III CONGRESSO NAZIONALE DELL'ASSOCIAZIONE ITALIANA
DI MECCANICA TEORICA ED APPLICATA
Cagliari, 13-16 ottobre 1976

PROPRIETA' INTRINSECHE DEI SISTEMI DINAMICI SEPARABILI E CONDIZIONI NECESSARIE PER L'INTEGRABILITA' DELL'EQUAZIONE DI HAMILTON-JACOBI MEDIANTE SEPARAZIONE DELLE VARIABILI

Sergio BENENTI
Istituto di Meccanica Razionale, Università di Torino

Sommario - Vengono stabilite alcune notevoli proprietà intrinseche delle varietà riemanniane delle configurazioni dei sistemi dinamici separabili, in particolare l'esistenza di gruppi abeliani di movimenti. Si dimostra l'esistenza di particolari classi di coordinate separabili, dette "normali", tramite le quali è possibile stabilire in maniera assai semplice la forma dei coefficienti dell'energia cinetica e del potenziale necessaria e sufficiente per la separabilità.

Abstract - We state some intrinsic properties of the Riemannian configuration manifold of separable dynamical systems, in particular the existence of Abelian groups of motions. We point out the existence of a class of particular separable coordinates, called "normal", by which it is possible to give in a simple manner the necessary and sufficient conditions on the kinetic energy coefficients and potential function for separability.

1. Introduzione

Un sistema ad n gradi di libertà, a vincoli indipendenti dal tempo, conservativo, è detto separabile se ammette un sistema di coordinate lagrangiane x^i (gli indici latini i, j ... s'intenderanno variabili da 1 a n) tale che l'equazione ridotta di Hamilton-Jacobi:

$$\frac{1}{2} a^{ij} \partial_i W \partial_j W - U = E \qquad \left(\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\right), \tag{1}$$

dove gli a^{ij} sono i coefficienti dell'energia cinetica $K = \frac{1}{2} a^{ij} p_i p_j$, U è il potenziale ed E la costante energetica, ammette un integrale completo esprimibile come somma di funzioni di una singola coordinata, cioè del tipo:

(2) $$W = \sum_{i=1}^{n} W_i(x^i, c) \quad ,$$

dove con c è da intendersi un insieme di n costanti arbitrarie essenziali.

Poichè i sistemi dinamici separabili costituiscono gli unici casi in cui il metodo di Hamilton-Jacobi è stato utilmente impiegato per l'esauriente trattazione di un problema dinamico, è chiara l'importanza, non solo dal punto di vista teorico, di poter produrre dei criteri di separabilità, cioè dei criteri atti a stabilire se un assegnato sistema dinamico può ammettere, o ammette, un sistema di coordinate separabili. Nel passato, e fino ai nostri giorni, ci si è però rivolti alla soluzione di un problema ristretto, cioè alla ricerca della più generale forma delle funzioni a^{ij} ed U affinchè l'equazione (1) ammetta una soluzione del tipo (2). Occorre tuttavia tener presente che la separabilità è una proprietà connessa non solo alla opportuna scelta di coordinate ma, prima ancora, alla natura del sistema dinamico; in altri termini è la struttura intrinseca del sistema che può o no permettere l'esistenza di un sistema di coordinate separabili. Di qui la necessità di indagare sulle proprietà intrinseche cioè, in un primo approccio, sulla struttura riemanniana delle varietà delle configurazioni dei sistemi separabili. A tale scopo si possono usare vantaggiosamente le tecniche ed il linguaggio della geometria differenziale che, oltre alla formulazione sintetica della meccanica analitica, fornisce utili strumenti ed una guida sicura nell'affrontare e risolvere problemi di questa natura. Come infatti ad esempio si vedrà, sarà proprio la conoscenza di alcune "proprietà geometriche" che consentirà di risolvere senza sforzo il problema ristretto, su cui da decenni ci si è dibattuti infruttuosamente.

2. Osservazioni su alcuni contributi alla soluzione del problema "ristretto".

Com'è ben noto, nel 1891 Stäckel [1] caratterizzò col suo famoso teorema il potenziale e l'energia cinetica dei sistemi separabili nel caso particolare in cui quest'ultima è in forma ortogonale (contiene cioè solo termini quadratici nelle velocità lagrangiane). Nel 1904 Levi-Civita gettò le basi per la trattazione completa del problema stabilendo le condizioni differenziali sulle funzioni K ed U necessarie e sufficienti per la separabilità, dopo di che affrontò la loro integrazione portandola a termine solo per il caso bidimensionale, mentre per $n > 2$ qualsiaisi considerò un caso particolare, che porta il suo nome,

in cui la varietà delle configurazioni è euclidea (cioè piatta) [2].

Un contributo sostanziale alla soluzione del problema fu apportato da Dall' Acqua [3] che, dopo aver discusso minutamente il caso tridimensionale in un lavoro precedente [4], riuscì a dimostrare una congettura di Burgatti [5], cioè che dalle ipotesi di separabilità discendono necessariamente per i momenti cinetici le espressioni seguenti (1):

$$(3) \qquad p_a = \overset{\nu}{\xi}_a \underset{\nu}{\alpha} \pm \sqrt{\overset{b}{w}_a \underset{b}{\alpha} - \overset{\mu\nu}{\zeta}_a \underset{\mu}{\alpha} \underset{\nu}{\alpha} + 2U_a} \quad , \quad p_\mu = \overset{\nu}{\xi}_\mu \underset{\nu}{\alpha} \quad ,$$

dove i primi indici latini debbono intendersi variabili da 1 ad un intero fisso $m \leq n$, quelli greci da $m+1$ a n e dove le funzioni $\overset{\nu}{\xi}_\mu$, $\overset{\nu}{\xi}_a$, $\overset{b}{w}_a$, U_a, $\overset{\mu\nu}{\zeta}_a = \overset{\nu\mu}{\zeta}_a$ dipendono al più dalla variabile corrispondente all'indice in basso, mentre le $\underset{i}{\alpha}$ sono delle costanti arbitrarie.

E' chiaro che , come fu suggerito da Burgatti e Dall'Acqua, se si introduce un legame tra le costanti $\underset{i}{\alpha}$ ed una nuova costante E in modo che per eliminazione di queste dalle (3) si ottenga un integrale primo quadratico del tipo

$$(4) \qquad \frac{1}{2} a^{ij} p_i p_j - U = E \quad ,$$

si trovano dei tipi di funzioni a^{ij} ed U che consentono la separabilità dell' equazione (1). Ma è altrettanto chiaro che, così facendo, si trovano solo delle condizioni sufficienti e non necessarie, in primo luogo perchè non è detto (e dalla trattazione fatta in [3] nulla può dirsi al proposito) che l'eliminazione delle $\underset{i}{\alpha}$ dalle (3) sia possibile, in secondo luogo perchè tutto dipende dalla scelta della relazione tra le $\underset{i}{\alpha}$ e la costante E . Dall'Acqua propose ad esempio

$$2E = \sum_{a=1}^{m} \underset{a}{\alpha} + \sum_{\nu=m+1}^{n} \underset{\nu}{\alpha}^2 \quad ,$$

relazione che è stata ripresa da Havas in un recente lavoro [6] dove esplicita semplicemente le indicazioni di Dall'Acqua (e a cui si rimanda per una dettagliata anche se non completa bibliografia), ma si può più generalmente assumere:

---

(1) Qui usiamo notazioni più adatte e significative che non in [3] ; in particolare adottiamola convenzione di sommazione degli indici ripetuti in tutto il loro campo di variabilità, ove non sia dichiarato il contrario con l'indicazione "n.s." (non sommato).

$$(5) \qquad 2E = \overset{a}{\beta}\,\underset{a}{\alpha} + \overset{\mu\nu}{\zeta_0}\,\underset{\mu}{\alpha}\,\underset{\nu}{\alpha} \quad ,$$

dove $\overset{a}{\beta}$ e $\overset{\mu\nu}{\zeta_0} = \overset{\nu\mu}{\zeta_0}$ sono delle costanti assegnate. Se infatti si fa l'ipotesi che le matrici $\|\overset{\nu}{\xi}_\mu\|$ e $\|\overset{b}{w}_a\|$ siano regolari e si indicano con $\|\underset{\nu}{\xi}^\mu\|$ e $\|\underset{b}{w}^a\|$ le rispettive inverse, dalle (3)e (5) segue:

$$\overset{\mu\nu}{\zeta_0}\,\underset{\mu}{\xi}^\rho\,\underset{\nu}{\xi}^\sigma p_\rho p_\sigma + \overset{b}{\beta}\,\underset{b}{w}^a\left[\left(p_a - \overset{\nu}{\xi}_a\,\underset{\nu}{\xi}^\mu p_\mu\right)^2 + \overset{\mu\nu}{\zeta_a}\,\underset{\mu}{\xi}^\rho\,\underset{\nu}{\xi}^\sigma p_\rho p_\sigma - 2U_a\right] = 2E \; .$$

Dal confronto con la (4) si ha allora:

$$(6) \qquad \begin{cases} a^{aa} = \overset{b}{\beta}\,\underset{b}{w}^a \quad , \quad a^{ab} = 0 \qquad (a \neq b) \; , \\ a^{a\alpha} = -\overset{b}{\beta}\,\underset{b}{w}^a\,\overset{\nu}{\xi}_a\,\underset{\nu}{\xi}^\alpha \qquad (a \text{ n.s.}) \; , \\ a^{\alpha\beta} = \left[\overset{\mu\nu}{\zeta_0} + \overset{b}{\beta}\,\underset{b}{w}^a\left(\overset{\mu\nu}{\zeta_a} + \overset{\mu}{\xi}_a\,\overset{\nu}{\xi}_a\right)\right]\underset{\mu}{\xi}^\alpha\,\underset{\nu}{\xi}^\beta , \\ U = \overset{b}{\beta}\,\underset{b}{w}^a\,U_a + \text{cost.} \end{cases} \qquad (^2)$$

Non è detto tuttavia che le (6) rappresentino condizioni necessarie proprio perchè esse fanno capo alla relazione (5), che si potrebbe sospettare non essere la più generale, ed inoltre vengono ricavate nell'ipotesi aggiuntiva della regolarità delle matrici $\|\overset{\nu}{\xi}_\mu\|$ e $\|\overset{b}{w}_a\|$. Di qui discende la necessità, per risolvere il problema ristretto della separabilità,di intraprendere una via autonoma rispetto al risultato di Burgatti e Dall'Acqua.

Questo fu fatto nel 1936 da Agostinelli [7] che, ritenendo erroneamente falsa la congettura di Burgatti (il lavoro di Dall'Acqua [3] non è citato nella sua bibliografia) riuscì ad integrare le condizioni di Levi-Civita nel caso generale grazie ad una brillante intuizione geometrica. Sfortunatamente il suo ponderoso lavoro, sorprendentemente ignorato dalla sia pur minuziosa bibliografia riportata in [6] , non lo conduce, contrariamente alla opinione sua e di altri, alla soluzione completa del problema in questione. Di ciò non si rende conto neanche in un recente lavoro [8] dove, dimostrando la sufficienza,per la separabilità,

---

(^{2}) Se in particolare si pone $\overset{b}{\beta} = 1$ e $\overset{\mu\nu}{\zeta_0} = \delta_{\mu\nu}$ si ottengono le espressioni date da Havas [6] e considerate erroneamente da questo autore le più generali. Nel caso in cui è m = n (caso di Levi-Civita) è da intendersi che, avendo ruolo i soli indici "greci", risulti: $a^{ij} = \overset{hk}{\zeta_0}\,\underset{h}{\xi}^i\,\underset{k}{\xi}^j$, $U = cost.$

delle soluzioni da lui trovate per le funzioni a^{ij} e U, deduce gli n-m integrali primi lineari $(3)_2$ ed m integrali primi quadratici che, seppure in maniera niente affatto evidente, sono casi particolari dei $(3)_1$. Cionondimeno, nel lavoro di Agostinelli appare il riconoscimento di una prima proprietà intrinseca della varietà riemanniana delle configurazioni: l'esistenza di un foglietta mento di varietà euclidee; è proprio questa invenzione che stimola ad affrontare il problema della separabilità nel suo aspetto "geometrico".

3. Esistenza di gruppi commutativi di movimenti sulle varietà riemanniane delle configurazioni.

Assumendo i coefficienti a^{ij} come componenti contravarianti del tensore metrico secondo la base naturale $\{\partial_i\}$ associata alle coordinate locali (x^i), lo spazio delle configurazioni viene dotato della struttura di varietà riemanniana che indicheremo con V_n. Queste componenti, con quelle covarianti a_{ij}, devono soddisfare, nell'ipotesi che le coordinate (x^i) siano separabili, a delle condizioni differenziali del primo ordine stabilite per la prima volta da Levi-Civita [2] e che con le nostre convenzioni sugli indici possono porsi nella forma seguente:

$$
(7) \qquad \begin{cases}
\partial_\alpha a_{ij} = 0 \qquad (i,j \neq \alpha) \,, \\
\forall a \,,\ \exists\, i,j \neq a : \quad \partial_a a_{ij} \neq 0 \,, \\
\left.\begin{array}{l}
a^{ai}\,\partial_i a_{jh} = 0 \\
a^{ak}\,\partial_i a_{jk} - a^{ai}\,\partial_i a_{ji} = 0 \\
a^{ak}\,\partial_i a_{ik} - \frac{1}{2}\, a^{ai}\,\partial_i a_{ii} = 0
\end{array}\right\} \begin{array}{l} j,h \neq i \\ i,j,h \neq a \\ i \ \text{n.s.} \end{array}
\end{cases}
$$

Per un dato numero n di gradi di libertà esistono dunque n+1 tipi di sistemi dinamici separabili; li denoteremo con $\mathcal{S}_{n,r}$ dove $r = n - m$ è variabile da 0 a n.

Dalle (7), con qualche calcolo, si possono dedurre le assai più significative seguenti condizioni:

$$
(8) \qquad a^{ab} = 0 \quad (a \neq b) \,, \qquad \partial_\alpha a^{aa} = 0 \,, \qquad \partial_b \frac{a^{a\alpha}}{a^{aa}} = 0 \quad (a \neq b) \,,
$$

(chiaramente, poichè $\mathcal{K}$ è definita positiva, deve essere $a^{aa} \neq 0$) nonchè:

$$(9) \qquad \begin{cases} \Gamma^{a}_{ij} + \frac{1}{2} a^{aa} \partial_a a_{ij} = 0 & (i,j \neq a \ , \ a \ \text{n.s.}) \ , \\ \Gamma_{\alpha\beta\gamma} = 0 \ , \ \Gamma_{\alpha\beta a} + \Gamma_{\alpha a\beta} = 0 \ , \ \Gamma_{\alpha ab} + \Gamma_{\alpha ba} = 0 & (\alpha \neq \beta) \ , \end{cases}$$

essendo Γ^{k}_{ij} e $\Gamma_{ijh} = a_{hk} \Gamma^{k}_{ij}$ i coefficienti della connessione riemanniana (simboli di Christoffel di seconda e prima specie rispettivamente). Le $(8)_{1,2}$ si trovano già in [3] , la $(9)_1$ con gli indici greci in basso (secondo la presente notazione) e la $(9)_2$ compaiono in altra forma in [7] . Se inoltre si introducono le quantità

$$B^{i}_{\alpha} \equiv \Gamma^{i}_{\alpha\alpha} + \frac{1}{2} a^{ia} \partial_a a_{\alpha\alpha} \quad ,$$

che, come si può verificare, soddisfano alle condizioni:

$$(10) \qquad B^{a}_{\alpha} = 0 \quad , \quad a^{a\alpha} B^{\beta}_{\alpha} + \partial_\alpha a^{a\beta} = 0 \quad (\alpha \ \text{n.s.}) \ ,$$

si dimostra, sulla scorta dei precedenti risultati, che parte delle condizioni di separabilità del secondo ordine assumono la forma compatta:

$$(11) \qquad \partial_\beta B^{\gamma}_{\alpha} + B^{\beta}_{\alpha} B^{\gamma}_{\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta \ , \ \beta \ \text{n.s.}) \ , \quad \partial_a B^{\beta}_{\alpha} = 0 \quad .$$

E' a questo punto che si può far intervenire quell'"artificio sintetico" auspicato da Levi-Civita [2] , che permette di acquisire un primo fondamentale risultato. Se infatti si considera il sistema differenziale:

$$(12) \qquad \partial_\alpha \xi^{\mu} = - \xi^{\alpha} B^{\mu}_{\alpha} \qquad (\alpha \ \text{n.s.}) \ ,$$

lineare nelle r funzioni incognite ξ^{μ} , si vede che le sue condizioni di integrabilità sono identicamente soddisfatte in virtù delle $(11)_1$. Esistono pertanto r soluzioni indipendenti delle (12), che indichiamo con $\underset{\nu}{\xi}^{\mu}$, soddisfacenti in più, in virtù delle $(11)_2$, alle condizioni:

$$(13) \qquad \partial_a \underset{\nu}{\xi}^{\mu} = 0 \quad .$$

Risultano così definiti sulla varietà V_n r vettori indipendenti $\underset{\nu}{X} \equiv \underset{\nu}{\xi}^{\mu} \partial_\mu$ tangenti alle sottovarietà W_r di equazioni $x^a = \text{cost.}$ ($a = 1, \ldots, m$), e

permutabili, cioè tali che le loro parentesi di Lie si annullano identicamente:

$$[\underset{\mu}{X}, \underset{\nu}{X}] = 0 \tag{14}$$

Inoltre, come si verifica in base alle (8) e (9), essi soddisfano all'equazione di Killing $\nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i = 0$. Possiamo così affermare che <u>la varietà V_n delle configurazioni di un sistema dinamico separabile di tipo $\mathcal{S}_{n,r}$ ammette un gruppo abeliano di movimenti G_r a r parametri</u> (localmente).

Data la commutatività del gruppo G_r le varietà invarianti W_r risultano ovviamente euclidee: si ritrova così come immediato corollario quanto acquisito da Agostinelli in [7] con laboriosi calcoli. Al contempo si conclude l'esistenza di r integrali primi lineari:

$$\underset{\nu}{\xi}^{\mu} p_{\mu} = \underset{\nu}{\alpha} \quad , \tag{15}$$

e quindi le espressioni $(3)_2$ essendo ora certi, per l'indipendenza dei vettori $\underset{\nu}{X}$, della regolarità della matrice $\|\underset{\nu}{\xi}^{\mu}\|$.

L'insieme degli r vettori $\underset{\nu}{X}$ può essere completato con altri m vettori in modo da costituire una base per gli spazi tangenti a V_n . Si rivela estremamente conveniente la scelta dei vettori seguenti:

$$\underset{a}{X} \equiv \frac{a^{ai}}{a^{aa}} \partial_i = \partial_a + \frac{a^{a\alpha}}{a^{aa}} \partial_\alpha \quad ,$$

i quali sono ovviamente ortogonali agli $\underset{\nu}{X}$ (e quindi alle sottovarietà W_r) e fra loro in virtù della $(8)_1$. Tramite le (8), (12) e (13) si vede subito che essi non solo commutano fra loro ma anche con gli $\underset{\nu}{X}$:

$$[\underset{a}{X}, \underset{b}{X}] = 0 \quad , \quad [\underset{a}{X}, \underset{\nu}{X}] = 0 \tag{16}$$

La prima di queste due proprietà ci dà una ulteriore informazione di tipo intrinseco: <u>le sottovarietà euclidee W_r formano un fogliettamento locale secabile "normale"; la varietà quoziente Z_m di tale fogliettamento si identifica isometricamente con le sottovarietà ad esso ortogonali</u>. Dalle (16) e (14) si vede inoltre che i vettori $\underset{\nu}{X}$ e $\underset{a}{X}$ formano una base locale <u>olonoma</u>; in altre parole: <u>esiste un sistema di coordinate locali y^i la cui base naturale è data dai vettori $\underset{i}{X}$</u> . E' di fondamentale importanza la circostanza che, come si dimostra facilmente,

queste nuove coordinate sono ancora separabili: le chiameremo coordinate separabili normali.

4. Coordinate separabili normali e soluzione del problema ristretto.

Indicate con $\overset{hk}{a}$ le componenti del tensore metrico nella base X_i (per cui si ha ovviamente $\overset{a\alpha}{a}=0$, $\overset{ab}{a}=0$ $(a\neq b)$), si può mostrare che per le componenti secondo la base naturalmente associata alle generiche coordinate separabili x^i sussistono, con la $(8)_1$, le seguenti espressioni:

$$(17)\qquad \begin{cases} a^{aa} = \overset{aa}{a}\ , \\ a^{a\alpha} = -\underset{\nu}{\xi}^{\alpha}\,\overset{\nu}{\xi}_a\,\overset{aa}{a} \qquad (a\ \text{n.s.})\ , \\ a^{\alpha\beta} = \underset{\mu}{\xi}^{\alpha}\,\underset{\nu}{\xi}^{\beta}\left(\overset{\mu\nu}{a} + \overset{\mu}{\xi}_a\,\overset{\nu}{\xi}_a\,\overset{aa}{a}\right)\ , \end{cases}$$

dove, posto per comodità

$$\overset{\nu}{\xi}_a = -\frac{a^{a\mu}}{a^{aa}}\,\overset{\nu}{\xi}_\mu\ ,$$

le funzioni $\overset{\nu}{\xi}_i$ dipendono al più dalla variabile corrispondente all'indice in basso, come si verifica facilmente sulla base delle $(8)_2$ e (12).

In coordinate separabili normali y^i l'equazione (1), che ha carattere invariante, assume, con l'intervento degli integrali primi (15), la forma seguente:

$$(18)\qquad \overset{aa}{a}\,(\partial_a W)^2 + \overset{\mu\nu}{a}\,\underset{\mu}{\alpha}\,\underset{\nu}{\alpha} - U = 2E \qquad \left(\partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial y^a}\right)$$

E' notevole la circostanza che le funzioni $\overset{aa}{a}$, $\overset{\mu\nu}{a}$ e U non dipendono dalle variabili x^α e quindi dalle y^α essendo $\partial_\alpha = \underset{\alpha}{\xi}^{\beta}\,\partial_\beta$ (con $\|\underset{\alpha}{\xi}^{\beta}\|$ matrice regolare). Basta tener conto per le $\overset{aa}{a}$ delle $(8)_2$ e $(17)_1$, per le $\overset{\mu\nu}{a}$ del fatto che esse rappresentano i prodotti scalari dei vettori duali degli $\underset{\nu}{X}$ che sono vettori "costanti" sulle sottovarietà euclidee W_r (di equazione $x^a=$ cost.) perchè generatori del gruppo delle traslazioni su di queste, ed infine, per la funzione U, del fatto che essa deve soddisfare alle condizioni di separabilità $\partial_\alpha U = 0$ (si veda ad es. [3]).

L'equazione (18) può dunque interpretarsi come l'equazione di Hamilton-Jacobi relativa ad un sistema separabile ortogonale ad m gradi di libertà (le y^α sono ignorabili) soggetto al potenziale $U - \overset{\mu\nu}{a}\,\underset{\mu}{\alpha}\,\underset{\nu}{\alpha}$. Possiamo pertanto applica

re il teorema di Stäckel secondo il quale deve necessariamente essere (cfr. [9])

$$(19) \qquad \overset{aa}{a} = \underset{m}{u}^a \quad , \quad \overset{\mu\nu}{a}\,\underset{\mu}{\alpha}\underset{\nu}{\alpha} - U = \varphi_a \underset{m}{u}^a + cost. \quad ,$$

dove $\|\underset{b}{u}^a\|$ è la matrice inversa di una matrice regolare $m \times m$ $\|\overset{b}{u}_a\|$ i cui elementi dipendono al più dalla variabile corrispondente all'indice inferiore, come per le funzioni φ_a . Ma, come ebbe a osservare Levi-Civita in [2] , se l'equazione (1) (ovvero (18)) è separabile, resta tale anche sostituendo ad U una costante. Perciò, vista la $(19)_2$, deve essere $\overset{\mu\nu}{a}\,\underset{\mu}{\alpha}\underset{\nu}{\alpha} = \psi_a \underset{m}{u}^a + cost.$ con ψ_a funzione della sola x^a , e quindi, per l'arbitrarietà delle costanti $\underset{\nu}{\alpha}$:

$$(20) \qquad \overset{\mu\nu}{a} = \overset{\mu\nu}{\zeta}_a \underset{m}{u}^a + \overset{\mu\nu}{\zeta}_0 \quad ,$$

dove $\overset{\mu\nu}{\zeta}_a = \overset{\nu\mu}{\zeta}_a$ sono funzioni al più della variabile corrispondente all'indice in basso e $\overset{\mu\nu}{\zeta}_0 = \overset{\nu\mu}{\zeta}_0$ costanti assegnate. Dalla (20), ritornando alla $(19)_2$, si deduce per la funzione U un'espressione del tipo

$$(21) \qquad U = U_a \underset{m}{u}^a + cost.$$

con U_a , al solito, funzioni al più della variabile corrispondente all'indice.

Con l'intervento delle $(19)_1$ e (20) nelle (17) si ottiene:

$$(22) \qquad \begin{cases} a^{aa} = \underset{m}{u}^a \quad , \\ a^{a\alpha} = -\underset{\nu}{\xi}^\alpha \overset{\nu}{\xi}_a \underset{m}{u}^a \qquad (a \text{ n.s.}) \quad , \\ a^{\alpha\beta} = \underset{\mu}{\xi}^\alpha \underset{\nu}{\xi}^\beta \left[\overset{\mu\nu}{\zeta}_0 + \left(\overset{\mu\nu}{\zeta}_a + \overset{\mu}{\xi}_a \overset{\nu}{\xi}_a \right) \underset{m}{u}^a \right] \quad . \end{cases}$$

Possiamo perciò affermare che: <u>condizione necessaria affinchè l'equazione</u> (1) <u>ammetta un'integrale completo del tipo</u> (2) <u>è che sussistano per le funzioni</u> U <u>e</u> a^{ij} <u>espressioni del tipo</u> (21), $(8)_1$ <u>e</u> (22), <u>intendendo gli indici latini</u> a, b <u>variabili da</u> 1 <u>ad un intero</u> $m \leq n$ <u>e quelli greci da</u> $m+1$ <u>ad</u> n, <u>dove</u> $\|\underset{b}{u}^a\|$ <u>e</u> $\|\underset{\nu}{\xi}^\mu\|$ <u>sono matrici regolari di inverse</u> $\|\overset{b}{u}_a\|$ <u>e</u> $\|\overset{\nu}{\xi}_\mu\|$, <u>e dove le funzioni</u> $\overset{b}{u}_a$, U_a , $\overset{\nu}{\xi}_i$, $\overset{\mu\nu}{\zeta}_a = \overset{\nu\mu}{\zeta}_a$ <u>dipendono al più dalla variabile corrispondente all'indice in basso e le</u> $\overset{\mu\nu}{\zeta}_0 = \overset{\nu\mu}{\zeta}_0$ <u>sono costanti</u>. In questo enunciato rientra anche il caso $m = 0$ pur d'intendere eliminate quelle espressioni in cui compa

iono gli indici latini a, b (cfr. nota ([2])).

Si dimostra facilmente che, subordinatamente ad ulteriori ovvie ipotesi che garantiscano la regolarità della matrice $\| a^{ij} \|$ e la realtà degli integrali, le suddette condizioni sono anche sufficienti. Il confronto di queste con le (6), le quali, anch'esse sufficienti, appaiono più generali di quelle necessarie espresse dalle (21) e (22), può suscitare perplessità e dare luogo ad equivoci. In effetti si può dimostrare che oltre alle espressioni (21) e (22), che con la $(8)_1$ rappresentano condizioni necessarie in un certo senso "irriducibili", ne sussistono infinite altre equivalenti, anche se apparentemente più generali, quali:

$$\begin{cases} a^{aa} = \overset{A}{\beta}\, \underset{A}{v}{}^{a} \quad , \quad a^{ab} = 0 \quad (a \neq b) \, , \\ a^{a\alpha} = - \underset{\check{\nu}}{\xi}{}^{\alpha} \check{\xi}_{a}^{\nu} \overset{A}{\beta}\, \underset{A}{v}{}^{a} \quad (a \text{ n.s.}) \, , \\ a^{\alpha\beta} = \underset{\mu}{\xi}{}^{\alpha} \underset{\check{\nu}}{\xi}{}^{\beta} \left[\overset{\mu\nu}{\theta}_{0} + \left(\overset{\mu\nu}{\theta}_{B} \underset{A}{v}{}^{B} + \overset{\mu}{\xi}_{a} \check{\xi}_{a}^{\nu} \underset{A}{v}{}^{a} \right) \overset{A}{\beta} \right] , \\ U = \overset{A}{\beta}\, \underset{A}{v}{}^{B} U_{B} + \text{cost.} \quad , \end{cases}$$

dove $\| \underset{A}{v}{}^{B} \|$ è una matrice regolare $N \times N$ di inversa $\| \overset{A}{v}_{B} \|$ (gli indici latini maiuscoli si intendono variabili da 1 a $N \geq m$), le funzioni $\overset{A}{v}_{a}$, U_{a}, $\check{\xi}_{i}$, $\overset{\mu\nu}{\theta}_{a} = \overset{\nu\mu}{\theta}_{a}$ dipendono al più dalla variabile corrispondente all'indice inferiore e le rimanenti quantità sono costanti.

Le dimostrazioni relative a tali equivalenze, di una certa complessità e che qui si tralasciano, sono basate su alcune proprietà differenziali delle matrici regolari $N \times N$ di funzioni di classe C^2 almeno nelle m variabili y^{a} ($a = 1, \ldots, m$) i cui elementi $\overset{B}{v}_{A}$ dipendono al solito al più dalla variabile corrispondente all'indice in basso e sono costanti se tale indice è maggiore di m.

5. Sistemi separabili ortogonali.

Diciamo che un sistema dinamico separabile è <u>ortogonale</u> se ammette un sistema di coordinate separabili ortogonali. Ovviamente i sistemi del tipo $\mathcal{S}_{n,0}$ e $\mathcal{S}_{n,1}$ sono sempre ortogonali.

In generale un sistema di tipo $\mathcal{S}_{n,r}$ con $r \neq 0,1$ è ortogonale se è possibile specializzare i generici vettori di Killing $\underset{\alpha}{X}$ in una r-pla ancora di vettori di Killig ma ortogonali, che indichiamo per comodità con $\overset{t}{X}_{\alpha}$, con una tra

sformazione del tipo:

$$\underset{\alpha}{X} = \underset{\alpha}{A}^{\beta} \overset{\perp}{X}_{\beta} \quad , \quad \overset{\perp}{X}_{\beta} = \overset{\alpha}{\check{A}}_{\beta} \underset{\alpha}{X} \quad ,$$

dove ovviamente la matrice regolare $\| \underset{\alpha}{A}^{\beta} \|$, di inversa $\| \check{A}_{\beta} \|$, è costante.

Tale specializzazione è ovviamente possibile su ogni sottovarietà W_r ma non sempre nella varietà ambiente V_n, a meno che non sia $r = n$, nel qual caso V_n è localmente euclidea (anche il tipo $\mathcal{S}_{n,n}$ è dunque sempre ortogonale). Si dimostra con la stessa tecnica vista in precedenza che per i sistemi separabili ortogonali si hanno necessariamente per le funzioni U e a^{ij} ancora espressioni del tipo (21) e (22) dove però $\overset{\mu\nu}{\zeta}_a$ e $\overset{\mu\nu}{\zeta}_0$ hanno la forma particolare

$$\overset{\mu\nu}{\zeta}_a = \overset{\mu}{A}_{\alpha} \overset{\nu}{\check{A}}_{\alpha} \varphi^{\alpha}_a \quad , \quad \overset{\mu\nu}{\zeta}_0 = \overset{\mu}{A}_{\alpha} \overset{\nu}{\check{A}}_{\alpha} \varphi^{\alpha}_0$$

Anche in questo caso si possono dare infinite forme equivalenti; per esempio la seguente:

$$\begin{cases} a^{aa} = \underset{n}{v}^{a} \quad , \quad a^{ab} = 0 \quad (a \neq b) \\ a^{a\alpha} = -\underset{\nu}{\xi}^{\alpha} \overset{\nu}{\check{\xi}}_a \underset{n}{v}^{a} \quad , \\ a^{\alpha\beta} = \underset{\mu}{\xi}^{\alpha} \underset{\nu}{\xi}^{\beta} \left(\overset{\mu}{A}_{\rho} \overset{\nu}{\check{A}}_{\rho} \underset{n}{v}^{\rho} + \overset{\mu}{\xi}_a \overset{\nu}{\check{\xi}}_a \underset{n}{v}^{a} \right), \end{cases}$$

dove interviene una matrice $\| \overset{i}{v}_j \|$ di dimensione $n \times n$. Ponendo in particolare $\overset{\mu}{A}_{\rho} = \delta_{\mu\rho}$ si ottengono le espressioni trovate da Agostinelli [7], [8] le quali rappresentano pertanto un caso particolare nella classe dei sistemi ortogonali. Se inoltre si pone $\overset{\alpha}{\xi}_i = \delta_{i\alpha}$ si ricade nel caso di Stäckel.

*

* *

Le dimostrazioni complete relative ai risultati qui esposti sono di prossima pubblicazione.

Torino, maggio 1976.

BENENTI S.

BIBLIOGRAFIA

1 - STACKEL P., Math. Ann. 42 (1893), 548.

2 - LEVI-CIVITA T., Math. Ann. 59 (1904), 383.

3 - DALL'ACQUA F.A., Rend. Circ. Matem. Palermo 33 (1912), 341.

4 - DALL'ACQUA F.A., Math. Ann. 66 (1908), 398.

5 - BURGATTI P., Rend. Acc. Lincei 20 (1911), 108.

6 - HAVAS P., J. Math. Phys. 16 (1975), 1461 e 2476.

7 - AGOSTINELLI C., Mem.R. Acc. Sc. Torino 69 (1937), 1, e Atti R. Ist. Ven. Sc. Lett. Arti 96 (1936-37), 151.

8 - AGOSTINELLI C., Rend. Acc. Lincei 57 (1975), Nota I e II, 391 e 619.

9 - PARS L.A., A treatise on analytical dynamics, Heinemann (1968).