanto osservò Levi-Civita in [12], che V_n ha necessariamente una struttura di separabilità.

Assunto che tale struttura sia di tipo $\mathscr{S}_{n,r}$, fa allora comodo passare a *coordinate separabili normali* (y^i). Tali coordinate sono individuate dai vettori $\underset{i}{X}$ che, commutando, formano un riferimento olonomo. In queste coordinate, legate alle precedenti da relazioni del tipo (cfr. [1] e [4]):

$$y^a = x^a \quad , \quad y^\nu = \sum_{i=1}^{n}\overset{\nu}{\Xi}_i(x^i) \tag{8}$$

(modulo una costante), la funzione W, e quindi ψ, è ancora somma di funzioni di una singola coordinata e precisamente del tipo:

$$\psi = \sum_{a=1}^{m} \overline{\psi}_a (y^a) + \underset{\nu}{\alpha}\, y^\nu, \tag{9}$$

avendosi

$$\underset{\nu}{\partial}\psi = \underset{\nu}{\alpha} = \text{cost.} \qquad \left(\underset{i}{\partial} \equiv \frac{\partial}{\partial y^i}\right). \tag{10}$$

In più i coefficienti della metrica, che indichiamo con $\overset{ih}{g}$ (5), di cui soltanto $\overset{aa}{g}$ e $\overset{\alpha\beta}{g}$ non si annullano identicamente, non dipendono dalle coordinate (y^ν) e soddisfano alle condizioni differenziali seguenti (le quali altro non sono che le condizioni di Levi-Civita [12] in coordinate separabili normali):

$$\begin{cases} \overset{aa}{g}\,\overset{bb}{g}\,\underset{ab}{\partial}\,\overset{cc}{g} - \overset{aa}{g}\,\underset{a}{\partial}\,\overset{bb}{g}\,\underset{b}{\partial}\,\overset{cc}{g} - \overset{bb}{g}\,\underset{b}{\partial}\,\overset{aa}{g}\,\underset{a}{\partial}\,\overset{cc}{g} = 0 \\ \overset{aa}{g}\,\overset{bb}{g}\,\underset{ab}{\partial}\,\overset{\alpha\beta}{g} - \overset{aa}{g}\,\underset{a}{\partial}\,\overset{bb}{g}\,\underset{b}{\partial}\,\overset{\alpha\beta}{g} - \overset{bb}{g}\,\underset{b}{\partial}\,\overset{aa}{g}\,\underset{a}{\partial}\,\overset{\alpha\beta}{g} = 0 \end{cases} \qquad (a \neq b\,,\ \text{n.s.}) \tag{11}$$

In [4] si è visto che le soluzioni delle (11) possono tutte mettersi nella seguente forma:

$$\overset{aa}{g} = \underset{m}{u^a} \quad , \quad \overset{\alpha\beta}{g} = \overset{\alpha\beta}{\zeta_a}\,\underset{m}{u^a} + \overset{\alpha\beta}{\zeta_0} \tag{12}$$

dove $\|\underset{b}{u^a}\|$ è una matrice regolare $m \times m$ $(m = n - r)$ (di cui dunque $\underset{m}{u^a}$ rappresenta l'm-sima linea) la cui inversa $\|\overset{b}{u_a}\|$ è fatta di funzioni che al più dipendono dalla variabile corrispondente all'indice in basso, così come le $\overset{\alpha\beta}{\zeta_a} = \overset{\beta\alpha}{\zeta_a}$, e dove infine le $\overset{\alpha\beta}{\zeta_0} = \overset{\beta\alpha}{\zeta_0}$ sono delle costanti.

In coordinate separabili normali, avendosi, come subito si verifica, $\underset{\mu\nu}{\overset{\alpha}{\Gamma}} = 0$, $\underset{ab}{\overset{\alpha}{\Gamma}} = 0$ e quindi $\overset{\alpha}{C} = 0$, la funzione U che compare nella (7), vista anche la (10), si riduce semplicemente a:

$$U = \underset{a}{\overset{a}{C}}\,\pi - \overset{aa}{g}\,\underset{a}{\pi'} \quad , \quad \underset{a}{\pi} \equiv \underset{a}{\partial}\,\psi = \frac{d\overline{\psi}_a}{dy^a} \quad , \quad \underset{a}{\pi'} \equiv \underset{aa}{\partial}\,\psi = \frac{d^2\overline{\psi}_a}{dy^{a2}}. \tag{13}$$

Essa deve soddisfare alle condizioni di separabilità (cfr. [4]):

$$\overset{aa}{g}\,\overset{bb}{g}\,\underset{ab}{\partial} U - \overset{aa}{g}\,\underset{a}{\partial}\,\overset{bb}{g}\,\underset{b}{\partial} U - \overset{bb}{g}\,\underset{b}{\partial}\,\overset{aa}{g}\,\underset{a}{\partial} U = 0 \qquad (a \neq b\,,\ \text{n.s.}). \tag{14}$$

(5) Conveniamo di porre gli indici relativi alla base $\underset{i}{X}$ al di sotto o al di sopra del simbolo dell'oggetto geometrico.

Se si introduce l'espressione (13) nelle (14) si vede subito che i termini in $\underset{a}{\partial}\,\underset{a}{\pi'}$ si eliminano a vicenda e dovendosi annullare i coefficienti delle π e π', si ottengono rispettivamente le condizioni differenziali seguenti:

$$\overset{aa}{g}\,\overset{bb}{g}\,\underset{ab}{\partial}\overset{c}{C} - \overset{aa}{g}\,\underset{a}{\partial}\overset{bb}{g}\,\underset{b}{\partial}\overset{c}{C} - \overset{bb}{g}\,\underset{b}{\partial}\overset{aa}{g}\,\underset{a}{\partial}\overset{c}{C} = 0 \qquad (a \neq b\,,\ \text{n.s.})\,, \tag{15}$$

e

$$\boxed{\underset{b}{\partial}(\underset{aa}{g}\overset{a}{C}) = 0 \qquad (b \neq a\,,\ \text{n.s.})\,,} \tag{16}$$

Le (15) sono tuttavia conseguenze differenziali delle (16). Queste infatti equivalgono alle seguenti:

$$\overset{a}{C} = \overset{aa}{g}\,\varphi_a \quad (a\ \text{n.s.}) \quad , \quad \partial_b\,\varphi_a = 0 \quad (b \neq a)\,, \tag{17}$$

per cui le (15) risultano identicamente soddisfatte. Le (16) sono dunque le uniche condizioni di cui si deve tener conto oltre alle (11); in altri termini esse costituiscono l'unico vincolo da imporre alla forma (12) dei coefficienti della metrica per la separabilità dell'equazione data; tale vincolo oltre che necessario è anche sufficiente come si può verificare direttamente. Se infatti esiste un sistema di coordinate (y^i) in cui le componenti del tensore metrico hanno la forma (12), in virtù del vincolo (17), l'equazione (3), scritta in tali coordinate, assume la forma:

$$\underset{m}{u}^a\,[(\underset{a}{\partial}\psi)^2 + \underset{aa}{\partial}\psi - \varphi_a\,\underset{a}{\partial}\psi + \overset{\mu\nu}{\zeta_a}(\underset{\mu}{\partial}\psi\,\underset{\nu}{\partial}\psi + \underset{\mu\nu}{\partial}\psi)] + \overset{\mu\nu}{\zeta_0}(\underset{\mu}{\partial}\psi\,\underset{\nu}{\partial}\psi + \underset{\mu\nu}{\partial}\psi) = k\,.$$

Si può cercare di integrarla considerando $\psi = \underset{\nu}{\alpha}\,y^\nu + \bar{\psi}$ con $\underset{\nu}{\alpha}$ costanti arbitrariamente scelte e $\bar{\psi}$ funzione delle sole (y^a). Ne segue allora l'equazione

$$\underset{m}{u}^a\,[(\underset{a}{\partial}\bar{\psi})^2 + \underset{aa}{\partial}\bar{\psi} - \varphi_a\,\underset{a}{\partial}\bar{\psi} + \overset{\mu\nu}{\zeta_a}\,\underset{\mu}{\alpha}\,\underset{\nu}{\alpha}] = k^* \quad , \quad k^* \equiv k - \overset{\mu\nu}{\zeta_0}\,\underset{\mu}{\alpha}\,\underset{\nu}{\alpha} = \text{cost}\,,$$

la quale si può separare, analogamente a quanto visto in [4] per l'equazione di Hamilton-Jacobi, nelle m equazioni differenziali ordinarie del tipo di Riccati (cfr. anche [10] e [11]):

$$\frac{d^2\bar{\psi}_a}{dy^{a2}} + \left(\frac{d\bar{\psi}_a}{dy^a}\right)^2 - \varphi_a\,\frac{d\bar{\psi}_a}{dy^a} + \overset{\mu\nu}{\zeta_a}\,\underset{\mu}{\alpha}\,\underset{\nu}{\alpha} - \underset{b}{\alpha}\,\overset{b}{u}_a = 0$$

essendo $\underset{m}{\alpha} = k^*$ e $\underset{b}{\alpha}$ con $b \neq m$ altre costanti arbitrarie.

3. Identità notevoli per le strutture di separabilità

Le condizioni (16) si possono ulteriormente sviluppare sulla base di alcune notevoli identità conseguenti alle (11) che ora passiamo ad illustrare.

Poiché in coordinate separabili normali si ha $\overset{ai}{g} = 0$ per $a \neq i$ e $\underset{\nu}{\partial}\overset{ih}{g} = 0$, i soli coefficienti della connessione riemanniana che non si annullano identicamente sono:

$$
(18) \qquad \begin{cases} \overset{a}{\underset{\alpha\beta}{\Gamma}} = -\frac{1}{2}\overset{aa}{g}\,\underset{a}{\partial}\,\underset{\alpha\beta}{g} \quad (a \text{ n.s.}) \quad , \quad \overset{\beta}{\underset{\alpha a}{\Gamma}} = \frac{1}{2}\overset{\beta\gamma}{g}\,\underset{a}{\partial}\,\underset{\alpha\gamma}{g}, \\ \overset{a}{\underset{ac}{\Gamma}} = \frac{1}{2}\overset{aa}{g}\,\underset{c}{\partial}\,\underset{aa}{g} \quad (a \text{ n.s.}) \quad , \quad \overset{b}{\underset{aa}{\Gamma}} = -\frac{1}{2}\overset{bb}{g}\,\underset{b}{\partial}\,\underset{aa}{g} \quad (a \neq b\,, \text{ n.s.}). \end{cases}
$$

Abbiamo allora

$$
\overset{a}{C} \equiv \overset{ij}{g}\,\overset{a}{\underset{ij}{\Gamma}} = \overset{aa}{g}\,(\overset{aa}{g}\,\underset{a}{\partial}\,\underset{aa}{g} - \frac{1}{2}\overset{ij}{g}\,\underset{a}{\partial}\,\underset{ij}{g}) \qquad (a \text{ n.s.}),
$$

per cui, posto $g \equiv \det \|\underset{ij}{g}\| = \tilde{g} \cdot \prod_{c=1}^{m} \underset{cc}{g}$ con $\tilde{g} \equiv \det \|\underset{\alpha\beta}{g}\|$, risulta:

$$
(19) \qquad \underset{aa}{g}\,\overset{a}{C} = -\underset{a}{\partial}\log\overset{aa}{g} - \frac{1}{2}\underset{a}{\partial}\log g = -\underset{a}{\partial}\log\overset{aa}{g} + \frac{1}{2}\sum_{c=1}^{m}\underset{a}{\partial}\log\overset{cc}{g} - \frac{1}{2}\underset{a}{\partial}\log\tilde{g} \qquad (a \text{ n.s.}).
$$

Se ora consideriamo la derivata del primo addendo fatta rispetto a y^b con $b \neq a$ abbiamo, in virtù delle $(11)_{\mathrm{I}}$:

$$
(20) \qquad \underset{ab}{\partial}\log\overset{aa}{g} = \underset{a}{\partial}\log\overset{aa}{g}\,\underset{b}{\partial}\log\overset{bb}{g},
$$

da cui si deduce che tale quantità è simmetrica rispetto agli indici a e b. Grazie a questa circostanza si può affermare che

$$
\underset{ab}{\partial}\log\overset{aa}{g} = \frac{1}{2}(\underset{ab}{\partial}\log\overset{aa}{g} + \underset{ab}{\partial}\log\overset{bb}{g});
$$

dalla (19) segue allora l'identità:

$$
(21) \qquad \underset{b}{\partial}(\underset{aa}{g}\,\overset{a}{C}) = \frac{1}{2}\sum_{c \neq a,b}\underset{ab}{\partial}\log\overset{cc}{g} - \frac{1}{2}\underset{ab}{\partial}\log\tilde{g}.
$$

Le condizioni di separabilità sono condizioni differenziali del secondo ordine sui coefficienti della metrica; c'è quindi da attendersi che esse possano avere delle conseguenze sui tensori di curvatura di V_n. Tenuto conto delle (18), il calcolo mostra che per le componenti secondo coordinate separabili normali del tensore di Riemann si ha il quadro seguente:

$$
(22)\quad
\begin{cases}
R_{abcd} = 0 \quad (a, b, c, d \neq) \quad , \quad R_{abc\alpha} = 0 \quad , \quad R_{a\alpha\beta\gamma} = 0, \\[4pt]
R_{ab\alpha\beta} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu}(\partial_a g_{\alpha\mu} \partial_b g_{\beta\nu} - \partial_a g_{\beta\mu} \partial_b g_{\alpha\nu}), \\[4pt]
R_{\alpha a\beta b} = \frac{1}{2} \partial_{ab} g_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \partial_a g_{\alpha\mu} \partial_b g_{\beta\nu} - \frac{1}{4} (g^{aa} \partial_b g_{aa} \partial_a g_{\alpha\beta} + g^{bb} \partial_a g_{bb} \partial_b g_{\alpha\beta}) \quad (a \neq b\,;\ \text{n.s.}), \\[4pt]
R_{\alpha a\beta a} = \frac{1}{2} (\partial_{aa} g_{\alpha\beta} - g^{aa} \partial_a g_{aa} \partial_a g_{\alpha\beta}) - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \partial_a g_{\alpha\mu} \partial_b g_{\beta\nu}, \\[4pt]
R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{4} g^{cc} (\partial_c g_{\alpha\gamma} \partial_c g_{\beta\delta} - \partial_c g_{\beta\gamma} \partial_c g_{\alpha\delta}), \\[4pt]
R_{cacb} = \frac{1}{2} \partial_{ab} g_{cc} - \frac{1}{4} (g^{cc} \partial_a g_{cc} \partial_b g_{cc} + g^{aa} \partial_a g_{cc} \partial_b g_{aa} + g^{bb} \partial_b g_{cc} \partial_a g_{bb}) \quad (a, b, c \neq\,;\ \text{n.s.}), \\[4pt]
R_{abab} = \frac{1}{2} (\partial_{aa} g_{bb} + \partial_{bb} g_{aa}) - \frac{1}{4} [g^{aa} (\partial_b g_{aa})^2 + g^{bb} (\partial_a g_{aa})^2] - \\
\qquad - \frac{1}{2} (g^{aa} \partial_a g_{aa} \partial_a g_{bb} + g^{bb} \partial_b g_{bb} \partial_b g_{aa}) + \frac{1}{4} g^{cc} \partial_c g_{aa} \partial_c g_{bb} \quad (a \neq b\,,\ \text{n.s.}).
\end{cases}
$$

Per quel che riguarda il tensore di Ricci le $(22)_{\mathrm{II,III}}$ dànno subito

$$
(23)\qquad R_{\alpha a} = 0 .
$$

D'altra parte la $(22)_{\mathrm{VIII}}$ può porsi nella forma:

$$
R_{cabc} = \frac{1}{4} g_{cc}^{2} (2 \partial_{ab} g^{cc} - 3 g_{cc} \partial_a g^{cc} \partial_b g^{cc} + g_{aa} \partial_b g^{aa} \partial_a g^{cc} + g_{bb} \partial_a g^{bb} \partial_b g^{cc}) \quad (a, b, c \neq\,;\ \text{n.s.}),
$$

mentre dalla $(22)_{\mathrm{V}}$, ricordato che $g^{\alpha\beta} \mathrm{d} g_{\alpha\beta} = \mathrm{d} \log \tilde{g}$, segue:

$$
g^{\alpha\beta} R_{\alpha ab\beta} = \frac{1}{4} (\partial_a g^{\alpha\beta} \partial_b g_{\alpha\beta} - 2 \partial_{ab} \log \tilde{g} - g_{aa} \partial_b g^{aa} \partial_a \log \tilde{g} - g_{bb} \partial_a g^{bb} \partial_b \log \tilde{g}) \quad (a, b \neq\,;\ \text{n.s.}).
$$

Se ora si guarda alle condizioni (11), finora non intervenute, si trova, in virtù delle prime:

$$
R_{cabc} = \frac{3}{4} g_{cc}^{2} (\partial_{ab} g^{cc} - g_{cc} \partial_a g^{cc} \partial_b g^{cc}) = \frac{3}{4} g_{cc} \partial_{ab} \log g^{cc} \qquad (a, b, c \neq\,;\ \text{n.s.}),
$$

mentre, poichè saturando le $(11)_{\mathrm{II}}$ con $g_{\alpha\beta}$ si ricava

$$
\partial_{ab} \log \tilde{g} + \partial_a g^{\alpha\beta} \partial_b g_{\alpha\beta} - g_{bb} \partial_a g^{bb} \partial_b \log \tilde{g} - g_{aa} \partial_b g^{aa} \partial_a \log \tilde{g} = 0 \qquad (a \neq b\,;\ \text{n.s.}),
$$

risulta:

$$\overset{\alpha\beta}{g} \underset{\alpha a b \beta}{R} = -\frac{3}{4} \underset{ab}{\partial} \log \tilde{g} \qquad (a \neq b) .$$

Possiamo dunque concludere, ricordato che $\underset{aaba}{R} = \underset{babb}{R} = 0$, che in una struttura di separabilità sussiste l'identità:

$$\boxed{\underset{ab}{R} = \frac{3}{4} \underset{ab}{\partial} \left(\sum_{c \neq a,b} \log \overset{cc}{g} - \log \tilde{g} \right) \qquad (a \neq b)} , \tag{24}$$

e quindi anche, vista la (21):

$$\boxed{\underset{ab}{R} = \underset{b}{\partial} (g \overset{a}{\underset{aa}{C}}) = \underset{a}{\partial} (g \overset{b}{\underset{bb}{C}}) \qquad (a \neq b\,;\ \text{n.s.})} . \tag{25}$$

È ora palese l'utilità di questi calcoli: l'annullarsi del secondo membro della (25) caratterizza, insieme all'esistenza di una struttura di separabilità, l'integrabilità per separazione delle variabili dell'equazione (1). La condizione $\underset{ab}{R} = 0$ $(a \neq b)$, insieme alla (23) implica ovviamente che i vettori $\underset{a}{X}$ sono autovettori del tensore di Ricci e viceversa, dunque il teorema enunciato nell'introduzione è dimostrato.

4. Osservazioni

1) In quanto precede è implicita l'ipotesi $m > 1$; i casi $m = 0\,,\,1$ sono banali perché non vi è più di una coordinata non ignorabile.

2) Le considerazioni svolte si estendono facilmente al caso dell'equazione di Schrödinger:

$$\Delta\Psi + k\,(E - U)\,\Psi = 0\,. \tag{26}$$

Si vede infatti che per la funzione potenziale U devono sussistere condizioni differenziali del tipo (14). Le medesime condizioni si hanno (cfr. [4]) per la separabilità dell'equazione di Hamilton–Jacobi

$$|\,dW\,|^2 - U = E\,, \tag{27}$$

per cui U è necessariamente della forma $U = U_a \overset{aa}{g} +$ cost. con U_a funzioni della sola variabile corrispondente all'indice. Concludiamo pertanto che: *l'equazione di Schrödinger* (26) *è separabile se e solo se lo è l'equazione di*

Hamilton–Jacobi ed in più sussistono le condizioni (16) le quali, come si verifica facilmente partendo dalle (8), assumono nelle coordinate separabili generiche (cfr. l'Oss. 6)) la forma analoga (cfr. anche [11]):

$$\partial_b\left[(g^{aa})^{-1}\,\mathrm{C}^a\right]=0 \qquad (b \neq a\,,\ \text{n.s.})\,.$$

3) Per le componenti $\underset{\alpha\beta}{\mathrm{R}}$ del tensore di Ricci non si hanno delle particolarità che ne giustifichino, almeno in questa sede, la scrittura per esteso. Si può tuttavia osservare che nel caso di coordinate separabili ortogonali, che, come si potrebbe facilmente riconoscere, sono necessariamente normali, si ha $\underset{\alpha\beta}{\mathrm{R}}=0\ (\alpha\neq\beta)$ e quindi il tensore di Ricci è diagonalizzato; le linee coordinate individuano pertanto le congruenze principali della varietà. È questo il caso studiato da Eisenhart [9]. Si osservi che nelle strutture di tipo $\mathscr{S}_{n,0}$, $\mathscr{S}_{n,1}$ ed $\mathscr{S}_{n,n}$ le coordinate separabili normali sono necessariamente ortogonali (cfr. [3]).

4) La separabilità dell'equazione di Scrödinger (26) equivale alla separabilità dell'equazione di Hamilton-Jacobi (27):

a) nelle varietà euclidee (perchè il tensore di Ricci R è nullo);

b) nelle varietà bidimensionali (perchè $\mathrm{R}=xg$);

c) nelle strutture di tipo $\mathscr{S}_{n,n}$ (perchè V_n è necessariamente euclidea) e di tipo $\mathscr{S}_{n,n-1}$ (cfr. l'Oss. 1).

5) Le considerazioni svolte valgono anche in varietà pseudoriemanniane (cioè per metriche indefinite) se si escludono, per il momento, i casi in cui i vettori di Killing $\underset{\alpha}{\mathrm{X}}$ generano spazi a metrica degenere, casi, che possiamo chiamare *degeneri*, non ancora studiati; naturalmente nelle formule sopra riportate occorrerà considerare i valori assoluti degli argomenti logaritmici. Tenuto conto di tale limitazione si può in particolare concludere che in una regione dello spazio tempo vuota di materia e non sede di altri campi ($\mathrm{R}=0$) l'equazione di Hamilton–Jacobi delle geodetiche è separabile se e solo se lo è l'equazione (1).

6) Resta da risolvere il problema della determinazione esplicita della forma dei coefficienti della metrica che consentono la separabilità dell'equazione (1). A questo problema sono dedicati i lavori [11] e [13], ma esso risulta più facilmente attaccabile se si fa uso di coordinate separabili normali: si dovranno stabilire le restrizioni che le condizioni (16) apportano alla forma generale (12) dei coefficienti della metrica. Il passaggio a coordinate separabili generiche è sempre possibile grazie alle trasformazioni (8) che sono le più generali conservanti la separabilità dell'equazione di Hamilton–Jacobi (come si è visto in [4]). Esse conservano ovviamente anche la separabilità dell'equazione (1) (oppure (26)) in virtù del suo carattere invariante: ogni soluzione è di conseguenza uno *scalare* (invariante); se questa

ha la forma (9) delle coordinare (y^i), nelle nuove coordinate (x^i) essa è data da:

$$\psi = \underset{\nu}{\alpha} \overset{\nu}{\Xi}_\mu (x^\mu) + \underset{\nu}{\alpha} \overset{\nu}{\Xi}_a (x^a) + \bar{\psi}_a (x^a) ,$$

ed è quindi ancora somma di funzioni di una singola variabile.

Riferimenti Bibliografici

[1] S. Benenti (1976) - «C. R. Acad. Sc. Paris», *283A* (4), 215-218.

[2] S. Benenti (1976 - « Reports on Math. Phys. » (in corso di stampa), comunicazione tenuta al « Symposium on Methods of Differential Geometry in Physics and Mechanics », Varsavia, Giugno 1976.

[3] S. Benenti (1976) - Atti 3° Congresso AIMETA, Cagliari, Ott. 1976 (in corso di stampa).

[4] S. Benenti (1976) - «Sem. Mat. Univ. Pol. Torino», *34*, 431-463.

[5] C. Agostinelli (1937) - «Mem. Acc. Sc. Torino», *69*, 1-54.

[6] M. S. Iarov-Iarovoi (1963) - « PMM », *27* (6), 973-987.

[7] A. Huaux (1976) - « Ann. Mat. Pura e Appl. », ser. IV, *108*, 251-282.

[8] P. Sommers (1973) - « J. Math. Phys. », *14* (6), 787-790.

[9] L. P. Eisenhart (1934) - « Ann. Math. », *35* (2), 284-305.

[10] C. Agostinelli (1957-58) - « Atti Acc. Sc. Torino », *92*.

[11] C. Agostinelli (1958) - « Boll. U.M.I. », *13*, 11-23.

[12] T. Levi-Civita (1904) - «Math. Ann. », *59*, 383-397.

[13] P. Havas (1975) - « J. Math. Phys. », *18* (7), 1461-1468.

ROMA, 1977 — Dott. G. Bardi, Tipografo dell'Accademia Nazionale dei Lincei