

MÉCANIQUE ANALYTIQUE. — *Sur les structures de séparabilité des variétés riemanniennes.* Note (*) de M. Sergio Benenti, présentée par M. André Lichnerowicz.

On donne des propriétés intrinsèques des variétés riemanniennes dont l'équation de Hamilton-Jacobi est intégrable par séparation des variables; on donne aussi des conditions nécessaires sur les coefficients de la métrique.

Soit V_n une variété proprement riemannienne de dimension n . Nous disons que V_n est douée d'une structure (locale) de séparabilité si elle admet au moins un système de coordonnées locales (x^i) , qu'on appelle *séparables*, tel que l'équation (de Hamilton-Jacobi réduite) :

$$(1) \quad \frac{1}{2} g^{ij} \partial_i W \partial_j W = h \quad \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (1),$$

(où h est une constante non négative arbitraire) admet une intégrale complète qui est somme de fonctions d'une seule coordonnée, c'est-à-dire de la forme :

$$(2) \quad W = \sum_{i=1}^n W_i(x^i).$$

On peut voir qu'il existe $n+1$ types de structures de séparabilité; nous les noterons $\mathcal{S}_{n,r}$, où $0 \leq r \leq n$. On démontre que :

1° Dans la structure $\mathcal{S}_{n,0}$, on a un seul système de coordonnées séparables (changements d'échelle près), elles sont orthogonales et telles que le tenseur métrique satisfait aux équations suivantes :

$$(3) \quad g^{ii} g^{jj} \partial_{ij}^2 g^{hh} - g^{ii} \partial_i g^{jj} \partial_j g^{hh} - g^{jj} \partial_j g^{ii} \partial_i g^{hh} = 0 \quad (i \neq j, \text{ n. s.})$$

2° Dans la structure $\mathcal{S}_{n,r}$ ($r \neq 0$) la variété V_n admet un groupe (local) abélien de mouvements à r paramètres et deux feuilletages complémentaires orthogonaux dont un est formé par les sous-variétés euclidiennes de dimension r invariantes par le groupe et le second est formé par des sous-variétés isométriquement identifiables à la variété quotient (par rapport au premier feuilletage) qui admet une structure de séparabilité orthogonale.

3° Pour $\mathcal{S}_{n,r}$ ($r \neq 0$) ils existent des systèmes des coordonnées séparables (que nous appelons « normales ») (y^i) , liées aux (x^i) par des relations du type (2) :

$$(4) \quad y^a = x^a + \text{Cte}, \quad y^\alpha = \sum_{i=1}^n \Xi_i^\alpha(x^i),$$

« adaptées » au bifeuilletage, c'est-à-dire telles que les composantes du tenseur métrique g^{ij} associées satisfont aux conditions $g^{ab} = 0$ ($a \neq b$), $g^{ad} = 0$, tandis que les autres dépendent seulement des variables g^a (ou x^a).

4° Les coefficients g^{ij} de l'équation (1) dans la structure $\mathcal{S}_{n,r}$ sont nécessairement susceptibles de la forme suivante :

$$(5) \quad \begin{cases} g^{aa} = u_m^a, & g^{ab} = 0 \quad (a \neq b), \\ g^{a\alpha} = -\xi_\alpha^\nu \xi_a^\mu u_m^\alpha & (a \text{ n. s.}), \\ g^{\alpha/\beta} = \xi_\mu^\alpha \xi_\nu^\beta [\zeta_0^{\mu\nu} + (\zeta_a^\mu + \xi_a^\mu \xi_a^\nu) u_m^\alpha], \end{cases}$$

où u_m^a et ξ_μ^α sont éléments de deux matrices régulières $\|u_b^a\|$ et $\|\xi_\mu^\alpha\|$, d'inverses $\|u_a^b\|$ et $\|\xi_\alpha^\mu\|$ respectivement, u_a^b , ξ_i^μ , $\zeta_a^{\mu\nu} = \zeta_a^{\nu\mu}$ étant au plus fonctions de la variable correspondant à l'indice du bas, $\zeta_0^{\mu\nu} = \zeta_0^{\nu\mu}$ des constantes (3).

Nous donnons ici une esquisse de la démonstration de quelques-uns de ces résultats; le traitement complet de ces questions, par rapport aussi à des différentes approches par d'autres Auteurs, paraîtra ailleurs.

Dans l'hypothèse que l'équation (1) a une intégrale complète du type (2) les fonctions $\pi_i \equiv \partial_i W$ doivent satisfaire au système aux différentielles totales :

$$(6) \quad \partial_i \pi_j = 0 \quad (i \neq j), \quad \partial_i \pi_i = -\frac{1}{2} \frac{\partial_i g^{hk} \pi_h \pi_k}{g^{ij} \pi_j},$$

dont les conditions d'intégrabilité nous donnent des conditions différentielles du premier et second ordre sur les fonctions g^{ij} (4). Par les conditions du premier ordre on tire les équations suivantes :

$$(7) \quad g^{ab} = 0 \quad (a \neq b); \quad \partial_\alpha g^{aa} = 0, \quad \partial_b \frac{g^{a\alpha}}{g^{aa}} = 0 \quad (a \neq b);$$

$$(8) \quad \Gamma_{ij}^a + \frac{1}{2} g^{aa} \partial_a g_{ij} = 0 \quad (i \neq j, a \text{ n. s.});$$

$$(9) \quad \Gamma_{\alpha\beta\gamma} = 0, \quad \Gamma_{\alpha\beta a} + \Gamma_{\alpha a\beta} = 0, \quad \Gamma_{\alpha ab} + \Gamma_{\alpha ba} = 0 \quad (\alpha \neq \beta),$$

où Γ_{ij}^k sont les coefficients de la connexion riemannienne et $\Gamma_{ijh} \equiv g_{hk} \Gamma_{ij}^k$ [quelques-unes de ces conditions apparaissent déjà dans (5) et (6)]. Si d'autre part on considère les quantités $B_\alpha^i \equiv \Gamma_{\alpha\alpha}^i + (1/2) g^{ia} \partial_a g_{\alpha\alpha}$, qui obéissent aux équations :

$$(10) \quad B_\alpha^a = 0, \quad g^{a\alpha} B_\alpha^\beta + \partial_\alpha g^{a\beta} = 0 \quad (\alpha \text{ n. s.}),$$

on peut tirer de (6) le sous-système d'équations :

$$\partial_i \pi_\alpha = 0 \quad (i \neq \alpha), \quad \partial_\alpha \pi_\alpha = B_\alpha^\beta \pi_\beta,$$

en les fonctions π_α , dont les conditions d'intégrabilité sont simplement :

$$(11) \quad \partial_\beta B_\alpha^\gamma + B_\alpha^\beta B_\beta^\gamma = 0 \quad (\alpha \neq \beta, \beta \text{ n. s.}), \quad \partial_\alpha B_\alpha^\beta = 0.$$

Si l'on considère alors le système aux différentielles totales suivant (linéaire dans les fonctions inconnues ξ^μ) :

$$(12) \quad \partial_\alpha \xi^\mu = -B_\alpha^\mu \xi^\alpha \quad (\alpha \text{ n. s.}),$$

on voit que ses conditions d'intégrabilité sont identiquement satisfaites grâce aux équations (11)₁. Nous choisissons donc r solutions indépendantes ξ^μ et considérons les vecteurs $X_\nu = \xi^\mu \partial_\mu$ tangents aux sous-variétés W_r d'équations $x^a = \text{Cte}$. Grâce aux équations (12), (8) et (9), puisqu'on a aussi $\partial_a \xi^\mu = 0$ d'après (11)₂, on vérifie aisément que ces vecteurs commutent entre eux :

$$(13) \quad [X_\alpha, X_\beta] = 0$$

et qu'ils sont de Killing. On prouve ainsi l'existence sur V_n d'un groupe de mouvements à r paramètres abéliens : les variétés W_r , invariantes par ce groupe, sont donc euclidiennes [voir (6)].

Si on prend encore les vecteurs $X_a = (g^{ai}/g^{aa}) \partial_i$, orthogonaux entre eux et aux X_α , on a d'après les équations (12), (10)₂ et (7) :

$$(14) \quad [X_a, X_i] = 0.$$

Donc il existe aussi un feuilletage, orthogonal au feuilletage euclidien du groupe, généré par les X_a . De plus, les relations de commutation (13) et (14) prouvent l'existence d'un système de coordonnées locales (y^i) tel que $X_i = \partial/\partial y^i$, il est remarquable que ces coordonnées sont encore séparables; nous les appelons « normales »; si l'on note g^{ij} les composantes du tenseur métrique dans la base $\{X_i\}$, on a pour les composantes $g^{aa} = g^{aa}$ des conditions du type (3) [voir aussi (5)], tandis que l'équation (1) se réduit à

$$(15) \quad \frac{1}{2} g^{aa} (\partial_a W)^2 + g^{\mu\nu} \alpha_\mu \alpha_\nu = h \quad \left(\partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial y^a} \right)$$

où les α_μ sont r constantes arbitraires. Puisque g^{aa} et $g^{\mu\nu}$ viennent à dépendre seulement des variables y^a on peut appliquer à l'équation (15) le théorème de Stäckel ($g^{\mu\nu} \alpha_\mu \alpha_\nu$ joue le rôle d'un potentiel) et en tirer ainsi la forme générale des fonctions g^{aa} et $g^{\mu\nu}$; avec les relations entre les bases ∂_i et X_i on peut ensuite exprimer les g^{ij} selon les formules (5).

On doit enfin remarquer qu'en général une même variété V_n peut avoir plusieurs structures de séparabilité : cela est lié à la structure des sous-groupes abéliens du groupe complet des mouvements; par exemple l'espace euclidien tridimensionnel admet une structure $\mathcal{S}_{3,3}$ liée au sous-groupe de translations, dont les coordonnées normales sont cartésiennes, une autre du type $\mathcal{S}_{3,1}$ liée au sous-groupe à un paramètre des rotations autour d'un axe fixé, dont les coordonnées normales sont les coordonnées polaires sphériques, etc...

(*) Séance du 24 mai 1976.

- (¹) Les indices latins $i, j, h, \dots$ varient toujours de 1 à n ; la convention d'Einstein est adoptée sauf indication contraire « n. s. » (non sommé).
- (²) Les premiers indices latins $a, b, c, \dots$ varient de 1 à $m = n - r$; les grecs de $m + 1$ à n .
- (³) On peut voir que les expressions données par P. HAVAS, *J. Math. Phys.*, 16, n° 7, 1975, p. 1461-1468 peuvent se réduire à un cas particulier de (5).
- (⁴) T. LEVI-CIVITA, *Math. Ann.*, 59, 1904, p. 383.
- (⁵) F. A. DALL'ACQUA, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 33, 1912, p. 341.
- (⁶) C. AGOSTINELLI, *Mem. R. Acc. Sc. Torino*, 69, 1937, p. 1.

*Istituto di Meccanica Razionale,
Università di Torino,
via Carlo Alberto 10,
10123 Torino,
Italie.*